S25 - G1 medium

Titolo nota — 02/09/2025

1 Linearity of PoP

Fatto: Siano Γ e ω due cf., allora la funzione

$$f(P) = \mathrm{pow}_\Gamma(P) - \mathrm{pow}_\omega(P)$$

è affine, cioè se $\vec{P} = t\vec{A} + (1-t)\vec{B}$ allora

$$f(P) = t f(A) + (1-t) f(B) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Oss: Dati A, B l'insieme

$$\{ \underbrace{t\vec{A} + (1-t)\vec{B}} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

→ combinazione lineare convessa di $\vec{A}$ e $\vec{B}$. $(t \in [0,1])$

è la retta per A e B.

dim del fatto: Γ centro O_1 e raggio R_1

prod. scalare

$$\mathrm{pow}_\Gamma(P) = PO_1^2 - R_1^2 = (P - O_1)\cdot(P - O_1) - R_1^2$$

ω centro O_2 e raggio R_2

prod. scalare

$$\mathrm{pow}_\omega(P) = PO_2^2 - R_2^2 = (P - O_2)\cdot(P - O_2) - R_2^2$$

$$\mathrm{pow}_\Gamma(P) = P\cdot P - O_1\cdot P - P\cdot O_1 + O_1\cdot O_1 - R_1^2$$

$$\mathrm{pow}_\omega(P) = P\cdot P - O_2\cdot P - P\cdot O_2 + O_2\cdot O_2 - R_2^2$$

$$f(P) = - 2(P\cdot O_1 - P\cdot O_2) + \|O_1\|^2 - \|O_2\|^2 - R_1^2 + R_2^2 =$$

$$= 2P\cdot(O_2 - O_1) + \text{roba costante}$$

$$f(tA + (1-t)B) = 2(tA + (1-t)B)\cdot(O_2 - O_1) + k =$$

$$= t\,(2A\cdot(O_2-O_1)) + (1-t)(2B\cdot(O_2-O_1)) + \underset{t+(1-t)}{\underset{\parallel}{1}}\cdot k =$$

$$= t\,(2A\cdot(O_2-O_1)+k) + (1-t)(2B\cdot(O_2-O_1)+k) =$$

$$= t\,f(A) + (1-t)\,f(B).\ \square$$

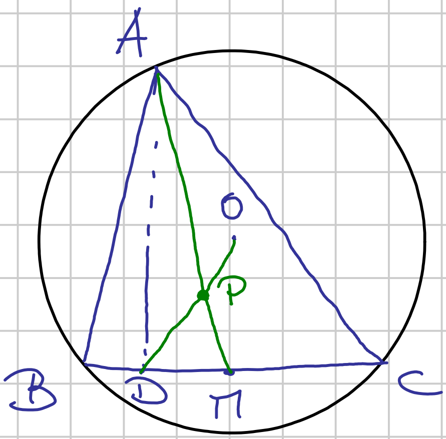
<u>Fatto 2</u>: $f(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k) = \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2) + \dots + \lambda_k f(A_k)$

per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$

<u>dim</u>: <u>induzione</u>. $\square$

<u>Es 1</u>: ABC triangolo, M pt. medio di BC, D piede dell'altezza da A, O circocentro, $P = OD \cap AM$.

Dim che P giace sull'asse radicale di (BOC) e la cfr di Feuerbach di ABC.



<u>Sol</u>: $\Gamma = (BOC)$, ω = Feuerbach

$$f(P) = pow_\Gamma(P) - pow_\omega(P)$$

$$f(P) \overset{?}{=} 0$$

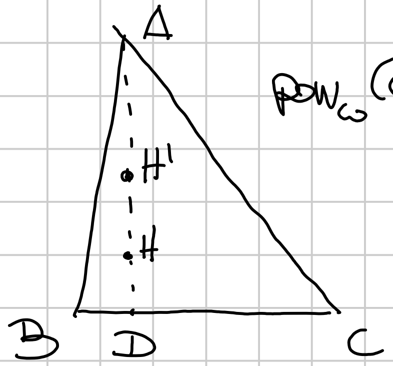
$$P = t\,O + (1-t)D \qquad t \in [0,1]$$

$$t = \frac{PD}{OD} \qquad (1-t) = \frac{OP}{OD}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{PD}{OD}\cdot\vec{O} + \frac{OP}{OD}\cdot\vec{D}}$$

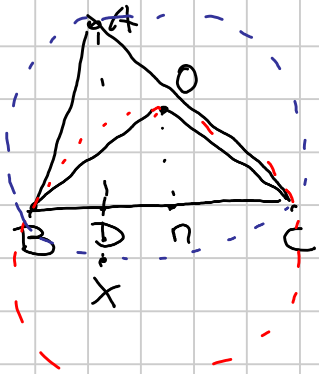
$$f(P) \overset{?}{=} 0 \iff \frac{PD}{\cancel{OD}} f(O) + \frac{OP}{\cancel{OD}} f(D) \overset{?}{=} 0$$

$$\iff -PD\cdot pow_\omega(O) + OP\cdot pow_\Gamma(D) \overset{?}{=} 0$$



$$pow_\omega(O) = pow_\omega(H) = -H'H \cdot HD$$

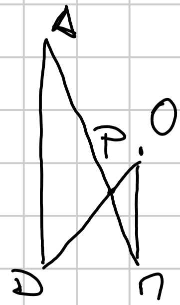
H' pt. medio di AH



$$pow_\Gamma(D) = -BD \cdot DC = -DX \cdot DA = -DH \cdot DA$$

$$PD \cdot HH' \cdot \cancel{HD} - OP \cdot \cancel{DH} \cdot DA \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{DP}{OP} \stackrel{?}{=} \frac{AD}{HH'} = \frac{AD}{OM}$$

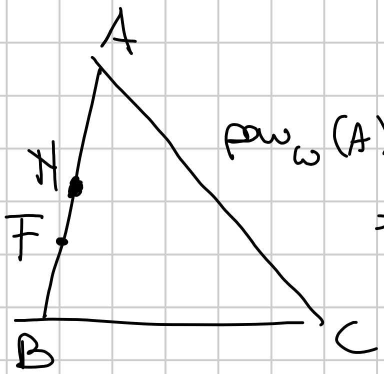


$\boxed{\text{OK}}$

Sol2: Usando AM

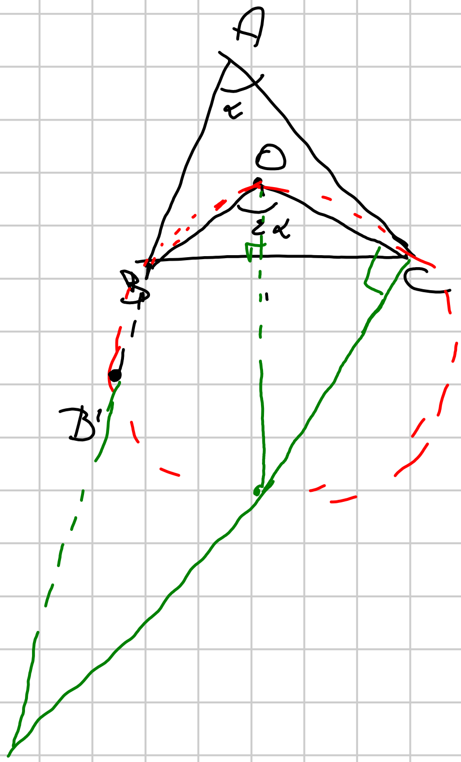
Tesi $\Longleftrightarrow \left|\dfrac{f(A)}{f(M)}\right| = \dfrac{AP}{PM}$ (segmenti non orientati)

$$\left|\frac{f(A)}{f(M)}\right| = \left|\frac{pow_\Gamma(A) - pow_\omega(A)}{pow_\Gamma(M)}\right| = \left|\frac{pow_\Gamma(A) - \frac{AB}{2} AC \cos\alpha}{BC^2/4}\right| =$$



$$pow_\omega(A) = AN \cdot AF = \frac{AB}{2} AC \cdot \cos(\alpha)$$

$$pow_\Gamma(A) = AB \cdot \frac{AC}{2\cos\alpha}$$



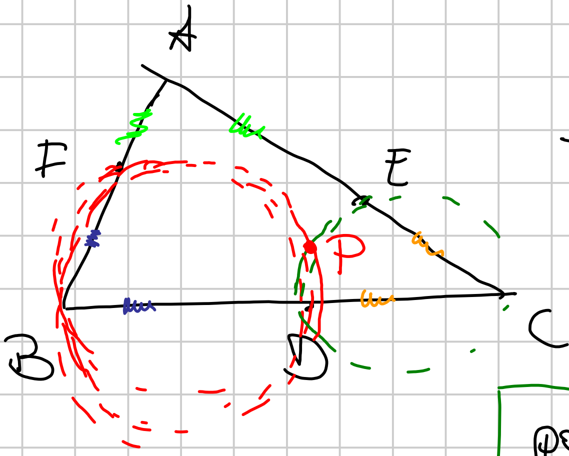
$$= \left|\frac{\frac{AB \cdot AC}{2}\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{BC^2/4}\right| = \left|\frac{2\, AB \cdot AC \cdot BC \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2R\, BC^2}\right| =$$

$$= \left| \frac{4\,[ABC]}{BC^2} \tan\alpha \right| = \frac{AP}{PM}.$$

Es 2: ABC triangolo, O circocentro, I incentro D, E, F su BC, CA, AB t.c.

$$BD + BF = AC, \quad CD + CE = AB.$$

$$(BFD) \cap (CDE) = \{D, P\}.$$ Dim che $OP = OI$



Sol: 1) $P \in (AEF)$ [Miquel]

2) $AF + AE = BC$

Γ = cf. circo ad ABC

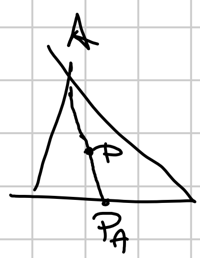
$$\boxed{pow_\Gamma(I) = pow_\Gamma(P) \implies \text{Tesi}}$$

(es per casa $pow_\Gamma(I) = -2Rr$ [teo di Eulero])

$$f_A(Q) = pow_{(AEF)}(Q) - pow_\Gamma(Q)$$
$$f_B(Q) = pow_{(BDF)}(Q) - pow_\Gamma(Q)$$
$$f_C(Q) = pow_{(CED)}(Q) - pow_\Gamma(Q)$$

Atto di fede: $\exists\ x, y, z \in \mathbb{R}$ t.c. $x + y + z = 1$

e $\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$



$$\implies -pow_\Gamma(P) = x\cancel{f_A(A)} + y f_A(B) + z f_A(C) = y \cdot c \cdot BF + z \cdot b \cdot CE$$
$$= x f_B(A) + y \cancel{f_B(B)} + z f_B(C) = z \cdot a \cdot CD + x \cdot c \cdot AF$$
$$= x f_C(A) + y f_C(B) + z \cancel{f_C(C)} = x \cdot b \cdot AE + y \cdot a \cdot BD$$

$$a\,(yc\cdot BF + zb\cdot CE) + b\,(za\,DC + xc\,AF) + c\,(xb\,AE + ya\,BD) =$$

$$\| $$

$$(a+b+c)\,(-\mathrm{pow}_\Gamma(P))$$

$$= xbc\,(\underbrace{AF+AE}_{=a}) + yac\,(\underbrace{BF+BD}_{=b}) + zab\,(\underbrace{CE+CD}_{=c})$$

$$= xa\,b\,c + yabc + zabc =$$

$$= abc\,(\overbrace{x+y+z}^{=1}) = abc$$

$$\Rightarrow -\mathrm{pow}_P(P) = \frac{abc}{a+b+c} = 2Rr. \ \square$$

Es 3: ABC triangolo, D su BC

$(ABD) \cap AC = \{A, F\}$

$(ACD) \cap AB = \{A, E\}$

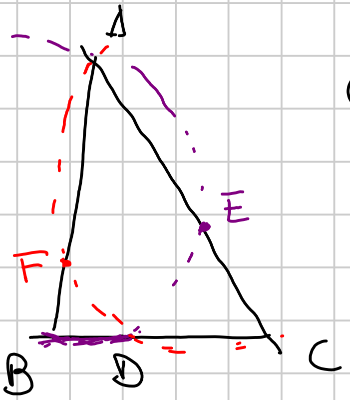
Dim che esiste un punto comune a tutte le cfr (AEF), diverso da A, al variare di D su BC.

Es 4: $APBQ$ ciclico, $\hat{APB} = \hat{BQA} = 90°$, $AP = AQ < BP$.
X su PQ, AX interseca $(APBQ)$ in S.
T su $\hat{AQB}$ t.c. $\hat{TXA} = 90°$
M pt. medio di ST.
Dim che al variare di X, M sta su una cf.

$\boxed{\text{Hint 3}}$: So calcolare molte potenze in B e C, ma sarebbe meglio usare almeno una cf. che non dipende da D

$\boxed{\text{Hint 4}}$: Sembra una buona idea guardare la cf. di diametro AO con O centro di $(APBQ)$. (perché?)

Sol 3:



(AEF) passa per un pt. fisso diverso da A al variare di D

$$f(P) = \mathrm{pow}_{(ABC)}(P) - \mathrm{pow}_{(AEF)}(P)$$

$$f(tB + (1-t)C) = t\,f(B) + (1-t)\,f(C) =$$

$$= -t\,pow_{(AEF)}(B) - (1-t)\,pow_{(AEF)}(C) =$$

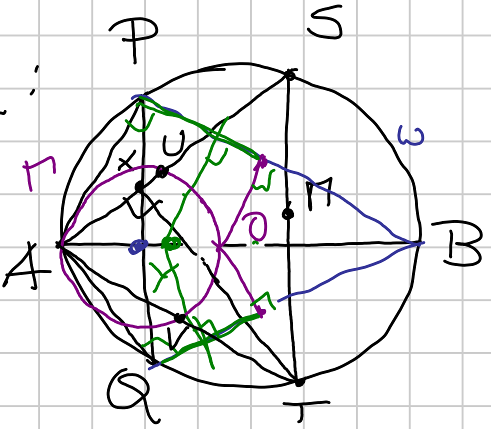
$$= -t\,BF\cdot BA - (1-t)\,CE\cdot CA =$$

$$= -t\,BD\cdot BC - (1-t)\,CD\cdot BC = -BC\left(t\cdot BD + (1-t)\,CD\right)$$

$$\underbrace{f\left(\frac{B+C}{2}\right)}_{= M} = -\frac{BC^2}{2}$$ non dipende da D $\Rightarrow$ $pow_{(AEF)}(M)$ non dip. da D

$\Rightarrow$ le cf. (AEF) sono coassiali con asse radicale AM.

Sol 4:



Casi particolari

$X = P$
$S \equiv P$, $T \equiv B$
$\Rightarrow M$ pt. medio di PB

$X = Q$
$S \equiv Q$ $T \equiv B$
$\Rightarrow M$ pt. medio di QB

i punti medi di PB, QB, P, Q stanno nel luogo

Q

X pt. medio di AO

$f(P) = pow_\Gamma(P) - pow_\omega(P)$

Γ = cf. di diam AO

$$f(M) = pow_\Gamma(M) + MS\cdot MT$$
$$\| $$
$$\frac{1}{2}\left(f(S) + f(T)\right)$$
$$\|$$
$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{SU\cdot SA}_{=\frac{SA^2}{2}} + \underbrace{TV\cdot TA}_{=\frac{TA^2}{2}}\right)$$ (omotetia)

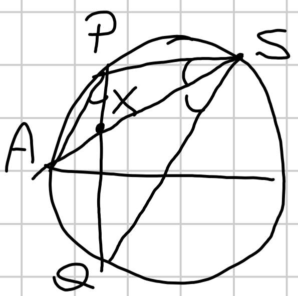
$\Gamma \cap AS = \{A, U\}$

$\Gamma \cap AT = \{A, V\}$

$$pow_\Gamma(M) = \frac{1}{4}SA^2 + \frac{1}{4}AT^2 - \frac{1}{4}TS^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{SA^2 + TA^2 - TS^2}{2}\right) = \frac{1}{2}SA\cdot TA\cos\widehat{SAT}$$

$$= \frac{1}{2}AS\cdot AX$$

$$= \frac{1}{2}AP^2$$



$APX \sim ASP \Rightarrow AX\cdot AS = AP^2$

$\Rightarrow M$ sta su una cf. di centro il pt medio di AO.

② Richiami di num. complessi

Es 1: Centro di rotomotetia

$abcd$ non un parallelogramma

$\Rightarrow \exists!$ rotomotetia che manda $a \to b$, $c \to d$

dim: chiamiamo x un tale centro.

$$\begin{cases} (b-x) = (a-x)\cdot\alpha \\ (d-x) = (c-x)\cdot\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{a-x}{c-x} = \frac{b-x}{d-x}$$

$$\Rightarrow ad - x(a+d) + \cancel{x^2} = bc - x(b+c) + \cancel{x^2}$$

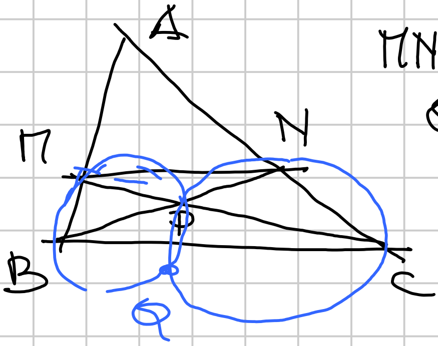
$$\Rightarrow x(a+d-b-c) = ad-bc$$

$$\Rightarrow x = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}. \quad \square$$

Oss: se scambio b e c resta uguale $\Rightarrow$ x è anche il centro di una (diversa) rotomotetia che manda a in c, b in d.

Oss 2: $\alpha = \dfrac{b-d}{a-c}$

Es 2 (BMO 2009.2)



$MN \parallel BC$, $P = MC \cap NB$

Q la seconda intersezione di (BPM) e (CNP)

$\Rightarrow \widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$.

Sol: 1) Q è centro di rotomotetia che manda M in C e B in N.

$\Rightarrow q = \dfrac{mn-bc}{m+n-b-c}$ origine in $A \Rightarrow m = \lambda b$, $n = \lambda c$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow q = \frac{\lambda^2 bc - bc}{\lambda(b+c) - (b+c)} = \frac{bc}{b+c}(\lambda+1)$$

p intersez. di BN e CM $\qquad p = tb + (1-t)n = sc + (1-s)m$
$t, s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow t\bar{b} + (1-t)\bar{n} = s\bar{c} + (1-s)\bar{m}$$

$$\begin{cases} tb + (1-t)n = sc + (1-s)m \\ t\bar{b} + (1-t)\bar{n} = s\bar{c} + (1-s)\bar{m} \end{cases} \Rightarrow \text{da qui calcolo } t, s$$

Oppure noto che, posto $P' = AP \cap BC$ per Ceva P' è il pt. medio di BC

perché $\underbrace{\frac{AM}{MB} \cdot \frac{CN}{NA}}_{=1} \cdot \frac{BP'}{P'C} = 1 \Rightarrow \frac{BP'}{P'C} = 1$

e $P\hat{A}C = P'\hat{A}C$

$B\hat{A}Q = P'\hat{A}C$

$\arg\left(\frac{q-a}{b-a}\right) = B\hat{A}Q \qquad \arg\left(\frac{c-a}{p'-a}\right) = P'\hat{A}C$

$$\text{tesi} \iff \frac{q-a}{b-a} \Big/ \frac{c-a}{p'-a} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(\lambda+1)\frac{\cancel{b}\cancel{c}}{\cancel{b+c}}}{\cancel{b}} \Big/ \frac{2\cancel{c}}{\cancel{b+c}} = \frac{\lambda+1}{2} \in \mathbb{R}. \ \square$$

2.5 Determinante

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \overbrace{aei + dhc + bfg}^{\text{diag } \searrow} \overbrace{- ceg - hfa - bdi}^{\text{diag } \swarrow}$$

det $= 0 \iff$ una colonna/riga è "combinazione lineare" delle altre.

se scambio due righe/colonne il det cambia di segno

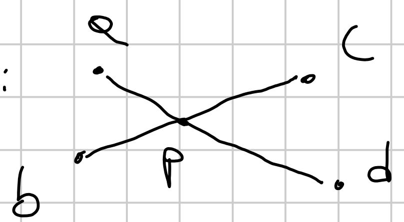
- $\begin{cases} ax + dy + gz = p \\ bx + ey + hz = q \\ cx + fy + iz = r \end{cases}$ il sist ha una e una sola sol. sse $\underbrace{\det\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}}_{= D} \neq 0$

e tale sol. è

$$\left(\frac{\det\begin{pmatrix} p & d & g \\ q & e & h \\ r & f & i \end{pmatrix}}{D}, \frac{\det\begin{pmatrix} a & p & g \\ b & q & h \\ c & r & i \end{pmatrix}}{D}, \frac{\det\begin{pmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{pmatrix}}{D} \right)$$

(vale anche per i sistemi 2x2)

Es 1:



$$\frac{a-p}{d-p} \in \mathbb{R} \iff a, p, d \text{ allineati}$$

$$\frac{c-p}{b-p} \in \mathbb{R} \iff c, b, p \text{ allineati}$$

$$\begin{cases} (a-p)(\bar{d}-\bar{p}) = (d-p)(\bar{a}-\bar{p}) \\ (c-p)(\bar{b}-\bar{p}) = (\bar{c}-\bar{p})(b-p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(\bar{a}-\bar{d}) + \bar{p}(d-a) = d\bar{a}-a\bar{d} \\ p(\bar{c}-\bar{b}) + \bar{p}(b-c) = \bar{c}b-\bar{b}c \end{cases}$$

da cui

$$p = \frac{\det\begin{pmatrix} d\bar{a}-a\bar{d} & d-a \\ \bar{c}b-\bar{b}c & b-c \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \bar{a}-\bar{d} & d-a \\ \bar{c}-\bar{b} & b-c \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{(b-c)(d\bar{a}-a\bar{d}) - (d-a)(\bar{c}b-\bar{b}c)}{(\bar{a}-\bar{d})(b-c) - (d-a)(\bar{c}-\bar{b})}. \blacksquare$$

Es 2: Trovare il circocentro di ABC

sol
$$\begin{cases} |p-a|^2=R^2 \\ |p-b|^2=R^2 \\ |p-c|^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |p|^2+|a|^2-a\bar{p}-\bar{a}p=R^2 \\ |p|^2+|b|^2-b\bar{p}-\bar{b}p=R^2 \\ |p|^2+|c|^2-c\bar{p}-\bar{c}p=R^2 \end{cases}$$

sist. lin in p, $\bar{p}$, $|p|^2-R^2$

$$\Rightarrow p=\frac{\det\begin{pmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \bar{a} & a & 1 \\ \bar{b} & b & 1 \\ \bar{c} & c & 1\end{pmatrix}}$$

Fatto: Area di ABC (con segno) $=\frac{i}{4}\det\begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1\end{pmatrix}$

3 Coordinate baricentriche

Fatto già visto: Dati A,B,C triangolo e un punto P esistono unici $x,y,z\in\mathbb{R}$ tali che
$$x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}=\vec{P} \quad e \quad x+y+z=1$$

(x,y,z) si dicono COORD. BARICENTRICHE ESATTE di P risp. ad $\overset{\triangle}{ABC}$

Oss: (x,y,z) è proporzionale a $([PBC],[APC],[ABP])$

(aree con segno risp. ad $[ABC]$)

$x=\frac{[PBC]}{[ABC]}$ etc...

Le COORD. BARICENTRICHE di P sono la TERNA OMOGENEA

$[x,y,z]$ o $[x:y:z]$

$\parallel$

$\{(\lambda x,\lambda y,\lambda z),\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

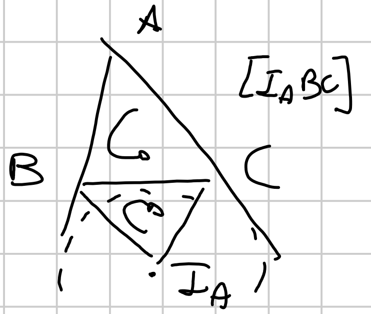
Es: $[1,1,1]=[2,2,2]=[\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ corrisponde al pt. con coord esatte

$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, cioè il baricentro di ABC.

<u>Es</u>: $[1,0,0]$ è A e così via

$[1,1,0]$ è il pt. medio di AB

$[p,q,0]$ $\quad \frac{p}{p+q}\vec{A} + \frac{q}{p+q}\vec{B} = \vec{X}$ è tale che $\frac{AX}{XB} = \frac{q}{p}$ (segmento orientato)



<u>Es</u>: incentro $= [a,b,c]$ $\qquad \vec{I} = \frac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}$

A-excentro $= [-a,b,c]$

$$H = \left[\frac{a}{\cos\alpha}, \frac{b}{\cos\beta}, \frac{c}{\cos\gamma}\right] = [\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma]$$

$$O = [\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma]$$

<u>Esercizio</u>: trovare le coord. del centro della cf. di Feuerbach

<u>Sol</u>: dovrei trovare le bar. esatte di O e H e fare la media.

<u>OSS</u>: non mi serve davvero avere le bar. <u>esatte</u>, mi servono che tornino con la stessa somma.

<u>Notazione di CONWAY</u>

$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = bc\cdot\cos\alpha$ $\qquad S_\theta = 2S\cdot\cot\theta$

S_B, S_C. $\qquad S$ area

- $S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A = 4S^2$
- $S_A + S_B + S_C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

<u>es</u>: $H = [S_BS_C ; S_AS_C , S_AS_B]$

$O = [a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C]$

<u>es per casa</u>: $a^2S_A + b^2S_B + c^2S_B = 8S^2$

$$N_9 = [a^2S_A + 2S_BS_C,\ b^2S_B + 2S_AS_C,\ c^2S_C + 2S_BS_A]$$

<u>Rette</u>: $\{ [x,y,z] \mid px+qy+rz=0 \}$

<u>OSS</u>: $p=q=r$ produce $\underbrace{x+y+z=0}_{\text{retta all'infinito}}$ che è impossibile.

retta all'infinito (= le direzioni delle rette)

<u>Es</u>: $x-y=0$ è la mediana da C

$bx-ay=0$ è la bisettrice interna da C

$bx+ay=0$ è la bisett. esterna da C

<u>Es</u>: la ceviana da C per $P=[l,m,n]$ è $mx-ly=0$

e incontra AB (cioè $z=0$) in $[l,m,0]$

<u>Es x casa</u>: dim. CEVA e MENELAO.

<u>OSS</u>: Le rette $p_1x+q_1y+r_1z=0$, $p_2x+q_2y+r_2z=0$, $p_3x+q_3y+r_3z=0$

sono concorrenti se e solo se il sistema

$$\begin{cases} p_1x+q_1y+r_1z=0 \\ p_2x+q_2y+r_2z=0 \\ p_3x+q_3y+r_3z=0 \end{cases} \quad \text{ha sol} \neq (0,0,0)$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = 0$$

<u>OSS.*</u>: Stessa cosa per sapere se 3 punti sono allineati

<u>Circonferenze</u>

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux+vy+wz)(x+y+z) = 0$$

con $u,v,w \in \mathbb{R}$. (c'entrano con le potenze di A,B,C rispetto alla cf.)

<u>es</u>: circoscritta $u=v=w=0$.