

SENIOR 25 - C1 MEDIUM

COMBINATORIA GEOMETRICA

@VER
22
ALBIREO

Vero

BMO 2010 - 3

Abbiamo # finito di pti nel piano.

Ogni terna è contenuta in una striscia
larga 1.

[III]: $\exists$ striscia larga 2 che contiene
tutti i punti

Dim

oss: La striscia più piccola che contiene 3 punti (=triangolo)
è $\perp$ all'altura minore

(Deve contenere i lati, esercizio)

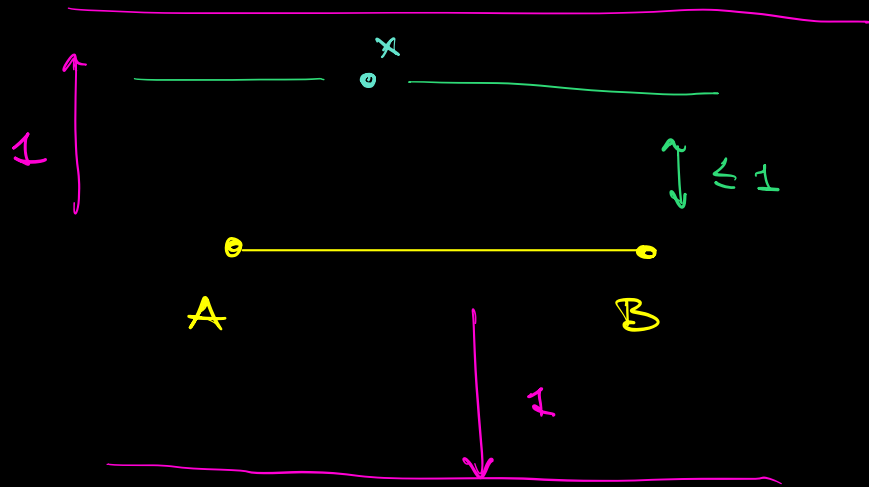
Vogliamo costruire la striscia di larghezza 2:
come facciamo?

PRINCIPIO dell'ESTREMALE:

Spero è molto utile
considerare "oggetto più
grande / piccolo".

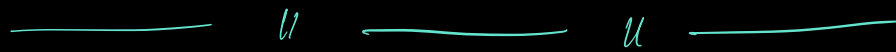
Tra tutti i punti scelgo A e B t.c. la loro distanza $d(A, B)$ è massima

$\forall$ p.to x , il triangolo ABx ha AB come lato più grande



È contenuto in una striscia di larghezza $1 \parallel AB$

Sono tutti contenuti in una striscia larga 2



IMO 2013-2

Sol:

CONFIGURAZIONE
COLORATA

m pti rossi

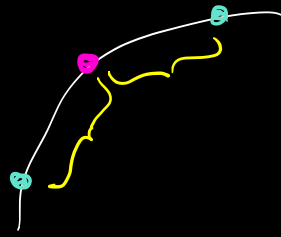
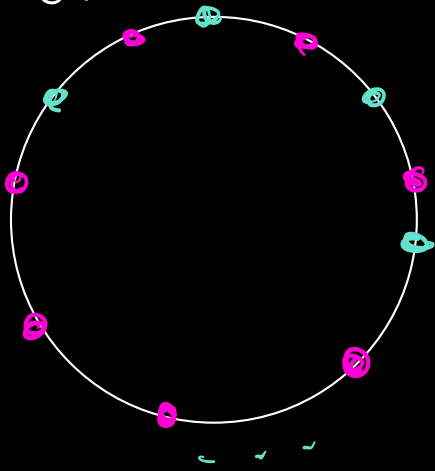
nel primo

$(m+1)$ pti Blu

mai 3 allineati

Penso tracciare le rette (non passanti per i punti) e voglio che separino i punti blu da quelli rossi. Qual'è il minimo k ?

Consideriamo:



Deve sempre tagliare
gli archetti

2m archetti

li servono n rette

$$\Rightarrow \overline{ke} \geq n$$

Altro verso: Restruamo due n bastano

#1: Usiamo 2 rette per isolare 2 punti



2 rette // alla congiungente separano i 2 punti
(perché mai 3 allineati)

$\Rightarrow$ Per n punti finisce

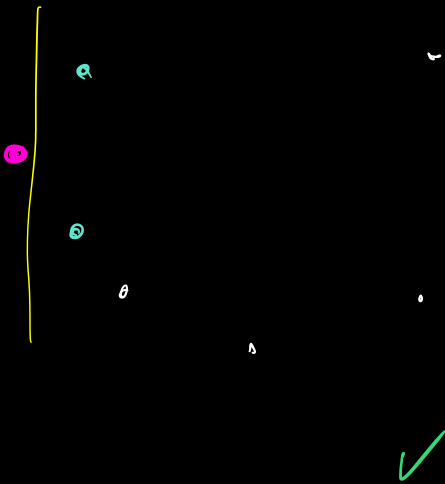
! n disposti e più interessanti

ESTREMALE: Considero l'involucro convesso dei punti
(CONVEX HULL)

Il più piccolo poligono
convesso che contiene
tutti i punti

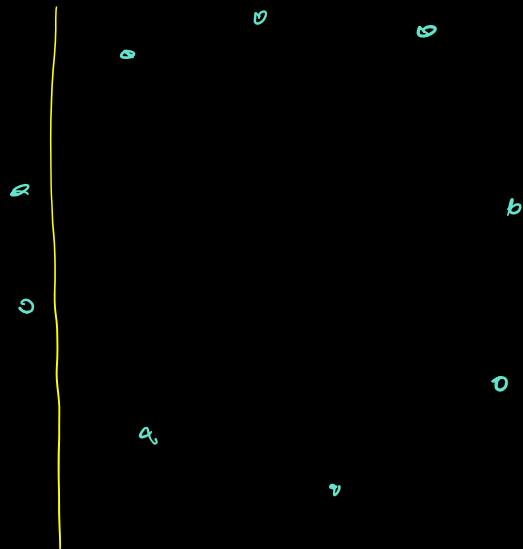
Ponderemo i pti sul bordo:

CASO 1



CASO 2

, sono tutti blu



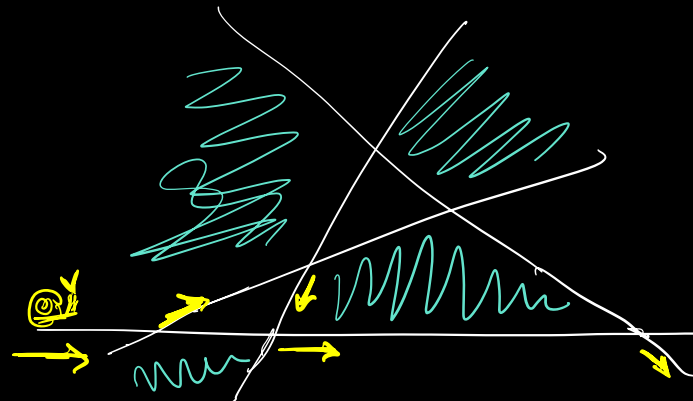
Restano $n-1$ pti blu
e $n-1$ rette
($n-1$ è pari)



EGMO 2017 - 3

Ho 2017 rette, mai 3 a 3
concorrenti.

La lemma di Wallace si applica
ad un segmento (interno) e sta
andando in una certa direz.



Ad ogni incrocio va a dx e sx
alternando.

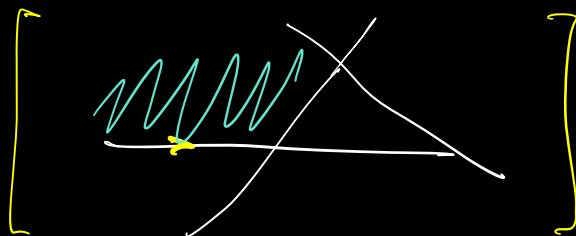
È possibile che Turbo percorra
lo stesso segmento un 2 volte
diverse?

Proviamo con 2, 3, 4 rette ... La risposta è NO.

COLORAZIONI!

Coloro a "scacchiera" (perché sono forti?)

Turbo ha sempre una zona  a sx



⇒ La direzione in cui il segmento è percorso
è INVARIANTE.

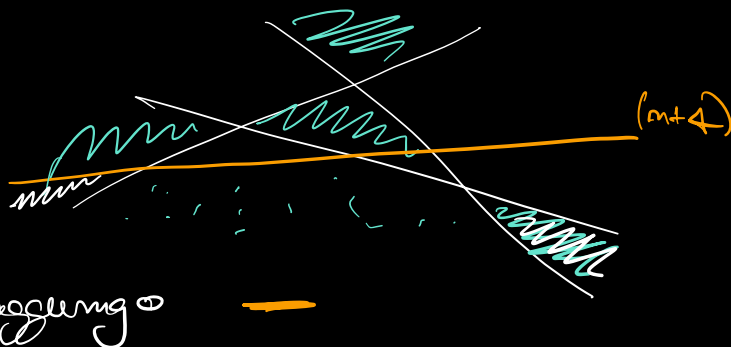


PERCHÉ LA COLORAZIONE ESISTE?

Modo 1: Induzione

PB: facile

PI: Quando aggiungo



hanno i colori uguali in
un semipiano e l'opposto
dell'altro

Lemma 2: Ogni retta divide il semipiano in 2:

Solo un lato $+$ e un lato $-$

Il colore di una regione è determinata da una retta per
ciascuna retta

1 Se $\# +$ è pari

2 Se $\# +$ è dispari

Ogni regione ha un colore definito

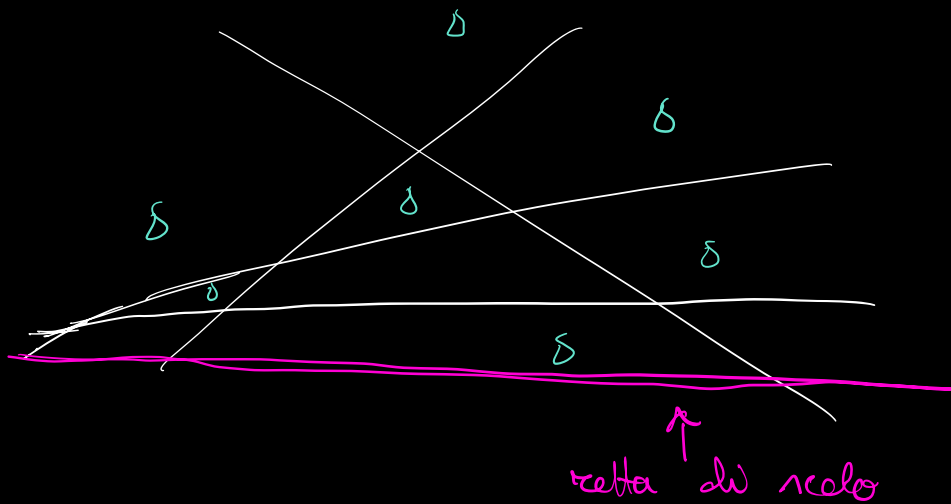
Due regioni adiacenti non hanno mai lo stesso
colore.



(a) n rette in posizione generica. In quante regioni
dividono il piano?

(b) n punti nello spazio in posizione generica:
In quante regioni dividono lo spazio?

☀ Scegli una direzione verticale ↓



letto una goccia d'acqua in ogni regione

1) Cade nel

2) Cade all'

- 1) Ogni regione ha un unico pt. di scolo, e ogni intersezione è pt. di scolo di una sola regione.

$$\binom{m}{2}$$

- 2) Le gocce delle regioni di tipo 2 cadono su una "retta di scolo"

Questa viene divisa in $m+1$ "regioni"

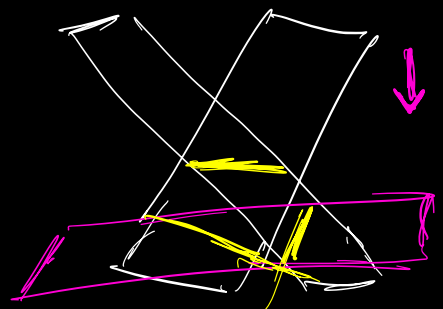
$$\binom{m}{1} + \binom{m}{0}$$

⇒ In tot. $\binom{m}{2} + \binom{m}{1} + \binom{m}{0}$

(b) Con i panni?

Stessa idea delle gocce d'acqua

TIPO 1: l'acqua si ferma all'intersezione di 3 panni



$$\binom{n}{3}$$

TIPO 2: Retto in "puerto di volo"



Ogni puerto "originale" interseca il puerto di volo in una retta

⇒ n rette

⇒ È il problema di prima!

$$\Rightarrow \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

— ~ — ~ —

IMO 2011-2 "Rubens a vento"

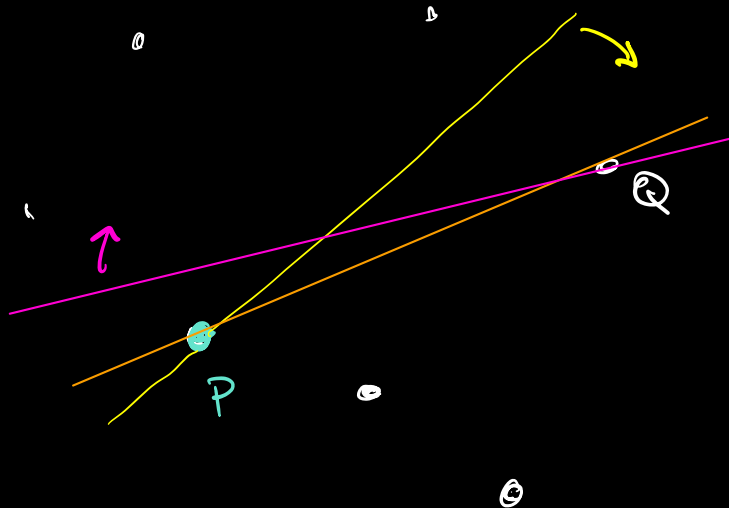
[3 BLUE & BROWN
ci ha fatto un
nucleo]

Hai # fonte di punti nel puerto,
noni 3 a 3 eliminati.

Scegliamo P e una retta
 l (per P)

MOLINO A
VENTO

P PIVOT
la retta
attorno a P
con senso ↻



Quando trova
 Q , lascia P
 e prende Q
 come PIVOT



Quindi
 cosa procede
 all' ∞

[T+4]: $\exists (P, l)$ t.c. il mulino a vento tocca tutti i
 punti ∞ volte?



Trovare un' invariante

"La direz. della rotta gira con continuità di 360° ."

Coloro di senso i pt. a "destra" della rotta e di blu
 i punti a "sinistra"

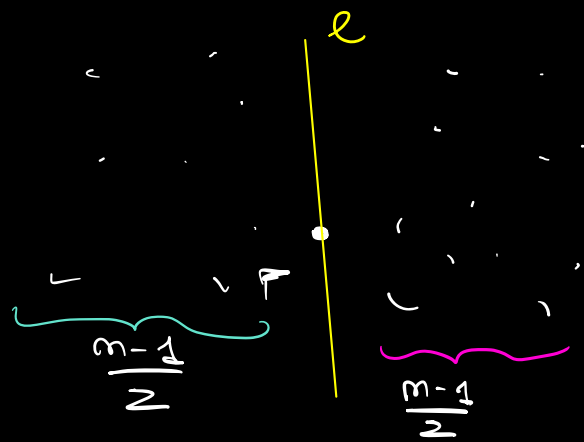
"Se un pt cambia colore è stato usato come
 PIVOT."

Esercizio: # pt. rossi e # pt. blu è invariante.

CASO 1: n disperi



Posso scegliere P ed l in
 modo da avere metà pt blu
 e metà pt rossi all'interno.



→ Cosa succede dopo 180° ?

La rotta sarà sempre P come prima!
(E' il l e deve dividere $\frac{n-1}{2} R$ e $\frac{n-1}{2} B$)

Tutti i punti hanno cambiato colore (e quindi tutti i punti sono stati toccati!)

CASO 2° Generalizzare al caso pari
Esercizio (NON È DIFFICILE :))

———— " ————— " —————

ESISTENZA (NON COSTRUTTIVE)

~Q " Dimostrare che esiste... "

" Determinare se esiste... "

MODO 1: Trovare un esempio.

(Mostrare che l'esempio abbia le propr. richieste!)

MODULO 2: Dimostrare che esiste in qualche modo
più astratto.

Es. PIGEONHOLE (banale)

GRAF1

$$G = (E, V)$$

Def (GRADO): $\deg v = \# \text{ archi uscenti}$

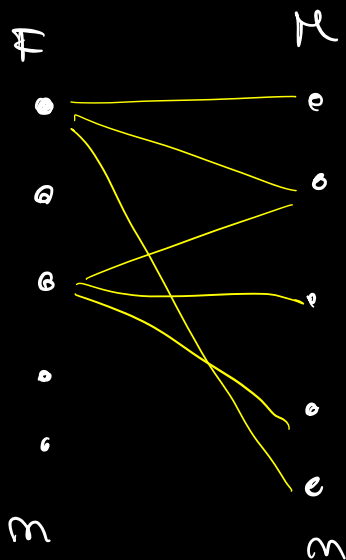
$$\sum \deg v = 2 \cdot \# \text{ archi}$$

Def (GRAF1 BIPARTITI)

Se $V = V_A \cup V_B$ ^{pti rossi} ^{pti blu} t.c. ci sono

archi solo fra $a \in V_A$ e $b \in V_B$

Setting (Hall theorem - Lemma dei matrimonio)



$$|F| = |M| = n$$

Ogni v ha $\deg v = k$

Voglio organizzare dei matchings
perfetti.

n coppie tutte compatibili

Si può fare?

TEOREMA (HALL, LEMMA dei MATRIMONI)

G GRAFO BIPARTITO

$$V = A \cup B$$

$$S \subseteq A \quad \Gamma(S) := \{x \in B \mid \exists y \in S \text{ collegato a } x\}$$

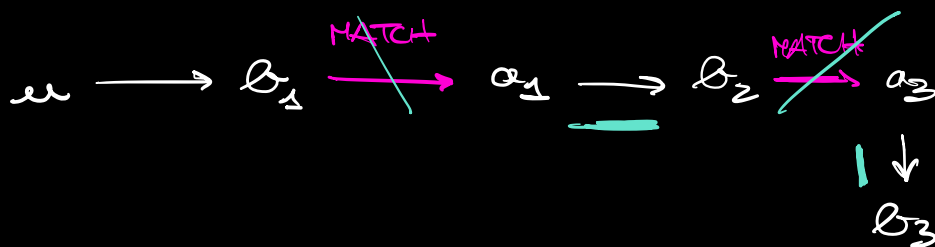
Se $\forall S \subseteq A$ vale $|S| \leq |\Gamma(S)|$

$\Rightarrow \exists$ matching perfetto.

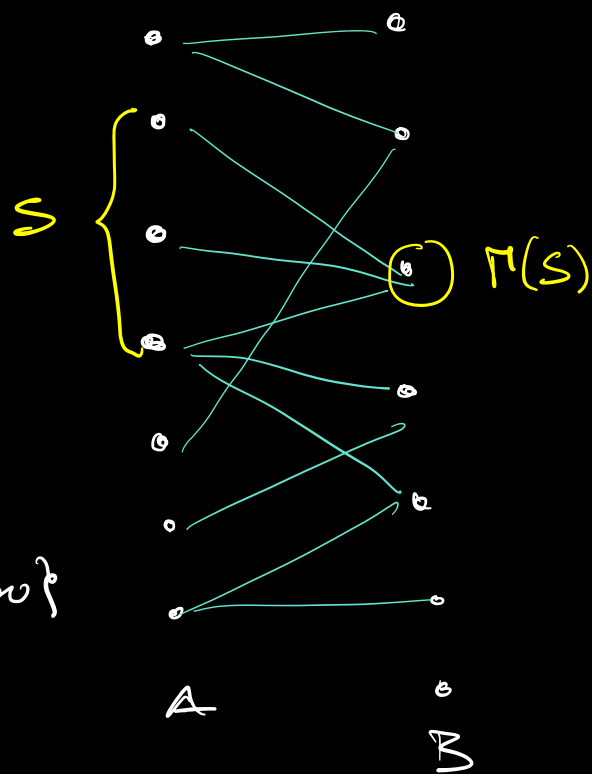
Demo

Prendo un matching M che ha cardinalità massima.

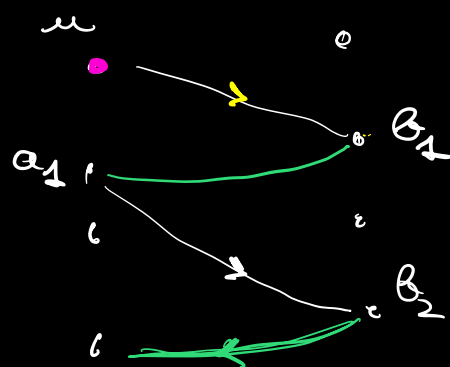
Se per assurdo M non copre tutto A : $\exists u \in A$ non matchata.



$\tilde{A} \subseteq A$ più raggiungibili con cammini alternanti da u .



Δ Se $|B| \geq |A|$ ogni elemento di A è collegato ad almeno 1.



$\tilde{B} \subseteq B$ pts in B raggiungibili con
cammini alternanti da u .

Se trovo un cammino alternante che termina in B
in uno non matchato posso riorganizzare tutti
i matching (invertendo i colori di matching) e
ho matching più grande.

CLAIM: $\tilde{B} = \Gamma(\tilde{A})$

- $\tilde{B} \subseteq \Gamma(\tilde{A})$ dalla def. di $\Gamma()$

$b \in \tilde{B}$



Ci sono connessi con un
cammino alternante da u

$u \rightarrow \dots \rightarrow a \rightarrow b$

$\cap$
 $\tilde{A}$

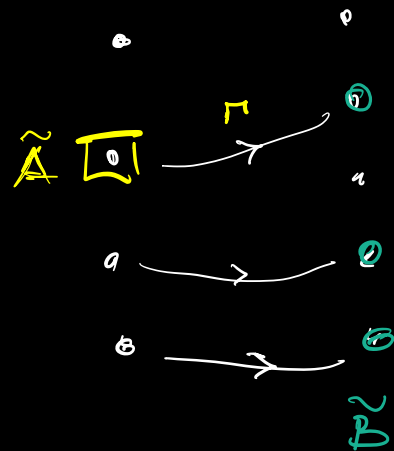


$a \in \tilde{A}$

Perché a e
 b sono
connessi



$b \in \Gamma(\tilde{A})$

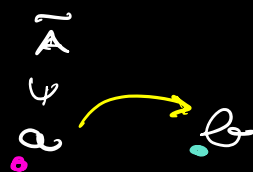


perché ci sono
con un cammino
alternante da u

HOPE:

- $\Gamma(\tilde{A}) \subseteq \tilde{B}$:

Se $b \in \Gamma(\tilde{A})$: $\exists$ arco



$\Rightarrow$ Posso raggiungere a partendo da u ($a \in \tilde{A}$) con un cammino alternante

$\Rightarrow$ Posso raggiungere anche b ! $\Rightarrow b \in \tilde{B}$

$\Rightarrow \Gamma(\tilde{A}) \subseteq \tilde{B}$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma(\tilde{A}) = \tilde{B}}$



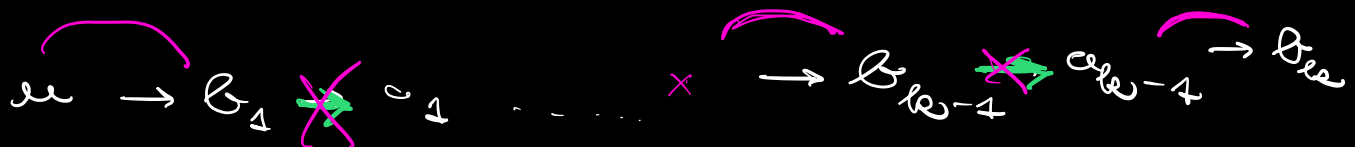
HP: $|\tilde{B}| = |\Gamma(\tilde{A})| \geq |\tilde{A}|$

$u \in \tilde{A}$ è non matchato

$\Rightarrow$ Anche in $\tilde{B}$ c'è un non-matchato

(a è anche raggiungibile con un cammino alternante!)

Considero questo cammino: inverta tutti i matching



- la matching

+ la matching

$\Rightarrow$ # matching è aumentata, contro l'ipotesi che fosse il massimo!



TEOREMA di HALL (VERSIONE FORTE)

G GRAFO BIPARTITO $V = A \sqcup B$

Jemo m

$\forall S \subseteq A$ vale $|S| \leq |N(S)| + \underline{m}$

$\Rightarrow \exists$ (accoppiamento di coppie) con $|A| - m$ persone

(NON si riesce a fare di meglio se $m \neq \text{sharp}$)

m sharp: $\exists S \subseteq A$ t.c. $|S| = |N(S)| + m$
(Ho preso il minimo m che funziona)

Dim

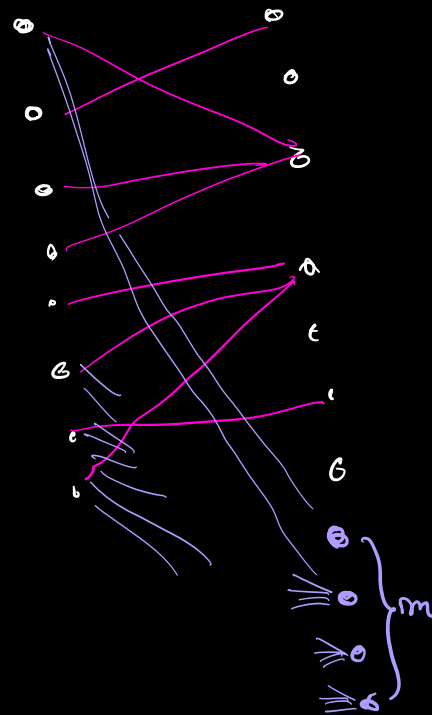
Aggiungo m "ragazze fantasma",
compatibili con tutte

$$G': E' = E \cup \overline{E_2}$$

$$|N'(S)| \geq |S|$$

$\Rightarrow$ La condizione di Hall deve
essere verificata.

$\Rightarrow$ Trovo il matching.



⇒ m ragazze sono state sfatinate e si sono
beccate il ragazzo fantasma

⇒ Ho trovato un matching vero per tutte tranne
m ragazze.

Esercizi

[0]: TABELLA $m \times n$: ci sono alcune paperelle in alcune
celle

Sono k in ogni riga, k in ogni colonna.

È possibile scegliere m paperelle in modo che
ce ne sia 1 per riga e una per colonna?

[1]: 52 carte.

Quadruplo in 13 mazzette di 4 carte ciascuno?

a) Posso scegliere una carta da ogni
mazzetto in modo che sono

A - 2 - 3 - 4 - _____ - J - Q - K ?

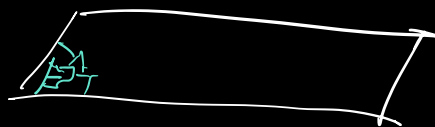
b) Tutte queste riesco a farlo da nuovo?

c) Posso farlo ancora da nuovo?

[2] Due fogli di carta, di area 2025.

Come si può dividerli in poligoni di area 1.

Posso mettere 2025 spilli in modo che ogni poligono sia bucato?



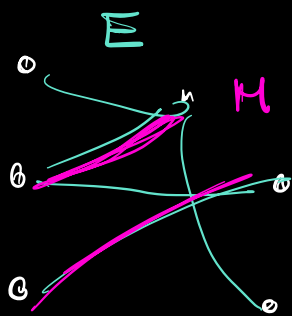
—— // —— //

Def (MATCHING): $G = (V, E)$

$M \subseteq E$ gli archi in M sono
DISGIUNTI

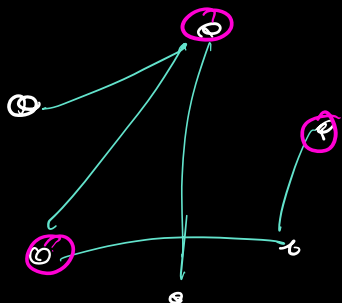
||

Non ci sono archi che hanno un vertice in comune.



Def (COVERING): Scelta di alcuni vertici $C \subseteq V$

ts. $\forall$ arco $e \in E$ almeno uno dei suoi estremi e in C



FATTO: G grafo, M matching, C covering
 $|M|$ $|C|$

$$|M| \leq |C|$$



archi in M disgiunti: $\forall$ arco c'è almeno un vertice in C

$\max_{\text{al numero tra i matching}} |M| \leq \min_{\text{al numero tra i covering}} |C|$

TEOREMA (KÖNIG): G grafo bipartito (finito)

$\exists$ matching M e $\exists$ covering C
 t.c. $|M| = |C|$

Dim

$$m := \max \{ |S| - |\Gamma(S)| \text{ t.c. } S \subseteq A \}$$

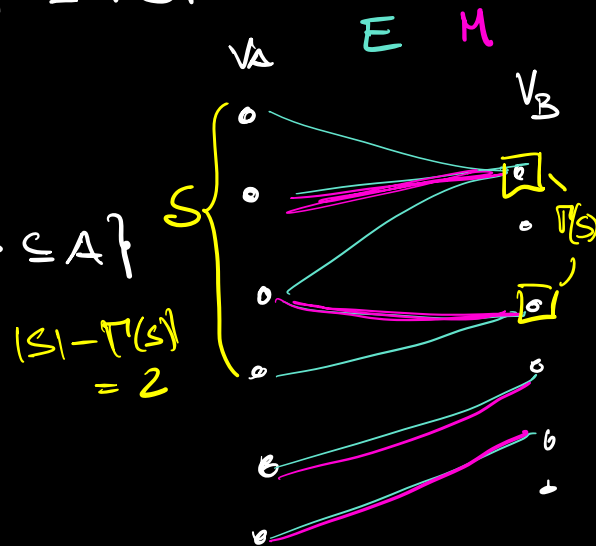


$$\forall S \quad |S| \leq |\Gamma(S)| + m$$

↓ (Hall forte)

otengo un matching con $|A| - m$

(SO ANCHE CHE Questo è il matching massimo)



Ora voglio trovare un covering C che ha la stessa cardinalità

💡 Covering minimale $\rightarrow$ voglio meno pti possibile

$$C := A \setminus S_{\max} \cup \Gamma(S_{\max})$$

$$\downarrow$$

$$S_{\text{t.c.}}$$

$$|S_{\max}| - |\Gamma(S_{\max})| = m$$

$$|C| = |A| - |S_{\max}| + |\Gamma(S_{\max})|$$

$$= |A| - m$$



— ~ — ~ —

POSET = "PARTIALLY ORDERED SET"

Def (RILAZIONE D'ORDINE):

$(S, \leq)$

0) $a \leq a \quad \forall a$ (RIFLESSIVA)

1) $a \leq b$ & $b \leq a \Rightarrow a = b$

(ANTI SIMMETRICA)

2) $a \leq b$ & $b \leq c \Rightarrow a \leq b \leq c$

$["a < b" = a \leq b \text{ e } a \neq b]$ (TRANSITIVA)



NOTA BENE: Nessuno mi costringe a dire
che " $a \leq b$ " o " $b \leq a$ "

PUÒ ESSERE CHE NON SONO CONFRONTABILI!

Se la relazione d'ordine rende sempre confrontabili
si chiama ORDINE TOTALE.

ESEMPIO: $(\mathbb{R}, \leq)$

ESEMPIO 1: Finito S insieme

$(P(S), \subseteq)$ è POSET

↑
PARTI

Insieme dei
sotto-insiemi
di S

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$$

$$\{1\} ? \{2\}$$

$$\{1, 2\} ? \{2, 3\}$$

1 BIS

$(P(S), \prec)$

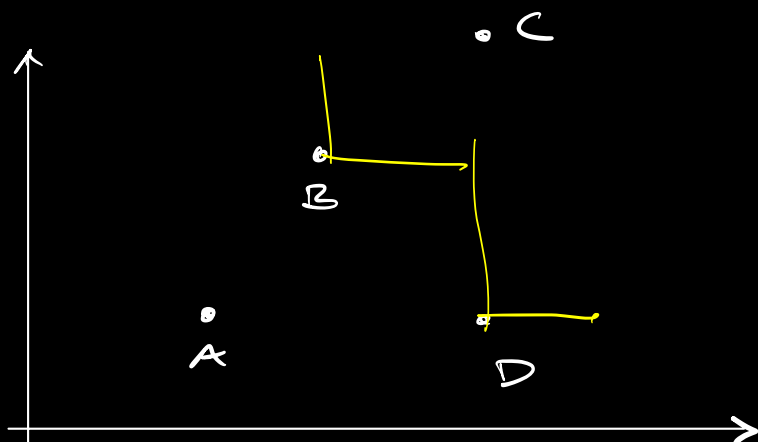
$$A \prec B$$

$$|A| \leq |B|$$



ESEMPIO 2: $(\mathbb{R}^2, \leq)$

$$(a, b) \leq (c, d) \iff \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$$



$C \geq$ tutti

$A \leq$ tutti

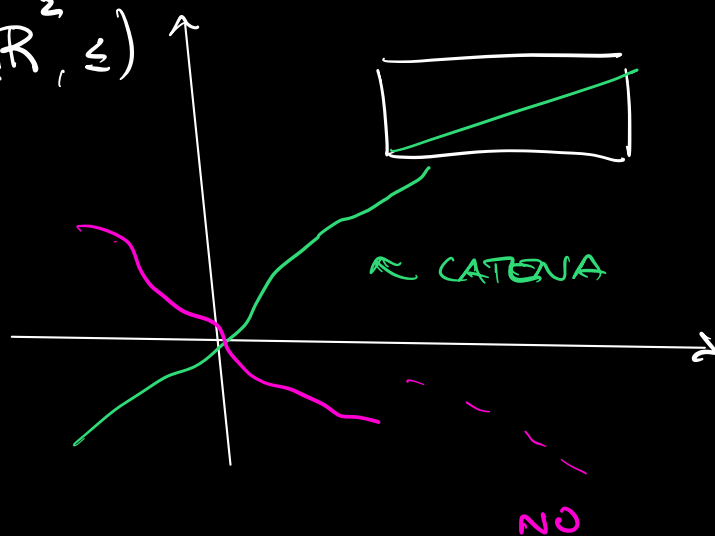
B, D NON SONO confrontabili

Def (CATENA): una catena è " $a \leq b \leq c \leq d \leq \dots$ "
in un sottoinsieme $C \subseteq S$ tale che ogni coppia di
elementi di C è confrontabile.

Esercizio 1: $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$: quanto è lunga la
catena più lunga?

Esempio 2:

$(\mathbb{R}^2, \leq)$



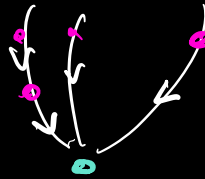
Def (ANTICATENA): $\emptyset$ un sottoinsieme $A \subseteq S$ t.c.

$\forall x, y \in A$ x, y NON sono
confrontabili

Es.: $P(\{1, 2, 3, 4\}) \supseteq \left\{ \begin{array}{l} \{1, 2\}, \{2, 3\} \\ \{1, 3\}, \{2, 4\} \\ \{1, 4\}, \{3, 4\} \end{array} \right\}$ ANTICATENA

Def (MINIMALE): S POSET, $x \in S$ è MINIMALE se
non esistono elementi più piccoli

Def (MINIMO): $x \in S$ è minimo se è più piccolo di tutti



? Quante catene mi servono per ricoprire
 $P(\{1, 2, 3, 4\})$?

→ Almeno 6!

(Ho trovato un'anticatena lunga 6)

💡 (Due elementi di un'anticatena stanno in
catene diverse)

? Quante anticatene mi servono per ricoprire
 $P(\{1, 2, 3, 4\})$?

Almeno 5: lunghezza della catena più lunga.

($\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$)

TEOREMA (MINSKY, 1971):

S POSET finito

Se $m = \text{card. massima di una catena}$

$\Rightarrow \exists$ un ricoprimento con m antichette

TEOREMA di DILWORTH (1950)

S POSET finito

$m = \text{card. massima di una antichetta}$

$\Rightarrow \exists$ ricoprimento con m catene.

Dim (MINSKY)

Sappiamo che la catena più lunga è lunga m

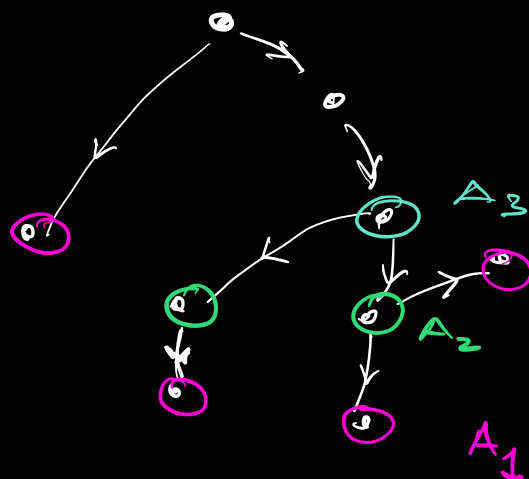
$A_1 = \{ \text{tutti i minimi} \}$

A_1 è antichetta!

Concetto A_1

Chiamo A_2 i nuovi minimi

A_2 è antichetta



Ripeto: cancello A_2

$$A_3 = \{ \text{nuovi nuovi/vecchi} \}$$



Ad ogni step accorriamo ogni catena di 4

$\Rightarrow$ Dopo m step: $\begin{cases} \text{non ci sono più elementi} \\ \text{ho creato } m \text{ anticatene} \end{cases}$

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$



Ques (DILWORTH)

m cat. massima di una anticatena.

Voglio creare m catene.

Costruisco un grafo bipartito con 2 copie di S

$$V_A = S \quad V_B = S$$

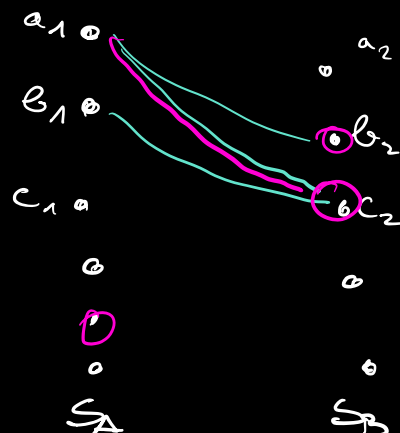
Andrei tra $x \in S_A$ e $y \in S_B$ se $x > y$

$$G = (V_A \cup V_B, E)$$

(KÖNIG) $\Rightarrow$ M matching e covering C
 $\begin{matrix} \cap \\ C \\ E \end{matrix}$ $V_A \cup V_B$

$$\text{t.c. } |C| = |M| = \underline{e}$$

$$|S| = n$$



C covering : $Z := \{x \in S \mid x \notin C \text{ né in } S_A \text{ né in } S_B\}$

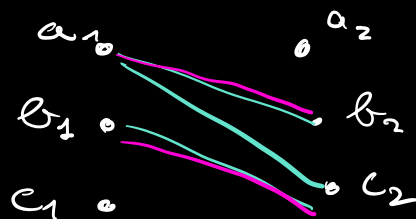
- $|Z| \geq m - l$

- In Z ogni coppia non ha archi in E
(Se ci fosse un arco almeno uno dei due estremi sarebbe in C)

$\Rightarrow Z$ è una anticatena!
È lunga almeno $m - l$

M matching : Costruisco un ricoprimento con $m - l$ catene
(M matching massimale)

Parto da un punto in S_A
e seguo il matching fino a
quando ho un punto in S_A
NON MATCHATO.



Il matching è lungo l : ho l "pti di partenza"
in S_A

$\Rightarrow$ me ne scartano fuori $m - l$

$\Rightarrow$ Ho $m - l$ spazzettamenti

$\Rightarrow$ Ho $m - l$ catene



PROBLEMA

Ci sono 2024 persone con peso e altezza diversi.

Allora vale una delle due:

(i) $\exists$ 120 persone che sono in ordine crescente di altezza e peso.

(ii) $\exists$ 15 persone che sono in ordine crescente di altezza e decrescente di peso.

Sol: Fattore 2023.