G3 BASIC : GEOMETRIA SINTETICA

Gallo

Titolo nota

26/09/2024

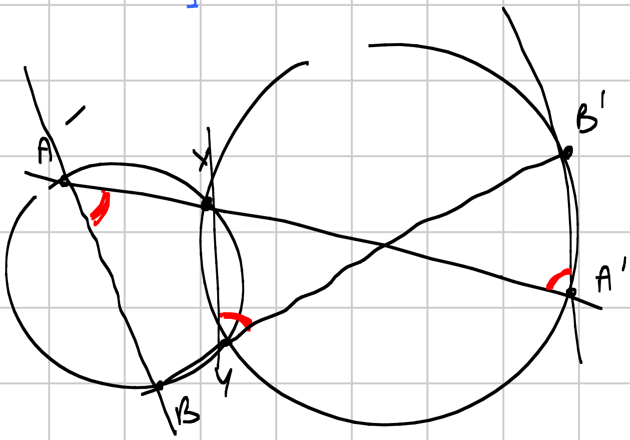
[Prima parte alla lavagna per problemi tecnici]

Teorema di Reim

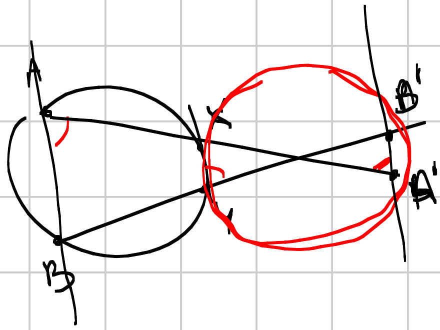
Se ABYX e A'B'YX sono ciclici

e B,Y,B' e A,Y,A' sono allineati

allora AB//A'B'



Viceversa 1



Se ABYX è ciclico

e A,X,A' & B,Y,B' sono all.

e AB// A'B',

allora XYA'B' è ciclico

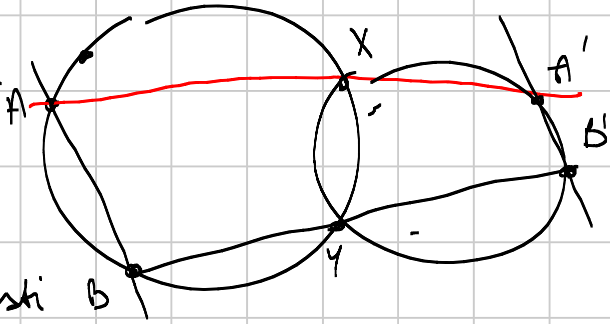
Viceversa 2

Se ABYX e A'B'YX sono ciclici

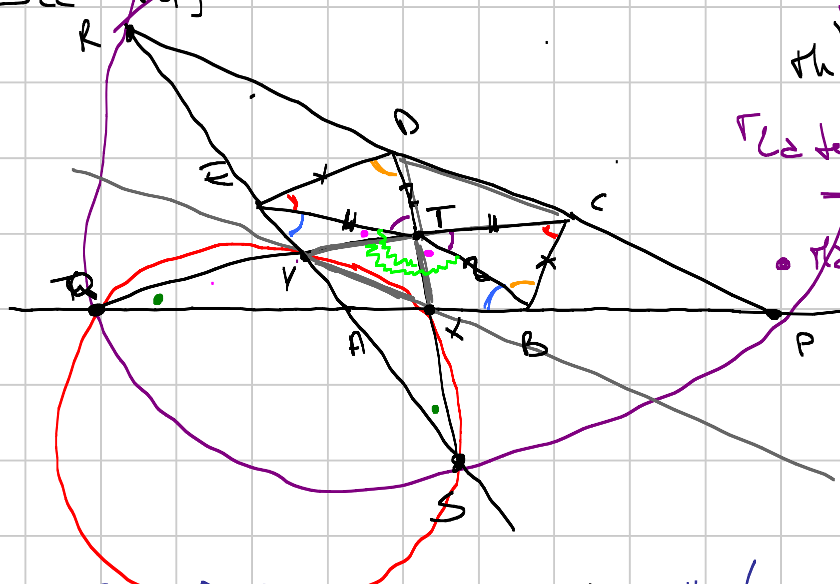
B,Y,B' sono all.

e AB// A'B'

allora A,X, A' sono allineati



[IMO 2022 - P4]



Th) PRQS è ciclico

"La tesi + Reim + QSXY ciclico $\longrightarrow$ $XY \parallel PR$

• Ma vale anche il viceversa
QSXY ciclico + $XY \parallel PR$ + Reim $\longrightarrow$ la tesi

$\longrightarrow$ ΔTBC e ΔTDE sono congruenti (hanno tutti i lati uguali)

$\longrightarrow$ • $= \pi - ($ • + • + • $)$ $\leadsto$ $C\hat{Q}B = E\hat{S}D$

$\longrightarrow$ QSXY è ciclico

la tesi è equiv. per Reim a $XY \parallel PR$

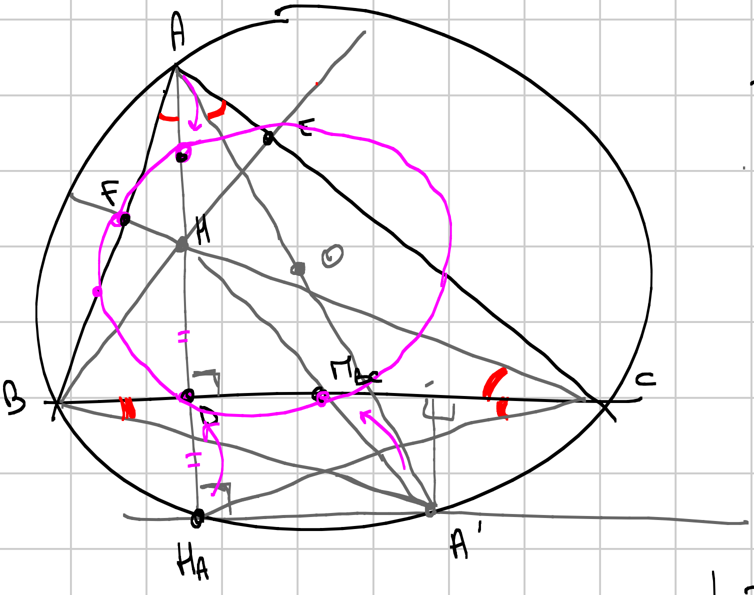
$\longrightarrow$ $E\hat{T}X = \pi -$ • $= B\hat{T}Y$ $\longrightarrow$ $E\hat{T}Y =$ • $- X\hat{T}Y = B\hat{T}X$

$\longrightarrow$ $\Delta EYT \sim \Delta BXT$ $\Longrightarrow$ $TX/TY = TB/TE = TD/TC$
per hp

$\Longrightarrow$ $\Delta TXY \sim \Delta TDC$

$\Longrightarrow$ $XY \parallel CD$

CONFIGURAZIONE ORTOCENTRO - CIRCOCENTRO



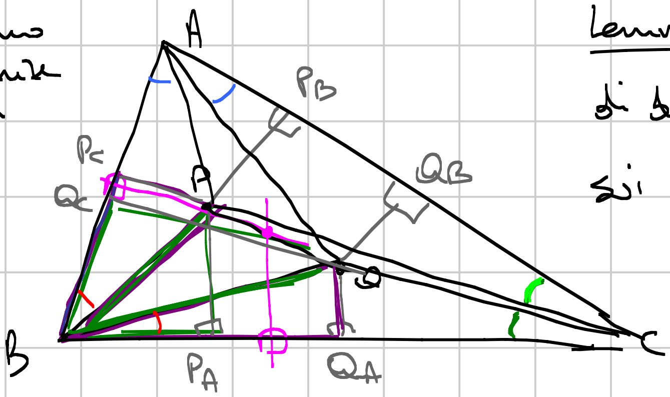
1. Il simmetrico di H rispetto a BC sta sulla circoscritta

2. ——— " ——— a M_{BC} sta sulla ——— ed AA' è diametro ($A'H_A \parallel BC$)

3. I piedi delle altezze, i punti medi dei lati e i punti medi di AH, BH, CH stanno sulla circonferenza di Feuerbach

4. H e O sono coniugati isogonali: $B\hat{A}H = C\hat{A}O$ e ciclici

Def P e Q si dicono CONIUGATI ISOGONALI se soddisfano queste uguaglianze di angoli



Lemma le proiezioni di due coniugati isogonali P, Q sui lati sono concicliche

$\Longrightarrow$ Corollario Feuerbach

Dim. Vorrei dimostrare che

$$BP_A \cdot BQ_A = BQ_C \cdot BP_C \iff \frac{BP_A}{BQ_C} = \frac{BP_C}{BQ_A}$$

per similitudine verde

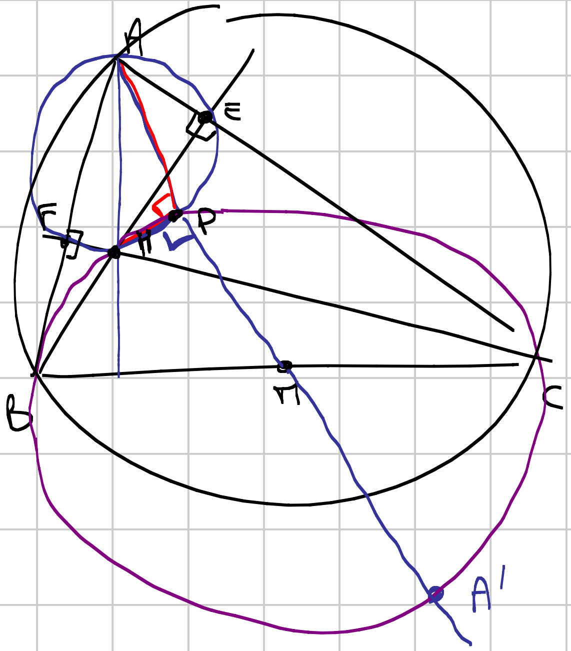
• $\triangle BPP_C$ e $\triangle BQQ_A$ sono simili $\Longrightarrow \frac{BP_C}{BQ_A} = \frac{BP}{BQ} = \frac{BP_A}{BQ_C}$

→ Per il lemma sulle potenze ho che $P_A Q_A P_C Q_C$ è ciclico

→ Ripeto il ragionamento su A e C e ottengo altre 2 ciclicità

→ Sono la stessa crf perché hanno tutte centro nel pt. medio di PQ.

Th) A, M, P allineati



→ $A\hat{P}H$ è retto: AH è diametro della $\odot AFE$

→ Ci basta mostrare che $H\hat{P}M$ è retto

→ Considero A' il sim. di A rispetto ad M

$A' = AM \cap \odot BHC$

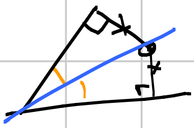
→ $\odot BHC$ è la sim. della circoscritta rispetto a M
(perché il sim di H sta su $\odot ABC$ per 1 di sopra)

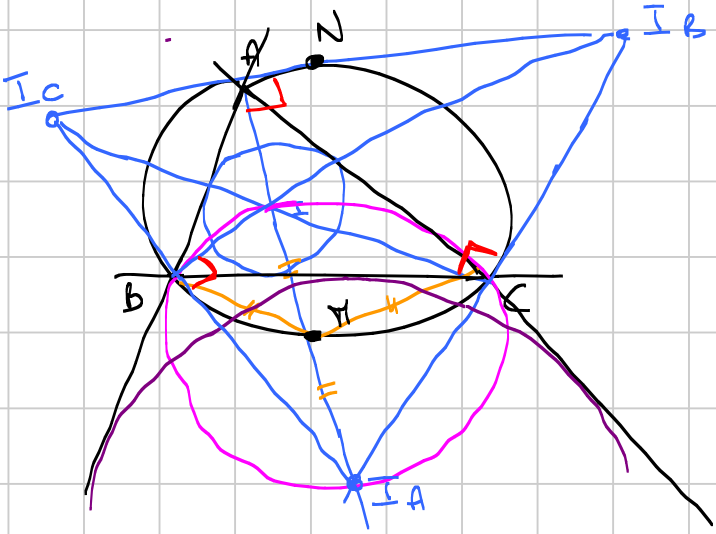
→ A' e H sono diametralmente opposti sulla $\odot BHC$ (2 di sopra)
perché per simmetria H è il sim dell'ortocentro di $\triangle A'BC$
rispetto al pt. medio di un lato

$\Rightarrow$ $A'H$ è diametro

$\Rightarrow$ $A'PH$ è retto

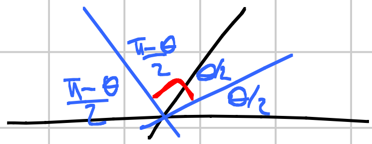
CONFIGURAZIONE INCENTRO-EXCENTRO





1. Due bis esterne e una interna si incontrano nel relativo excentro

2. Bis interna ed esterna sono ortogonali

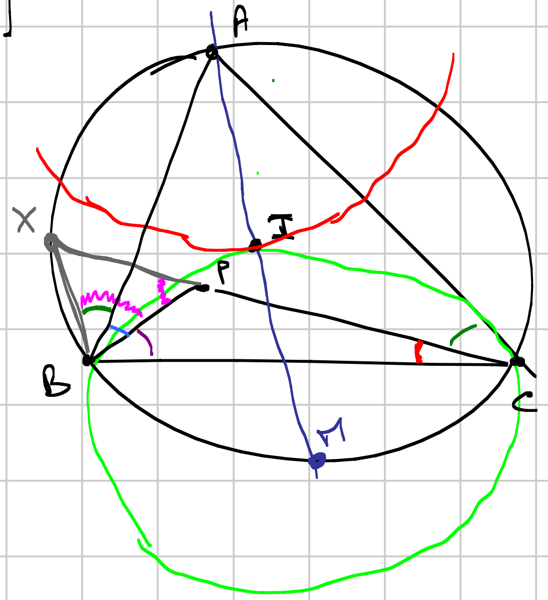


3. ⊙ABC è la circ di Feuerbach del triangolo $\Delta I_A I_B I_C$

4. ⊙ABC $\cap$ $I_B I_C$ è il punto medio di $I_B I_C$, nonché il pt. medio dell'arco BC

5. $M \overset{⊙ABC \cap AI}{=}$ è il centro di ⊙BI_ACI

[IMO 2006]



I incentro

Hp) $P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B$

Th) $AP \geq AI$

e (=) vale se e solo se $P = I$

→ Prolungo PC fino a $X = \odot ABC \cap PC$

e ho che $X\hat{B}P = P\hat{B}A + P\hat{C}A$ (spostato •)

e che $X\hat{P}B = P\hat{B}C + P\hat{C}B$

perché angolo esterno a $\triangle PBC$

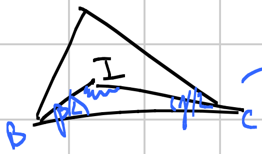
→ $BX = PX$

$B\hat{X}C = B\hat{A}C =: \alpha$

$\bullet = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha/2$

$B\hat{P}C = \pi - \bullet = \pi/2 + \alpha/2$ → BPIC è ciclico

perché $B\hat{I}C = \pi/2 + \alpha/2$



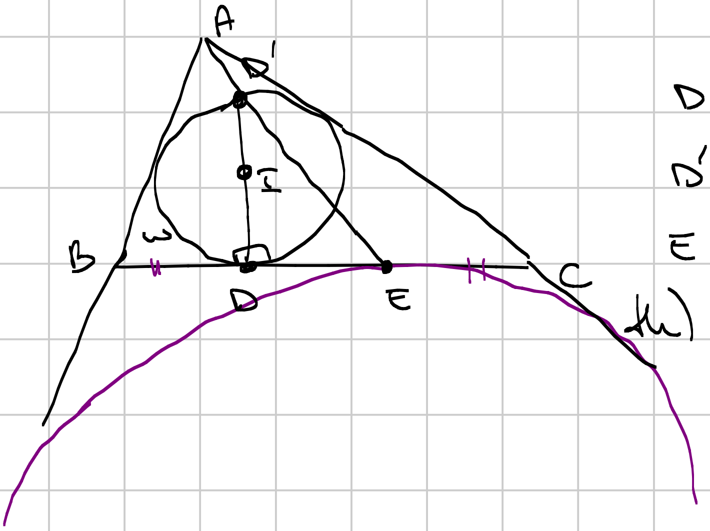
$B\hat{I}C = \pi - \beta/2 - \gamma/2$
$= \pi/2 + \alpha/2$

→ il centro di $\odot BPIC$ è $M = AI \cap \odot ABC$ (per i fatti di prima)

→ la crf di centro A e raggio AI è tangente $\odot BPIC$

→ tesi.

Lemma del diametro dell'inscritta



D pt. di tangenza di ω con BC

D' diametr. opposto in ω di D

$E = AD' \cap BC$

Th) E è il pt. di tangenza fra BC e la crf ex-inscritta relativa ad A

→ $CE = BD$

(Dimostrare per es con omotetia)

1. Sia ΔABC un triangolo. Dimostra che l'ortocentro di ΔABC è l'incentro del triangolo formato dai piedi delle altezze.

2. Sono date tre circonferenze $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ di raggi 6, 3, 2. Γ_1, Γ_2 sono tangenti esternamente in A, mentre Γ tange le altre internamente in A_1, A_2. Determina il raggio della cf circoscritta ad ΔAA_1A_2.

3. Sia ABC un triangolo e P un punto sulla circoscritta. Dimostra che i simmetrici di P rispetto ai tre lati di ABC sono allineati su una retta che passa per l'ortocentro H di ΔABC.

4. È dato ΔABC triangolo acutangolo. D, E, F sono i piedi delle altezze da A, B, C rispett., e ω è la cf circoscritta ad ΔAEF. Siano ω_1 e ω_2 le cf che passano per D e che sono tangenti a ω in E ed F risp. Dimostra che il secondo punto d'intersezione tra ω_1 e ω_2 sta su BC.

5. Siano C una cf, ℓ una retta tangente a C e M un punto su ℓ. Determina il luogo geometrico dei punti P tali che: esistono due punti Q, R su ℓ tc $MQ = MR$ e C è inscritta in ΔPQR.