SENIOR A3. MEDIUM

RICORSIONI FE

Titolo nota 05/09/2025

RICORSIONI:

$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$

$a_0 = \dots \quad a_1 = \dots$

$x^2 = \alpha x + \beta$

λ_1, λ_2 RADICI

$\lambda_1^{n+1} = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_1^{n-1}$

$\{x_n\}, \{y_n\} \qquad \{x_n + y_n\} \dots$

COSTANTI

$\{\lambda_1^n\} \quad \{\lambda_2^n\} \rightarrow$ SFRUTTIAMO IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI IN MANIERA OPPORTUNA

$l\lambda_1^n + k\lambda_2^n$

$a_{n+1} = \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_{n-1} + \dots \alpha_k a_{n-k+1}$

$\{\lambda_i^n\}$

$\dots \quad a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_k$

$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$

NON CI SONO RELAZIONI "STRANE" SE LE RADICI SONO DISTINTE,

COSA FACCIAMO SE SONO UGUALI?

$\lambda_1^n \qquad n\lambda_1^n$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + f(n)$

$f(n) = 2^n$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + 2^n$

$b_n = a_n + k2^n$

$a_n = b_n - k2^n$

$$b_{n+1} - 2n2^n = b_n - n2^n + b_{n-1} - \frac{n}{2}2^n + 2^n$$

$-\frac{n}{2}2^n \qquad n = -2$

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} + p(n)$$

$a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ \dots \ a_{2025} = 2025, \ a_{2026} = 2026$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-2025}$

DIMOSTRARE CHE ESISTONO 2018 TERMINI CONSECUTIVI IN $\{a_i\}$ MULTIPLI DI 2026

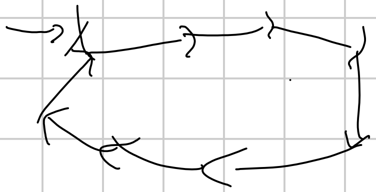
OSS — LAVORIAMO MOD 2026

$(v_1, v_2, \dots, v_{2026}) \to$ determina la successione

mi funzione definisce ho

$\to (v_2, v_3, \dots, v_{2027})$ SAPPIAMO INVERTIRLA

$\Leftarrow$ $\Rightarrow$ INIETTIVA



$(0, 0, 0, 0 \dots, k)$

Idea per iniettività andare indietro equivale ad andare in avanti sufficientemente

---

IMO 2018 / 2

$f(1) \quad f(2) \quad f(n)$

$n \geq 3 \quad \exists ? \quad a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$

$1 + a_i a_{i+1} = a_{i+2}$ Indici MODULO n $a_{n+1} = a_1$

LE SIMMETRIE: SE Ω HA UNA SOLUZIONE PER n $\{a_i\}$ Ω HA ANCHE PER kn

PRENDENDO $\{b_i\} = \{a_i\}$

$-1 \quad -1 \quad 2$

$|a_i \quad a_{i+1}|$ MOLTO GRANDE

$++ \to + \qquad -- \to + \qquad -+ \to +-$

$++$

$1 + a_i a_{i+1} = a_{i+2} \Rightarrow a_i \geq 1$

$\Rightarrow a_i \geq 2$

$+- \quad +-+$

ISL 2004

$a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$

$a_0, a_1 > 0 \in \mathbb{R}$

LIMITATA?

$+-+$

VOGLIAMO FAR VEDERE CHE È SEMPRE

$+--$

$\cancel{++}$ $+-+-+-$

$a_1 > a_3 > a_5$

$--+-+-- \to$ $\cancel{+}+$

$$a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$$

$a \quad b \quad c$

C'È UN PICCOLO ERRORE

SE FOSSIMO SU $\mathbb{Z}$

$\exists\, a_1 < a_2 < a_3 < a_n \ldots$

AVREMMO ILLIMITATA $\{a_i\}$

MA SU $\mathbb{R}$ NON È VERO !!

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{8} \ldots = 2$

~~LE SOMME PARZIALI~~ SONO CRESCENTI

$0 \quad x \quad x \quad \theta$

$a_n - a_{n-1} > \varepsilon > 0$

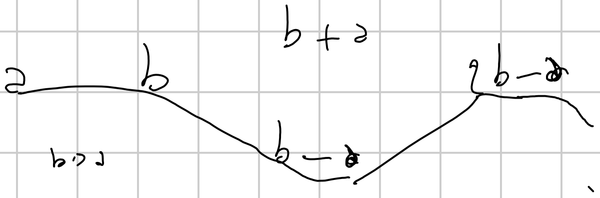
$\downarrow$ INDUCE

$a_n \geq n\varepsilon + a_0$

Idea scriviamo n per quadrati

$1 \quad \alpha \qquad \alpha = p/q \qquad \frac{1}{q}$

$|n\alpha - m| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$



$\varepsilon \quad b \quad a+b$

$b<$

EQUAZIONI FUNZIONALI

EQUAZIONE DI CAUCHY

$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \ell x$

$$f(1) = \ell 1$$

$$f(p/q) = \ell \frac{p}{q}$$

$$\frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q} = p = 1 + 1 + 1 \;\_\_\_\; + 1$$

$$f\left(\frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \dots}_{q-1}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right) = q f\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$= p f(1)$$

$+ \quad f(0) \qquad \in \qquad (x, -x) \to$

SIMILI CAUCHY

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 1 \qquad g(x) = f(x) + c$$

$$c = -1$$

$$f(x+y+1) = f(x) + f(y) \qquad g(x) = f(x+c)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \qquad g(x) = f(x) - x^2$$

SU $\quad \mathbb{R}$

$$f(a + b\sqrt{2})$$

$$= \ell a + u b$$

CHE IPOTESI POSSO USARE?

$f(x) = \ell x$

- CONTINUITÀ
- MONOTONIA $\qquad |\alpha - \frac{p}{q}| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon$

- LIMITATEZZA SU NESSUN INTERVALLO

$$f(x) > c \quad \text{su } x \in [a,b]$$

$$< c$$

- IL GRAFICO DELLA FUNZIONE NON PASSA PER UN RETTANGOLO

x $f(x)$

$x = y - f(y)$ $\qquad f(\cdot) = 0$

$$f(x + \cancel{f(y)}) = f(x+y) + \cancel{f(y)} \qquad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$$f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+y) + f(y) = f(x+y) + f(y) + f(x)$$

→ AMMAZZARE TERMINI $\qquad x + f(y) = y$

$x = y - f(y)$

$y - f(y) \le 0 \qquad f(y) \ge y$

$$g(x) = f(x) - x \geq 0 \qquad f(x) = 2x$$

$g(x) = x$

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + f(y)$$

$x + g(y) + y$

$$g(x+y+g(y)) + \cancel{x+y} + \cancel{g(y)} = g(x+y) + \cancel{x+y} + g(y) + y$$

$$g(x+y+g(y)) = g(x+y) + y \qquad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_{\ge 0}$$

$f(x) = 2x \qquad g(x) = x$

$x+y=z$

$$\underline{g(z+g(y))} = g(z)+y$$

INIETTIVITÀ $\to$ NO

$y=a$ $\quad$ $y=b$ $\qquad$ $z \geq a,b$

$$g(z+b) = g(z)+b$$

$$g(z+g(a)) = g(z+g(b))$$

$z \geq a,b$

$$\underbrace{g(z)+a+b}_{=} = g(z+g(a+b))$$

$$g(z+g(a))+b$$

$$=$$

$$g(z+g(a)+g(b))$$

$g(z)+b = g(z+g(b))$

$$g(a)+g(b) = g(a+b)$$

DISU FUNZ.

y MOLTO GRANDE

$$f(x+y) \geq yf(x)+f(f(x)) \qquad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$$x+y = f(x)$$

$$y = f(x)-x \qquad x \geq f(x)$$

$$x+y \geq f(x+y) \geq yf(x)+f(f(x))$$

y È MOLTO LIBERA $\to$ SFRUTTIAMO CHE LA DISU È $\forall y$ FISSATO x

$$x \geq y(f(x)-1)+f(f(x)) \qquad f(x)>1 \to \text{RESTITUISCO } y \gg x \text{ ASSURDO}$$

$$f(x+y) \geq y f(x) + f(f(x))$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

$$\to \geq 1 + ff(x) \leq 1$$

BMO 3 | 2025 $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x + y f(x)) + y = xy + f(x+y)$$

$(x,0) \to f(x) = f(x)$

$(0,y) \to f(y f(0)) + y = f(y)$

$(1,y) \to f(1 + y f(1)) + \cancel{y} = \cancel{y} + f(1+y)$

$(x,x) \to f(x + x f(x)) + x = x^2 + f(2x)$

sym (x,y) (y,x)

$$f(x + y f(x)) + y = f(y + x f(y)) + x$$

$(x,-x) \to f(x - x f(x)) - x = -x^2 + f(0)$

NON E' IMPORTANTE SOLO CHE SOSTITUIAMO VALORI SPECIFICI MA ANCHE VALORI CHE CI DANNO DELLE UGUAGLIANZE BELLE

$$f(x) = c$$

ASSUMO $\exists\, x_0 \quad f(x_0) = 0$

$$LHS = 0+y = x_0 y + f(x_0+y)$$

$$y \to y - x_0$$

$\to x_0$ ABBIAMO RISOLTO IL PROBLEMA

$$\boxed{f(x + y f(x)) + y = xy + f(x+y)}$$

$$f(\ldots) = xy - y + f(x+y)$$

$$f(\ldots) = -x^2 + x + f(0)$$

$$\underline{x\,(\cancel{x}+1)} + f(0)$$

$$x + y = C$$

$$y(x-1) + f(C)$$

$$y = C - x$$

$$(C-x)(x-1) + f(C)$$

SE $\exists C \;\; f(C) \geq 0 \Rightarrow \exists x_0 \;\; f(x_0) = 0$

$$f(x + y\,\underline{f(x)}) = \underline{f(x+y)} + xy - y$$

SFRUTTIAMO $\exists C, f(C) \geq 0$

$$y = y f(x)$$

$$f(x+y\,f(x)^2) = \underline{f(x+y\,f(x))} + xyf(x) - yf(x)$$

$$= f(x+y) + xy - y + xf(x)(xy-y)$$

$$= f(x+y) + (1+f(x))(xy-y)$$

$$\downarrow \quad f(x+y\,f^n(x)) = \underline{f(x+y)} + (1+f(x)+\dots+f^{n-1}(x))(xy-y)$$

$|f(x)| > 1$

DIVENTA ARBITRARIAMENTE GRANDE

$(xy-y) \neq 0$ $\qquad x \mid f(x) \leq -1$

$f(x) \geq 0 \implies \exists x_0 \quad f(x_0) = 0$

$$\boxed{D + t(n)c}$$

$\exists n \mid t(n) > M \quad \forall M \in \mathbb{R}$

$\exists \mid t(n) \leq M \quad \forall M \in \mathbb{R}$

PRENDIAMO $\quad t(n)c \gg |D|$

Weyrgiston 2012 $\qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(f(x)^2 + f(y)) = x f(x) + y$$

$$f f(x) = x$$

$$f(\qquad\qquad) = f(\qquad\qquad)$$

$$x^2 + f(y) = f(x)^2 + f(y)$$

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ISL A3 2017 $\quad S$ insieme finito $\quad f : S \to S$

$$\in \forall g \neq f$$

$$\forall x \in S \quad g(f(g(x))) \neq f(g(f(x)))$$

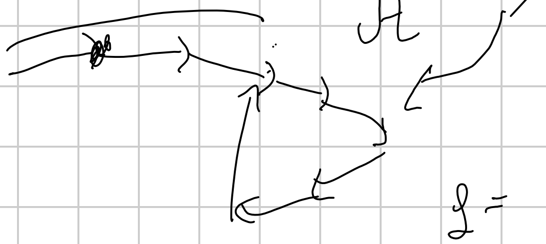
TESI $\quad f(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Im} f) \qquad f|_{\mathrm{Im} f}$ è bigettiva

$$\{ a \in S \mid \exists x \;\; f(f(x)) = a \}$$

$$= \{ a \in S \mid \exists x \;\; f(x) = a \}$$

$$g f g(x) \neq f g f(x) \quad (\exists x \quad \text{se } g \neq f)$$

$$f(x) \neq f(f(x))$$



$\mathcal{A}$

$f^n = f^m$

$fgf \neq gfg$

$n \neq m$

$g =$ $\boxed{g \neq f^{(m-n)k}} \neq f$

$g = f^n$

$f^n(x) = f(x)$ IMMAGINA DI TEST

$f(f^{n-1}(x)) = f(x)$

$\cancel{m-n}$

$n = (m-n)l + 1$

$f^{2n+1} = f^{n+2}$

$m-n+1$

$2n+1-(n+2) = \boxed{n-1}$

$\boxed{n-1 = (m-n)l}$

$n = (m-n)l + 1$

$f^n = f$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$\boxed{f(m+n-f(n)) = f(m) + f(n)}$$

$m = f(n)$

$\cancel{f(n)} = f(f(n)) + \cancel{f(n)}$

$f(f(n)) = 0$ SE NELL'IMMAGINE FA 0

$f\ \cancel{f(n+1)}$

$f(0 + f(n) - \overset{0}{ff(n)}) = f(0) + \overset{0}{f(f(n))}$

$ff(n) = \dots$

$0 = f(0)$

$\underline{f(m+f(n)) = f(m)}$ PERIODICITÀ

n_1, n_2 ... $f(n_1) \neq 0$ ~~$f(n_2)$~~

$f(n_2)$

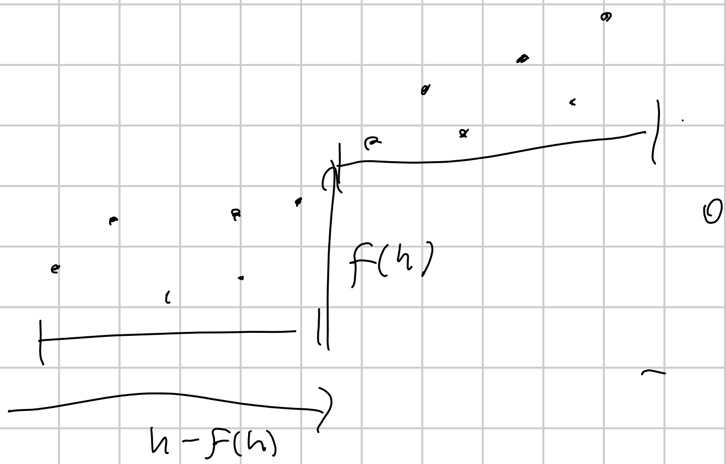
$f(n_1) = \lambda f(n_2)$

$$f(m+n-f(n)) = f(n) + f(m)$$

$$f(m+n) = f(n) + f(m)$$

$f(n)$

E' UN PERIODO



IMO 2 2017

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$

sol $0,\ x-1,\ 1-x$

$(x, x-1)$

$$f(f(x)f(x-1)) + f(2x-1) = f(x^2-x)$$

$x+y = xy \qquad y = \left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$f\left(f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0 \qquad f(f(0)^2) = 0$$

$c \mid f(c) = 0$

$\cancel{f(0)} + f(\underset{0}{c}) = \cancel{f(0)}$

$f(0) + f(c+1) = f(c)$

0

$f(0) = -f(c+1)$

$f(0) + f(x+c) = f(xc)$

$x = \frac{c}{c-1} \to f(0) = 0$!!

$f(1) = 0 \to$ INIETTIVITA' IN 0

$f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$

$f(0)^2 = 1$

$f(0) = \pm 1$

$f(0) = 1$

$f(0) + f(x+1) = f(x)$

$f(x+1) = f(x) - 1$

$f(x+n) = f(x) - n$

$y = 0 \to f(f(x)) + f(x) = f(0)$

$f^2(x) = 1 - f(x)$

$1 - f^2(x) = f(x)$

$f^2(x) = -f(x+1)$

$fff(x) + ff(x) = 1$

$f^3(x) + f^2(x) = 1$

$f^3(x) = f(x)$

INIETTIVITA'

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

INIETTIVITÀ IN 1

$xy = t+1$
$x+y = t$

$f(x+1) = f(x) - 1$

$f(a) = 1$
$f(a+1) = 0$

$f(a) = f(b)$

$x+y = a+1$
$xy = b$

$x+y = b+1$
$xy = a$

$f(\qquad) = 1$

BUCA L'INIETTIVITÀ IN 0

$f(\underset{0}{\underset{\parallel}{\qquad}}) = 1$