C2 Medium - Max Foschi

Titolo nota 04/09/2025

Algoritmi greedy e grafi

Parte I. Algoritmi greedy

"Greedy" in inglese significa "avido", detto di una persona che vuole accumulare tutto e subito.
Un algoritmo greedy segue il principio che è "meglio un uovo oggi che una gallina domani".

- Vantaggi: è facile da descrivere perché guarda il problema localmente; lo vedo come muoversi su un grafo a cercare un massimo locale
- Svantaggi: non tiene in considerazione tutto

Le due questioni da comprendere sono:
- Cosa significa "greedy" in un determinato contesto?
- Come faccio a capire quanto è buono un algoritmo greedy?

(1) Dimostrare che ogni numero naturale può essere scritto in un unico modo come somma di Fibonacci non consecutivi, dove (notazione non standard): $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per $n \geq 3$.

Fissato n, sia k t.c. $F_k \leq n < F_{k+1}$. Usiamo F_k e vogliamo dire che $n - F_k$ si scrive unicamente come somma di Fibonacci non consecutivi (ipotesi induttiva) che siano $\leq F_{k-2}$.
Ma $n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \Rightarrow$ tutti i Fibonacci usati dovranno essere $< F_{k-1}$ e quindi $\leq F_{k-2}$.

Come dimostrare l'unicità?
Mi basterà dimostrare che, se $n \in [F_k, F_{k+1})$, allora F_k deve comparire nella scrittura come somma di Fibonacci non consecutivi.
Mi basterà dire che la somma di Fibonacci non consecutivi

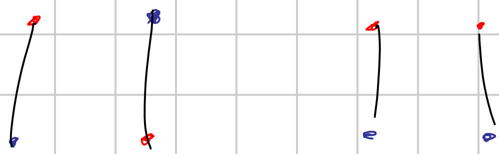
SF_{k-1} è troppo piccola

i.e. $F_{k-1} + F_{k-3} + F_{k-5} + \dots < F_k \iff$

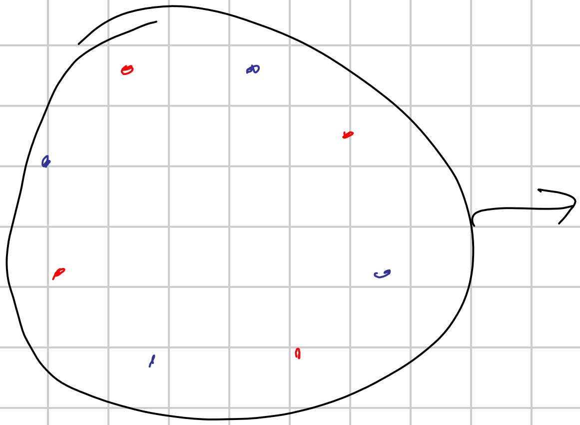
$$F_{k-3} + F_{k-5} + \dots < F_k - F_{k-1} = F_{k-2}$$

che vero per ipotesi induttiva. In realtà succede che $F_{k-1} + F_{k-3} + \dots = F_k - 1$, cosa che potevo già aspettarmi dalla tesi del problema.

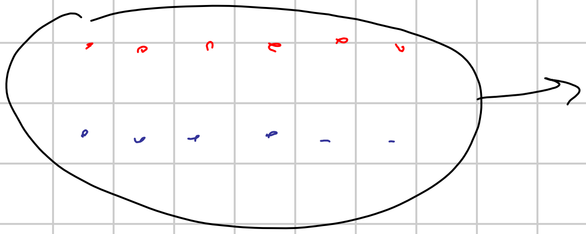
(2) Dati n punti rossi e n punti blu disposti in posizione generale sul piano, dimostrare che è possibile costruire n segmenti, ciascuno con un estremo blu e uno rosso, senza punti in comune (neanche agli estremi).



Osservazioni: non sembra essere un problema particolarmente rigido: nella maggior parte delle configurazioni, avrò tanti approcci risolutivi.



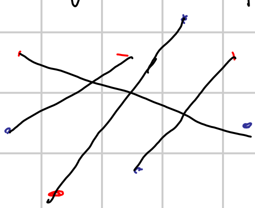
ci sono molti modi di fare l'accoppiamento in questo caso



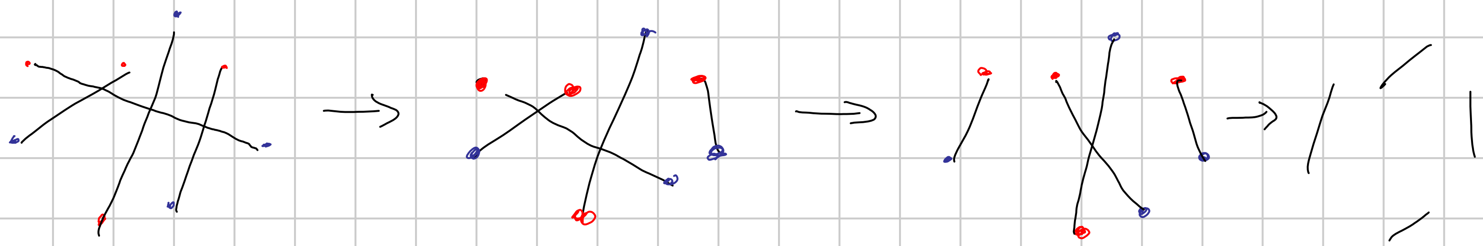
qui c'è soltanto un approccio

Da un lato non si può essere troppo approssimativi, dall'altro risulta difficile descrivere un algoritmo particolarmente preciso. Per es., se provate a guardare il convex hull e a costruirlo in qualche modo viene fuori qualcosa di confusionario.

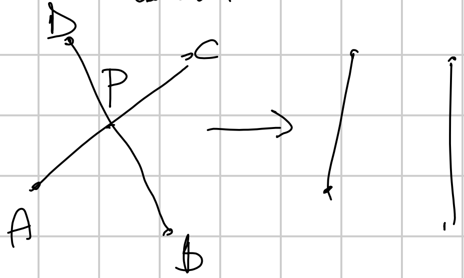
$\Rightarrow$ Idea greedy:



Provo a collegare i punti in qualche modo. Se due segmenti si intersecano, li scambio.



Iterativamente scambio due segmenti e mi sembra di star "sgrovigliando" la situazione. Un criterio naturale è il numero di intersezioni, ma nessuno mi garantisce che sia un monovariante.



Idea: somma delle lunghezze.
Infatti, se AC e BD si intersecano, vale $AD + BC < AC + BD$ per dis. triangolare: $AP + PD > AD$, $BP + PC > BC$.

L'algoritmo termina per esistenza di monovariante e finitezza del numero di configurazioni.

Riformulazione alternativa: prendo un minimo della somma delle lunghezze e mostro che non ha intersezioni.

Problema bonus (errata corrige): sia M insieme di $n \geq 4$ punti del piano a tre non allineati. Inizialmente sono collegati da n segmenti in modo che ogni punto in M sia l'estremo di due di essi. A ogni step, posso prendere due segmenti AB e CD con un punto interno in comune e rimpiazzarli con AC e BD, se nessuno di questi è presente. Dimostra che è impossibile effettuare $\frac{n^3}{4}$ o più mosse.

(3) Determinare se esiste un sottoinsieme $S \subseteq \{1, 2, \dots, 10^5\}$ con $|S| = 2000$ tale che non esistano $a, b, c \in S$ con $a < b < c$ e $b - a = c - b$.

Tentativo di costruzione greedy:

1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29, 31, 32, 37, ...

2 4 10 28

0 1 3 4 9 10 12 13 27 28 30 31 36 ...

Tentativo $S = 1 + \{$numeri che si scrivono con solo 0 e 1 in base 3$\}$

Se $2b = a+c$ vuol dire che $2b$ si scrive con soli 0 e 2 in base 3, ma essendo $= a+c$, che è somma senza riporto, non posso avere né $1+0$ né $0+1$ $\Rightarrow a=c$.

$|S|$? $3^{11} \simeq 60\,000 \Rightarrow 11111111111_3 < 10^5 \Rightarrow$ ci sono almeno 2^{11} possibilità, $2^{11} > 2000$.

Esercizi:

4. Sia $A \subseteq \{1, 2, \dots, 10^6\}$ con $|A| = 101$. Dimostrare che $\exists t_1, \dots, t_{100} \in \{1, 2, \dots, 10^6\}$ t.c. $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$ siano a due a due disgiunti.

5. Diremo che un numero è bello se è della forma a^n con $a \in \{3, 4, 5, 6\}$ e n intero positivo. Dimostrare che ogni intero >2 è somma di numeri belli distinti.

6. Determinare se esiste $A \subseteq \mathbb{Z}$ tale che ogni elemento $a \in A$ si scriva come somma di due elementi di A e, $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\exists$ $a_1, \dots, a_n \in A$ distinti con $x = a_1 + \dots + a_n \iff x \neq 0$.

---

4. Vogliamo trovare $t_1, \dots, t_{100} \in \{1, 2, \dots, 10^6\}$ t.c. $x + t_j \neq y + t_i$ $\forall i, j$ distinti e $x, y \in A$ dove $A \subseteq \{1, \dots, 10^6\}$ fissato con $|A| = 101$.

Suppongo di aver scelto $t_1, \dots, t_{k-1}$ e devo scegliere t_k.

Condizioni: $t_k \neq (y-x) + t_i$ $\forall x, y \in A$ e $i < k$.

$y - x$ al variare di $y, x \in A$ sono $\leq 101^2 - 100$ valori.

Invece, t_i per $i < k$ sono $k - 1 \leq 99$ valori.

In totale, i valori possibili sono $(101^2 - 100) \cdot 99 = (100^2 + 101) \cdot (100 - 1) =$
$= 100^3 + 101 \cdot 100 - 100^2 - 101 = 100^3 - 1 = 10^6 - 1 \Rightarrow$ esiste almeno una scelta per t_k.

---

5. Cominciando dai valori piccoli ... $3, 4, 5, 6, 9, 16, 25, 27, 36, \dots$

Con $\{3, 4, 5, 6\}$ otteniamo $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ e 18.

$[3, 15] \cup \{18\}$

Se aggiungo 9, ottengo $[3, 24] \cup \{27\}$.
Se aggiungo 16, ottengo $[3, 40] \cup \{43\}$.
Provo a dimostrare per induzione che il pattern continua.
Cosa significa? Se $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ sono i numeri belli, voglio dire che (almeno da $n \geq 4$) con $\{x_1, \dots, x_n\}$ ottengo tutte le somme da 3 a $S_n - 3$ dove $S_n = x_1 + \dots + x_n$.
Induttivamente vorrò dimostrare che $x_{n+1} \leq S_n - 5$ per ogni $n \geq 5$.
Hope: per ogni numero bello, la somma dei numeri belli minori di lui è almeno il numero $+5$.
Sia N tale numero bello.
La potenza di 3 più grande $< N$ è $\geq \frac{N}{3}$, la seconda è $\geq \frac{N}{9} \dots$
In totale, la somma delle potenze di 3 più grandi di N è
$$\geq \frac{N}{3} + \frac{N}{3^2} + \dots = \frac{N}{2}.$$
Con le potenze di 4 ottengo $\geq \frac{N}{4} + \frac{N}{4^2} + \dots = \frac{N}{3}$.
" 5 " $\geq \frac{N}{5} + \frac{N}{5^2} + \dots = \frac{N}{4}$
" 6 " $\geq \frac{N}{6} + \frac{N}{6^2} + \dots = \frac{N}{5}$.
In total ottengo $\geq N \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{30+20+15+12}{60} = \frac{77}{60} N > N + 5$
Il ragionamento è approssimativo: come risolvere?
- Metodo sofisticato: guardare queste somme infinite, dare un bound a i termini che in realtà non ci sono e calcolare esplicitamente il termine costante di errore.
  Per esempio, per le potenze di tre noto che il bound di $N/2$ è vero se considero anche esponente ≤ 0.
  $$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 3^k < N}} 3^k \geq \frac{N}{2}, \text{ ma io voglio } \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k > 0 \\ 3^k < N}} 3^k \geq \frac{N}{2} - \frac{3}{2}$$
  Con le potenze di 4 ottengo $\geq \frac{N}{3} - \frac{4}{3}$, con 5 ho $\geq \frac{N}{4} - \frac{5}{4}$, con 6 ho $\geq \frac{N}{5} - \frac{6}{5}$.
  Il bound vero è $\geq \frac{77}{60} N - \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5}\right) > N + 5$

- Metodo non sofisticato:
se $N>9$ mi accorgo che la somma dei numeri belli $<N$ è
$$\geq \frac{N}{3}+\frac{N}{9}+\frac{N}{4}+\frac{N}{5}+\frac{N}{6}=\frac{60+20+45+36+30}{180}N=\frac{191}{180}N \overset{?}{>} N+5$$
$$\frac{11}{180}N>5,\quad 11N>900,\quad \text{ossia } N>82.$$

---

6. $A\subseteq\mathbb{Z}$ t.c. ogni elemento di A sia somma di due elementi di A e che l'unico numero che non si scrive come somma di elementi distinti di A è 0.

Idea: lo costruisco greedy, mettendone uno positivo e uno negativo alternati.

1 -2 3 -5 8 Esercizio per casa: fare tutte le verifiche del caso!

Parte II - Grafi

In generale, esistono molti modi diversi di approcciare un problema di teoria dei grafi.

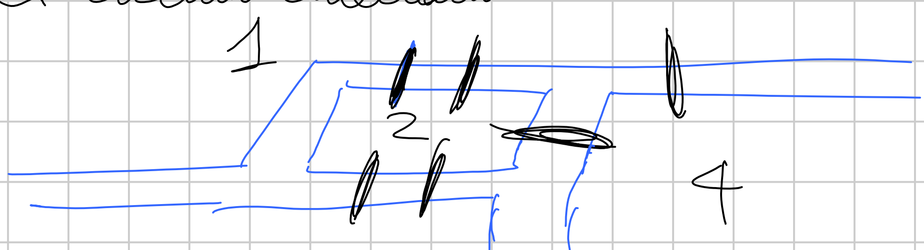
- Induttivi/locali/estremali: e.g. prendo il vertice con grado massimo (estremale), lo tolgo (induttivo) e, guardando i suoi vicini (locale) lo metto in relazione con il grafo ottenuto
- Globali: classici double-counting, per esempio
$$\sum_{v\in V}\deg v=2|E|$$
- Greedy: possono essere sia locali sia globali

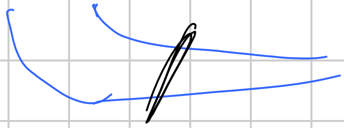
---

1. Dimostrare che un grafo con tutti i vertici di grado $\leq d$ ha numero cromatico $\leq d+1$.

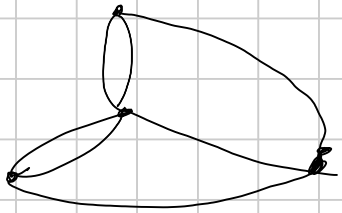
Soluzione: lo faccio e basta.

2. Circuiti euleriani





Problema folkloristico: il fiume divide la città di Königsberg in quattro zone. È possibile camminare sui sette ponti passando esattamente una sola volta su ciascuno di essi?



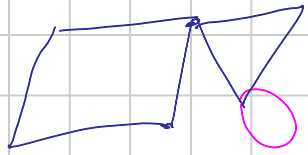
Esiste un cammino euleriano su questo grafo?

Def: cammino euleriano è successione di vertici $v_0, \dots, v_n$ tali che $\{ v_i v_{i+1} \mid 0 \le i < n-1 \}$ sia l'insieme degli archi del grafo (eventualmente con molteplicità).
Circuito euleriano è un cammino con $v_0 = v_n$.

Teorema:
- Esiste un circuito $\iff$ G connesso e $\deg v$ è pari $\forall v \in V$.
- Esiste un cammino $\iff$ G è connesso e il numero di vertici v con $\deg v$ dispari è 0 o 2. Se è 2, questi sono inizio e fine.

L'implicazione $\Rightarrow$ è facile, perché in tutti i vertici tranne iniziale e finale entrano tanti archi quanti ne escono.

Rimane da dimostrare l'implicazione $\Leftarrow$.
Basta fare il caso di tutti i vertici di grado pari, perché per fare l'altro prendo v, w con $\deg v = \deg w \equiv 1 \pmod 2$ e li collego artificialmente.
Lemma: Se G grafo ha tutti i vertici di grado pari, è (dal punto di vista degli archi) unione di cicli.
Un grafo con tutti i vertici di grado pari ha almeno un ciclo, lo tolgo e vado avanti per induzione.
Dim: Dato un circuito euleriano parziale e un ciclo che interseca l'insieme dei suoi vertici, posso inserirlo.



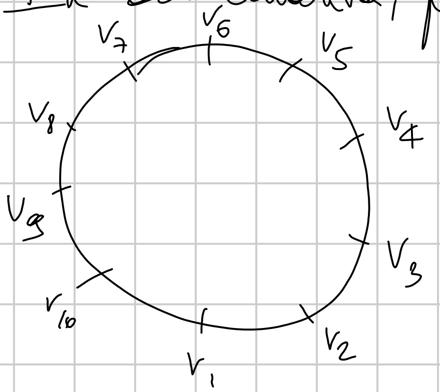
Per concludere, aggiungo iterativamente cicli. A ogni step, riesco ad aggiungere un altro ciclo, perché se così non fosse l'insieme dei vertici che considero finora soddisferebbe la proprietà che non esistono archi tra lui e il complementare $\Rightarrow$ assurdo perché implicherebbe disconnesso.

3. Circuiti hamiltoniani

<u>Def</u>: dato grafo G, un circuito hamiltoniano è permutazione dei suoi vertici $(v_1, \dots, v_n)$ t.c. v_i e v_{i+1} siano connessi da un arco $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, come anche v_n e v_1.

<u>Thm</u>. Se un grafo con tutti i vertici di grado $\geq \frac{|V|}{2}$, esiste un circuito hamiltoniano.

Tentativo di costruire il percorso step-by-step è fallimentare.
In alternativa, provo una permutazione a caso.



Suppongo che v_k e v_{k+1} non siano collegati.
Idea: se per esempio v_3 e v_4 non sono connessi, ma lo sono v_3 e v_8 sostituisco

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 con
1 2 3 8 7 6 5 4 9 10

Se oltre ad avere $3-8$ ha anche $4-9$, garantisco di avere almeno un arco guadagnato.

<u>Claim</u>. Esiste l tale che $v_k \leftrightarrow v_l$ e $v_{k+1} \leftrightarrow v_{l+1}$.

I candidati plausibili per l sono $\{k+2, \dots, k-2\}$ e sono $n-3$. Di questi $\geq \frac{n}{2}-1$ soddisf. la prima condizione e $\geq \frac{n}{2}-1$ la seconda. Siccome $\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-1\right) > n-3$, ce n'è almeno uno che le soddisfa entrambe.

Per ciascuna permutazione o è circuito hamiltoniano o aumento.

Oss: l'ipotesi è sharp, perché $K_{m,m+1}$ ha vertici con grado $\geq m = \frac{n-1}{2}$ ma nessun circuito hamiltoniano.

4. Sia $T=(V,E)$ un albero con n archi e $G=(V',E')$ un grafo in cui ogni vertice ha grado $\geq n$. Dimostrare che esiste una funzione iniettiva $\phi: V \to V'$ tale che, per ogni $v, w \in V$, $(v,w) \in E \Rightarrow (\phi(v), \phi(w)) \in E'$.

5. Siano $n, k \geq 2$. Quanti archi ha al massimo un grafo di n vertici senza k-cricche?
[Versione semplificata: fare solo $k=3$]

---

4. Soluzione: lo faccio e basta.
Sia F una foglia. Per HP induttiva, esiste $\Phi: V \setminus \{F\} \to V'$ con la proprietà del testo.
Voglio costruire $\phi: V \to V'$ tale che $\phi(v) = \Phi(v)$ per $v \neq F$.
$\phi(F)$ deve essere vertice in G con le seguenti proprietà
- $\phi(F) \neq \phi(v)$ $\forall v \in V \setminus \{F\}$ (n condizioni)
- Detto w l'unico vertice collegato a F, voglio $(\phi(w), \phi(F)) \in E'$.

Quanti soddisfano la seconda? $\geq n$. Avrei n vertici bloccati per $\phi(F)$, ma in realtà che $\phi(F) \in N(\phi(w))$ implica già $\phi(F) \neq \phi(w)$ e quindi le condizioni sono $n-1$.

5. Sketch di soluzione
(i) Un grafo $(k-1)$-partito soddisfa sempre la proprietà
(ii) Tra tutti i grafi $(k-1)$-partiti, per massimizzare il n.ro di archi devo avvicinare il più possibile le cardinalità degli insiemi in cui partiziono (AM-GM)
(iii) Provo a dimostrarlo per induzione: se un vertice ha grado abbastanza piccolo, lo tolgo e sono contento (ma cosa vuol dire abbastanza piccolo?)
(iv) Se invece tutti i vertici hanno grado abbastanza grande, esiste una k-cricca
(v) Verifica che "abbastanza piccolo" e "abbastanza grande" in realtà coincidono.

Se avete difficoltà a farlo in generale, è comunque istruttivo fare il caso $k=3$.