Combinatoria 1 (Basic)

Note Title 02/09/2025

X insieme finito

$$f : \underbrace{\{\text{sottoins. di } X\}}_{\mathcal{P}(X)} \longrightarrow [0,1]$$

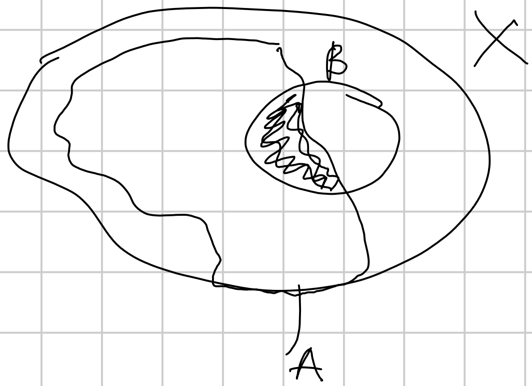
$A \subseteq B \subseteq X \quad f(A) \leq f(B) \quad f(X) = 1$

$f(A^c) = 1 - f(A)$, $A^c = X \setminus A$ $\qquad A \cap B = \emptyset \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B)$

E se $A \cap B \neq \emptyset$? $\quad f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$

$= f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

E allora $f(A \cap B)$?



Restrizione

$f_X(B) \qquad f_A(B) \to A \cap B$

$$f_A(B) = f_A(B \cap A) = f(B \mid A)$$

$$f(B \mid A) = \frac{f(A \cap B)}{f(A)} \quad \text{probabilità condizionata}$$

Si dice che A e B sono <u>indipendenti</u> se $f(A) = f(A \mid B)$
e $f(B) = f(B \mid A)$

Ah, ma allora se A e B sono indip.

$f(A \cap B) = f(A) f(B)$.

Oss. X finito $f(\{x\}) \in [0,1]$ e $1 = \sum_{x \in X} f(\{x\})$

- se tutte le $f(\{x\})$ sono uguali, equiprobabili $f(\{x\}) = \frac{1}{|X|} \quad f(A) = \frac{|A|}{|X|}$
- se non tutte le $f(\{x\})$ sono uguali $f(A) = \sum_{x \in A} f(\{x\})$

Es. Tiriamo 2 dadi, ottenendo a b

$f($"$a \cdot b$ non è multiplo di 5"$)$?

M_5 "

$f(M_5^c)$?
- $a=5 \quad b\neq 5 \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$
- $a\neq 5 \quad b=5 \quad \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$
- $a=5 \quad b=5 \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

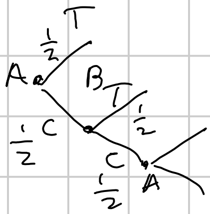
$\Big\} \frac{11}{36}$

$f(M_5^c)$
- $a=5 \quad f(\{5\})=\frac{1}{6}$
- $a\neq 5 \quad b=5 \quad f(b=5 \mid a\neq 5) \to f($"$a\neq 5$"$)\cdot \underbrace{f(b=5\mid a\neq 5)}$

$f(M_5)=\frac{25}{36}$

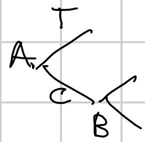
$f(M_5)$ / $a\neq 5$ e $b\neq 5 \quad \underset{\frac{5}{6}}{f(\text{"}a\neq 5\text{"})} \cdot \underset{\frac{5}{6}}{f(\text{"}b\neq 5\text{"})} = \frac{25}{36}$

Es. 2 2 gioc. A e B tirano una moneta. Comincia A.
Vince chi fa per primo T. $f($"vince A"$)$?



$f($"vince A"$) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot f(\text{"vince A"})}$

$f($"vince B"$)=\frac{2}{3}$

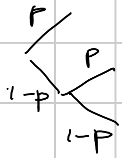


$f($"vince A"$) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot f($"perde B"$)$

$\quad$ " $(1-f($"vince B"$))$

$\quad$ " $(1-f($"vince A"$))$

Oss. Moneta $(p, 1-p)$



$f($"A"$) = p + (1-p)^2\cdot f($"A"$)$

Es. 3 Mazzo di 52 carte. A vince se dopo il primo Asso c'è AQ
B vince se " " " " c'è 2Q

Chi è favorito?

Tolgo AQ ho 51! mazzi diversi. Dopo il 1° asso
metto AQ → ottengo # mazzi vincenti per A 51!

Tolgo 2Q " " — " — — B 51!

Su 52! $f($"vince A"$) = \frac{1}{52} = f($"vince B"$)$

Es. 4 2 gioc. Tiriamo tante volte il dado

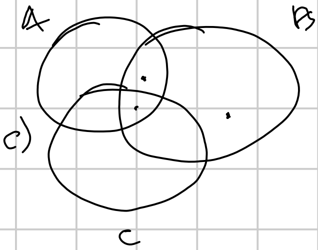
A vince appena capita 1 2 Chi è favorito?

B vince appena capita 2 2

Principio inclusione-esclusione

$f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ sapendo $f(A_i), f(A_i \cap A_j), \dots f(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})$

$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

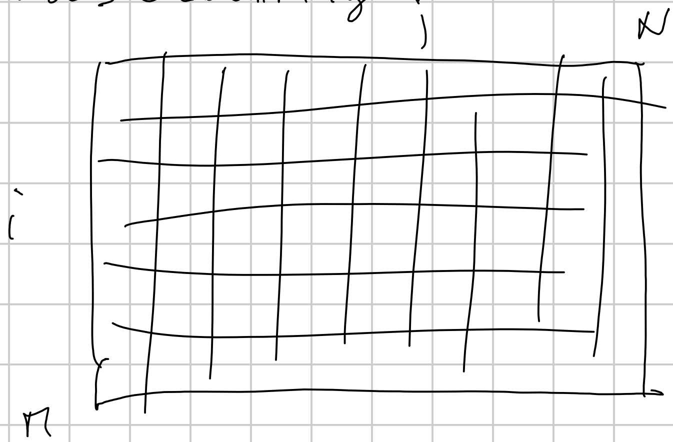


$f(A \cup B \cup C) = f(A) + f(B) + f(C) - f(A \cap B) - f(A \cap C) - f(B \cap C)$
$+ f(A \cap B \cap C)$

$x \in A \cup B \cup C$

$= \sum f(A_i) - \sum_{i,j} f(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k} f(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots + (-1)^{\alpha+1} \sum_{i_1 \dots i_\alpha} f(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\alpha}) +$
$\dots + (-1)^{n+1} f(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

Double Counting



$\sum a_{ij} = \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{M} a_{ij} \right)$

A_i $\quad A^j$

Es. 5 Festa con $12k$ invitati. Ciascuno stringe la mano a $3k+6$ altri invitati. Sappiamo che $\exists N$ t.c. per ogni coppia di invitati, esattamente N altri invitati hanno stretto la mano ai due elementi della coppia. Per quali k questo è possibile?

Tabella con 1 riga per ogni invitato, 1 colonna per ogni coppia di invitati ($\binom{12k}{2}$ colonne).

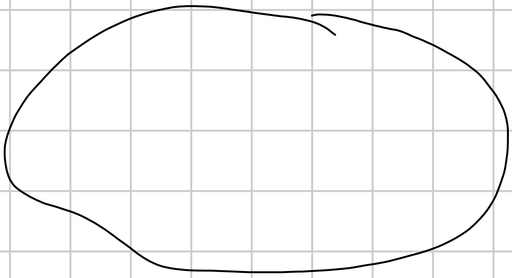
Contiamo le strette di mano.

per righe: $3k+6$ mani, $\binom{3k+6}{2}$ coppie $\rightarrow 12k \cdot \binom{3k+6}{2}$ strette di mano invitato-coppia

per colonne: $N \cdot \binom{12k}{2}$ (l'uguaglianza è possibile solo per $k=3$)

(Va esibita una configurazione lecita per $k=3$)

Es. 118 $\quad X$ ha n elementi. $|\{(A,B) \mid A \subseteq X, B \subseteq X, A \cap B = \emptyset\}|$?



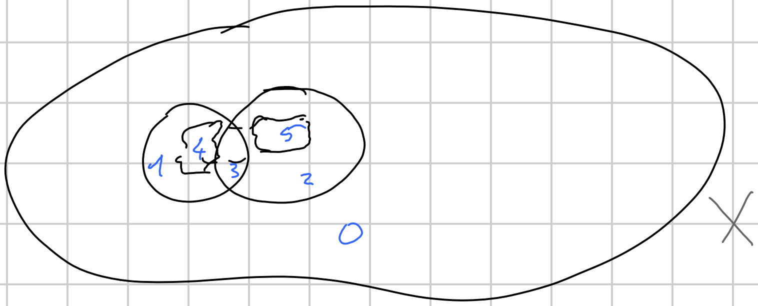
$X = \{x_1\ x_2\ x_3 \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_n\}$

$x_1 \downarrow 0,1,2$ $\qquad f : X \to \{0,1,2\}$

0 → fuori da A e B
1 → in A
2 → in B

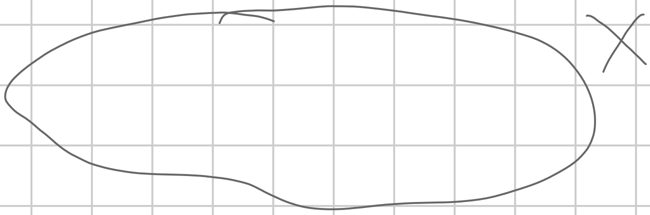
$|\{f : X \to \{0,1,2\}\}| = 3^n$

$|\{(A,B,C) \ A,B,C \subseteq X$ t.c. $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $A \setminus (B \cup C) = \emptyset\}|$?



$f_1 : X \to \{0 \ldots 5\}$
$f_2 : X \to \{0 \ldots 5\}$
$f_1 \neq f_2$

$|\{(A,B), A \subseteq X, B \subseteq X \ \ |A \cap B| < 3$ e $|(A \cup B)^c| = 1\}|$?

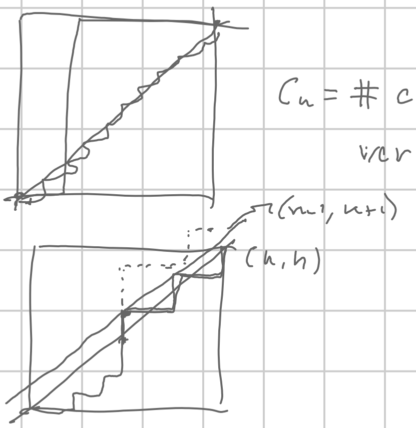


n modi per $X \setminus A \cup B$

casi per $|A \cap B| <$ 0: 2^{n-1}; 1: $(n-1)2^{n-2}$; 2: $\binom{n-1}{2}2^{n-3}$

108, 110, 111, 112, 121, 122, 123, 124,

108 $\quad$ Numeri di Catalan $\qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ $\quad \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$

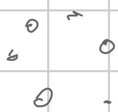


$C_n = \#$ cammini da $(0,0)$ a (n,n) monotoni verso destra e verso l'alto che rimangono sotto la diagonale

$\binom{2n}{n}$ cammini da $(0,0)$ a (n,n)

tolgo $\binom{2n}{n+1}$ da $(0,0)$ a $(n-1, n+1)$

110



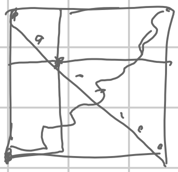
111 $\binom{m+k+1}{k}$

112 $n = p_1 + \dots p_k \qquad n+1 = p_1 + \dots p_n + 1$

$p(n,k) = p(n, k-1) + p(n-k, k)$

121 $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ prendo coeff. di x^n $\sum \binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$



122 poligoni reg. almeno a 3 a 3 :

: 3, 4, 5

: 3

: 3

$F - L + V = 2$

$2L = nF$

$2L = mV$

$\frac{2}{n}L - L + \frac{2}{m}L = 2$

$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\cancel{2}\cancel{L} = \frac{\cancel{2}}{L}+\frac{\cancel{L}}{2}$

$\frac{1}{n}+\frac{1}{m} > \frac{1}{2}$