G2 - medium

Titolo nota

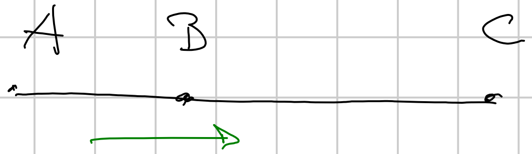
Sam

04/09/2025

1. BIRAPPORTI
2. QUATERNE ARMONICHE
3. POLI & POLARI
4. VARIE

1 - BIRAPPORTI

- Rapporto tra segmenti con segno



$AB > 0 \quad BA < 0$

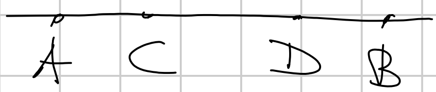
$\frac{AB}{BC} > 0 \qquad \frac{AC}{CB} < 0$

$\frac{AB}{BA} = -1$

- Si può fare anche per archi (o corde) di circonferenza.

Def: Dati 4 pti allineati A, B, C, D definiamo

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}$$



Si dice BIRAPPORTO

$$\frac{\text{"come } C \text{ divide } AB\text{"}}{\text{"come } D \text{ divide } AB\text{"}}$$

Oss 1: Conta l'ordine $(A,B,D,C) = \frac{AD}{DB} \Big/ \frac{AC}{CB} = \frac{1}{(A,B,C,D)}$

$$(A,C,B,D) = \frac{AB}{BC} \Big/ \frac{AD}{DC} = \frac{AC+CB}{BC} \Big/ \frac{AD}{DB+BC} =$$

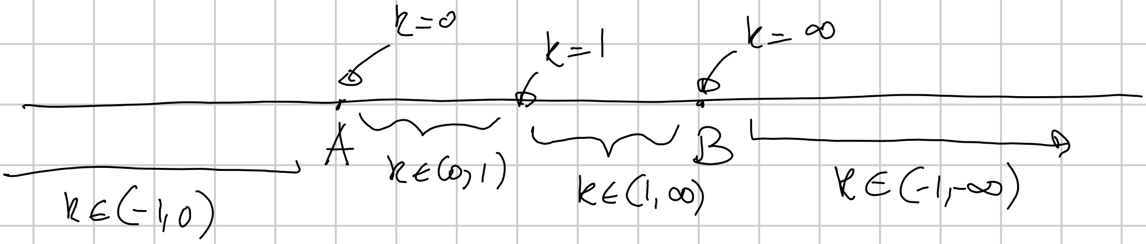
$$= \left(\frac{AC}{BC} - 1\right) \Big/ \frac{1}{\frac{DB}{AD} + \frac{BC}{AD}} = \dots$$

$$(B, A, C D) = \frac{BC}{CA} \Big/ \frac{BD}{DA} = \frac{1}{CA/BC} \Big/ \frac{1}{\frac{DA}{BD}} = \frac{AD}{DB} \Big/ \frac{AC}{CB} = \frac{1}{(A B, C D)}$$

Convenzioni 1) $AA = 0$

2) $\frac{a}{0} = \infty$ se $a \neq 0$

Oss 2: Dato $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dati A, B esiste un unico punto C tale che $\frac{AC}{CB} = k$



Convenzione 3) Introduciamo per ogni retta un "PUNTO ALL'INFINITO"

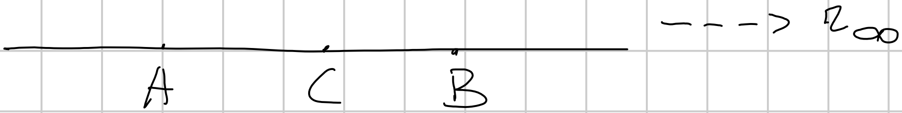
4) Rette parallele hanno lo stesso punto all'∞.

Oss 3: A, B, C allineati, r_∞ pt. all'∞ della loro retta

$$(A, B, C, r_\infty) = \frac{AC}{CB} \Big/ \boxed{\frac{Ar_\infty}{r_\infty B}} = -\frac{AC}{CB}$$

$= -1$

ad es se C è il pt. medio di AB, $(A, B, C, r_\infty) = -1$.



Oss 4: Se fisso A, B, C distinti su una retta r, la funzione

$$r \cup \{r_\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$X \longmapsto (A,B,C,X)$$

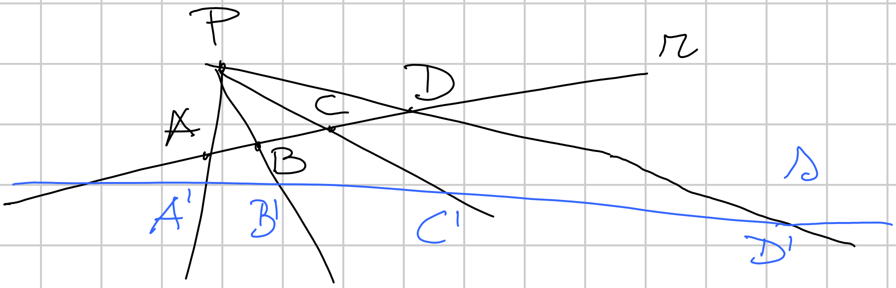
è bigettiva. Ad es se $X = A \to (A,B,C,A) = \infty$

se $X = B \to (A,B,C,B) = 0$

se $X = C \to (A,B,C,C) = 1$

se $X = r_\infty \to (A,B,C,R_\infty) = -\frac{AC}{CB}$

<u>Invarianza per proiezione</u>



$\Rightarrow (A,B,C,D) = (A',B',C',D')$

<u>dim</u>: <u>Teo dei SENI</u>

in $\overset{\triangle}{APC}$ $\quad \frac{AC}{\sin(A\hat{P}C)} = \frac{AP}{\sin(A\hat{C}P)}$ $\qquad$ in $\overset{\triangle}{BPC}$ $\quad \frac{BC}{\sin B\hat{P}C} = \frac{BP}{\sin(B\hat{C}P)}$

in $\overset{\triangle}{APD}$ $\quad \frac{AD}{\sin A\hat{P}D} = \frac{AP}{\sin A\hat{D}P}$ $\qquad$ in $\overset{\triangle}{BPD}$ $\quad \frac{DB}{\sin D\hat{P}B} = \frac{BP}{\sin B\hat{D}P}$

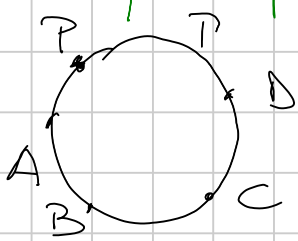
$$(A,B,C,D) = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(A\hat{P}C)}{\sin(C\hat{P}B)} \Big/ \frac{\sin(A\hat{P}D)}{\sin(D\hat{P}B)}$$

<u>angolo orientato</u>

$\Rightarrow$ invariante per proiezione. $\square$

<u>Convenzione</u>: 5) Il birapporto di 4 rette concorrenti si definisce così

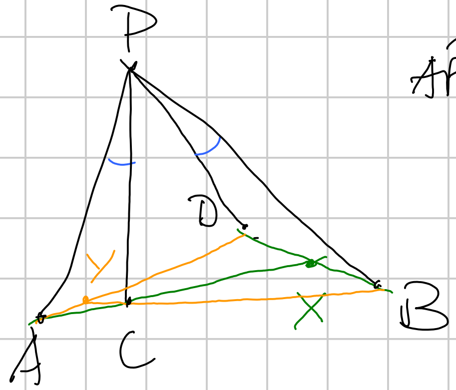
6) Il birapporto di 4 punti su una circonferenza si definisce come il birapporto delle 4 rette ottenute congiungendolo a un quarto punto sulla circonferenza



$$(A,B,C,D)_P = (PA, PB, PC, PD)$$

7) Se $A = P$, AA è la retta tangente in A a Γ.

Es



$\hat{APC} = \hat{DPB}$

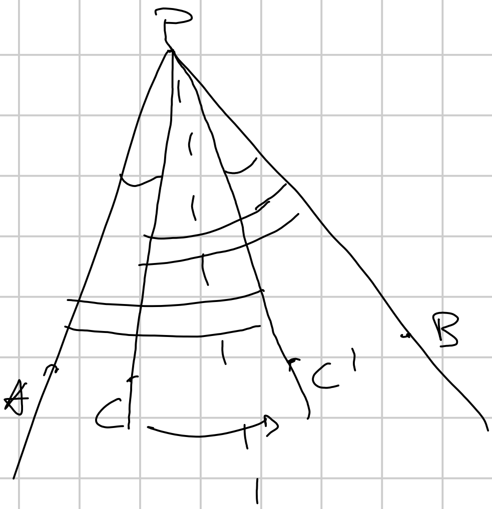
$X = AC \cap BD$
$Y = AD \cap BC$ $\Rightarrow$ $\hat{APY} = \hat{XPB}$

(PC, PD isogonali in $APB \Rightarrow PX, PY$ isogonali in APB)

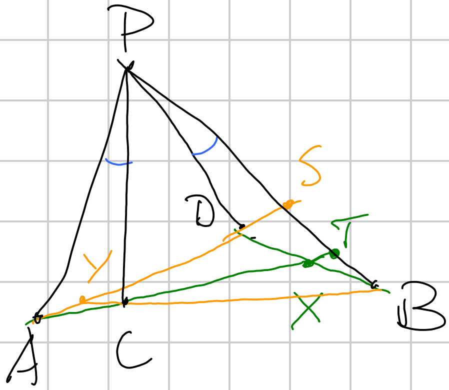
Dim: Considero $(PA, PB, PX, PC) \xrightarrow[\text{risp. alla bisett. di } \hat{APB}]{\text{simmetria}} (PB, PA, ?, PD)$

$\Rightarrow (PA, PB, PX, PC) = (PB, PA, ?, PD)$

$$\frac{\sin(APC)}{\sin(CPB)} \Big\downarrow \frac{\sin(BPC')}{\sin(C'PA)}$$



in modo che
$(PA, PB, PX, PC) = (PB, PA, PY, PD)$
ho finito
per la bigettività del birapporto.



(PA, PB, PX, PC)
|| proietto su AC da P
(A, T, X, C)
|| proietto da B su AD
$(A, S, D, X) \overset{}{\underset{\text{rette da } P}{=\!=\!=}} (PA, PB, PD, PY)$
$= (PB, PA, PY, PD)$. $\square$

Trasformazioni proiettive

1) Esiste una tr. pr. che manda 4 pti (a 3 a 3 non allineati) in 4 pti (a 3 a 3 non allineati)

2) Esiste una tr. pr. che manda una cf. in sé stessa e un punto al suo interno in un altro punto al suo interno.

3) Esiste una tr. pr. che manda una cf. in sé stessa e una retta non secante nella retta all'∞.

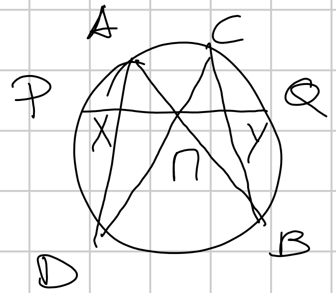
Una tr. proiettiva manda rette in rette, preserva l'incidenza e preserva il birapporto.

Es 1: $ABCD$ quadrilatero, $Q = AD \cap BC$
$P = AB \cap CD$
$R = AC \cap BD$

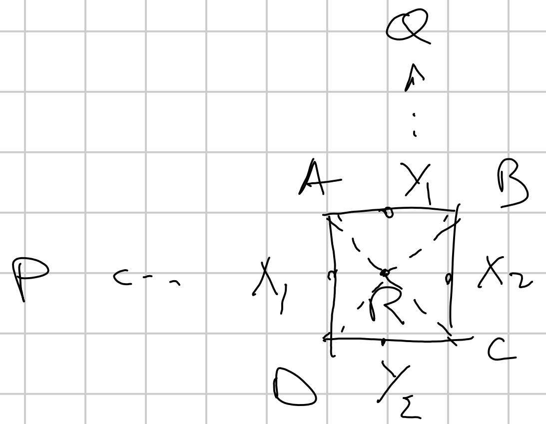
e $X_1 = PR \cap AD$, $X_2 = PR \cap BC$, $Y_1 = QR \cap AB$, $Y_2 = QR \cap CD$

Allora X_1Y_1, X_2Y_2, PQ concorrono.

Es 2: AB, CD, PQ corde di Γ concorrenti in M.
$X = PQ \cap AD$, $Y = PQ \cap BC$. Se $MP = MQ$ allora $MX = MY$



Sol 1: Mando A, B, C, D in un quadrato (tr. p.)



quindi ovvio che X_1Y_1 e X_2Y_2 sono parallele
$\Rightarrow$ si intersecano nella retta all'∞, cioè PQ.

Sol 2: Fisso Γ e mando M nel suo centro (tr. p.)

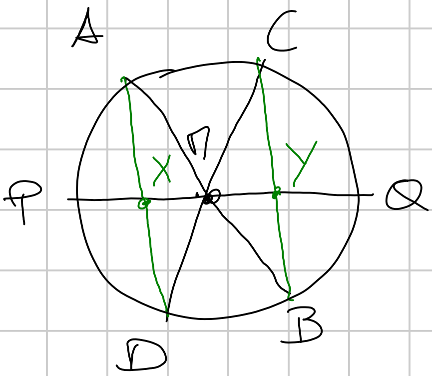
prima ovvero M pt. medio di PQ $\Rightarrow (P, Q, M, P_\infty) = -1$

con r_∞ pt. all'∞ di PQ

$\Rightarrow$ dopo avrò ancora $(P,Q,\Pi,r_\infty)=-1$

ma Π centro $\Rightarrow$ PQ diametro e $P\Pi=\Pi Q$ $\Rightarrow$ r_∞ è davvero il pt. all'∞ di PQ.

Ora ho



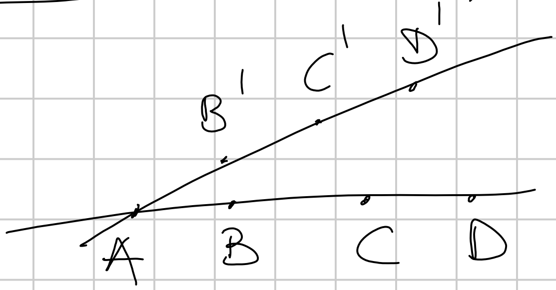
e per simmetria centrale risp. a Π la tesi è ovvia.

$\Rightarrow X\Pi=\Pi Y$

$\Rightarrow (X,Y,\Pi,r_\infty)=-1$

$\Rightarrow$ era vero anche prima. □

Lemma (di concorrenza)



BB', CC', DD' concorrono se e solo se $(A,B,C,D)=(A,B',C',D')$

Sol: ($\Longrightarrow$) ovvia.

($\Longleftarrow$) Sia $P=BB'\cap CC'$

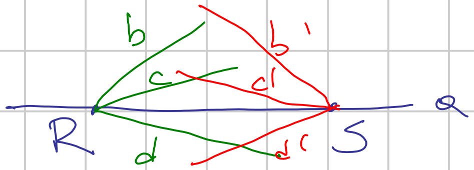
$$(A,B,C,D)=(A,B',C',D') \underset{\text{proietto da } P}{=} (A,B,C,PD'\cap AD)$$

$\Rightarrow D=PD'\cap AD$ per biiettività del birapporto (fissati 3 pti)

$\Rightarrow DD'$ passa per P. □

Oss: Tr. pr. che manda $BCC'B'$ in un quadrato

Per casa: Versione "duale" con rette concorrenti invece di pti allineati

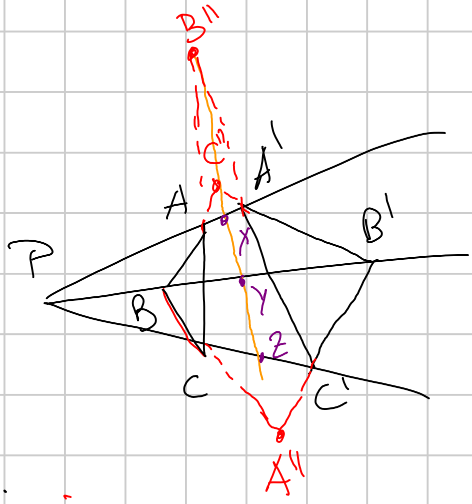


$(a,b,c,d)=(a,b',c',d')$

ma $b\cap b', c\cap c', d\cap d'$ sono allineati

Teo di DESARGUES

ABC, $A'B'C'$ triangoli



$A'' = BC \cap B'C'$
$B'' = AC \cap A'C'$
$C'' = AB \cap A'B'$

A'', B'', C'' allineati
$\Updownarrow$
AA', BB', CC' concorrenti

dim $\Leftarrow$ Voglio dim che $B''C''$, $\underbrace{BC, B'C'}_{A''}$ concorrono

$$(P,B,Y,B') \underset{C''}{=} (P,A,X,A') \underset{B''}{=} (P,C,Z,C')$$

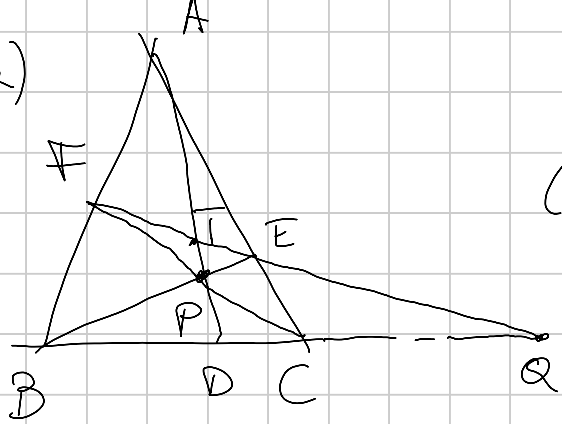
$\Rightarrow$ per la prop. prec. BC, $B'C'$, YZ sono concorrenti. $\square$

$\Rightarrow$ per caso.

Esempi di BIRAPPORTI

Notazione: A,B,C,D quaterna ARMONICA se $(A,B,C,D) = -1$.
(allineati)
A,B,C,D su Γ quadrilatero ARMONICO se $(A,B,C,D)_\Gamma = -1$

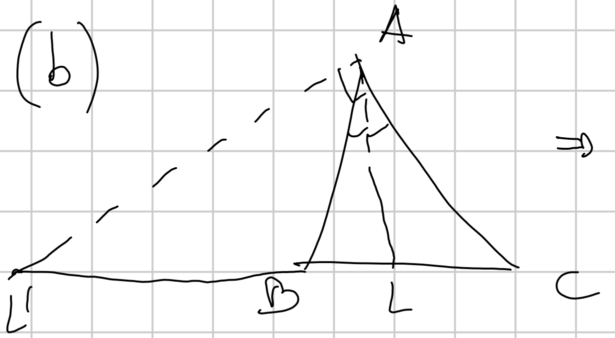
(a)



$$(B,C,D,Q) \underset{A}{=} (F,E,T,Q) \underset{P}{=} (C,B,D,Q)$$

$\Rightarrow (B,C,D,Q) = \pm 1$
ma $+1$ è impossibile con 4 pti distinti
$\Rightarrow (B,C,D,Q) = -1$.

(b)



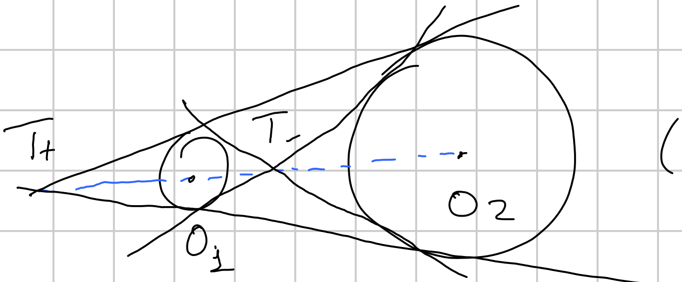
$\Rightarrow (B,C,L,L') = -1$

bisettrice

$$\frac{BL}{LC} = \boxed{\frac{BA}{AC}} \qquad \frac{BL'}{L'C} = -\boxed{\frac{BA}{AC}}$$

$$\Rightarrow \quad (B,C,L,L') = \frac{BL}{LC} \Big/ \frac{BL'}{L'C} = -1$$

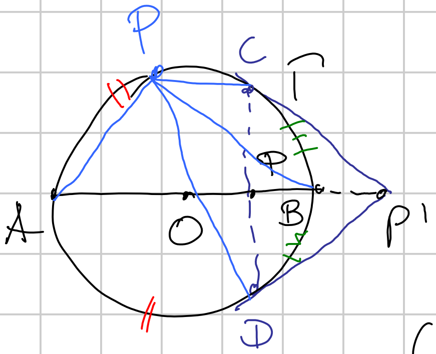
(c)



$$(O_1, O_2, T_+, T_-) = -1$$

$$\frac{O_1T_-}{T_-O_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \frac{O_1T_+}{T_+O_2} = -\frac{R_1}{R_2}$$

(d)

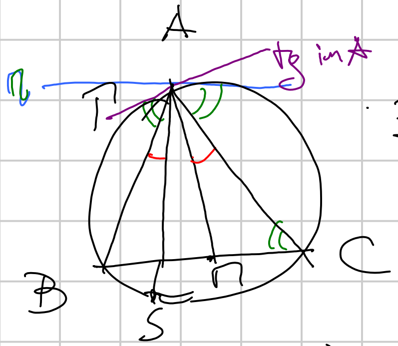


P' inverso di P in Γ (di diam AB)

$$\Rightarrow \quad (A,B,P,P') = -1$$

$$(A,B,P,P') \underset{C}{=} (A,B,D,C)_\Gamma = \frac{AD}{DB} \Big/ \frac{AC}{CB} = -1$$

(e)



$B\hat{A}S = M\hat{A}C$ $\quad$ M pt. medio

(AS simmediana)

$$\Rightarrow \quad (A,S,B,C)_\Gamma = -1$$

(teo dei seni)

$$(A,S,B,C) \underset{A}{=} (AA, AS, AB, AC) = (r, AM, AC, AB) =$$

simm. nella bisett di $B\hat{A}C$ $\qquad$ r parallela a BC per A

$$= (r_\infty, M, C, B) = (C, B, r_\infty, M) = (B, C, M, r_\infty) = -1$$

interseco con BC

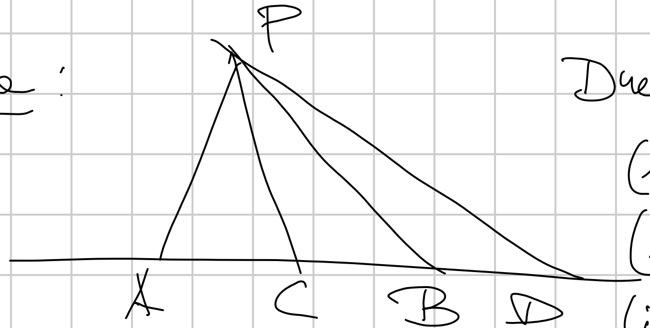
$\square$

<u>Lemma</u>: I birapporti si conservano sotto inversione

<u>dim</u>: Formule per le dist. sotto inversione.

2- QUATERNE ARMONICHE

Lemma:



Due implicano l'altra

(i) $(A,B,C,D) = -1$

(ii) PC biseca $\widehat{APB}$

(iii) $PC \perp PD$

Lemma 2

A,B,C,D allineati, O pto medio di AB

Allora le seguenti sono equivalenti:

(i) $(A,B,C,D) = -1$

(ii) $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$

(iii) $CA \cdot CB = CO \cdot CD$

(iv) $OC \cdot OD = OA^2$

(v) $\dfrac{OC}{OD} = \left(\dfrac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{BD}\right)^2$

Lemma 3

A,B,C,D su Γ. Le seguenti sono equivalenti

(i) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$

(ii) BD simmediana di $\overset{\triangle}{ABC}$

(iii) le tg in A e C a Γ si incontrano su BD

(iv) $(A,C,B,D) = -1$

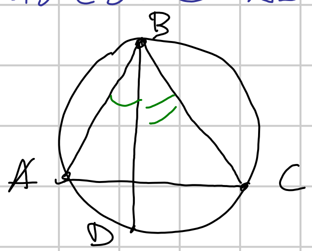
(v) Se M è il pt. medio di AC, MD e MB sono simmetriche risp. ad AC

(vi) la bisettrice di $\widehat{ABC}$ e quella di $\widehat{ADC}$ si incontrano su AC

(vii) $\dfrac{AB^2}{AD^2} = \dfrac{MB}{MD}$.

dim: (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) [G3]

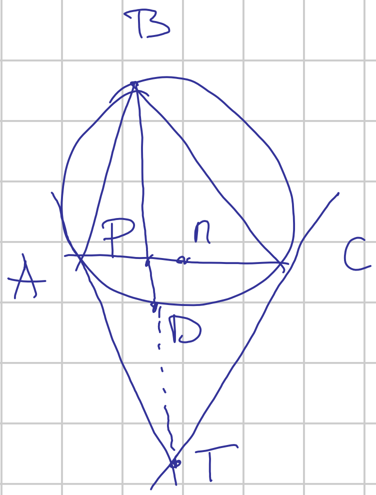
(i) $AB \cdot CD = BC \cdot AD \Longleftrightarrow \left|\dfrac{AB}{BC}\right| = \left|\dfrac{AD}{DC}\right| = \left|\dfrac{\sin A\hat{B}D}{\sin C\hat{B}D}\right| = \dfrac{\mathrm{dist}(D,AB)}{\mathrm{dist}(D,BC)}$



$\Longleftrightarrow$ $D \in$ simmediana (ii)

(i) $\Longleftrightarrow$ $(A,C,B,D) = -1$ ok. (iv)

(v)



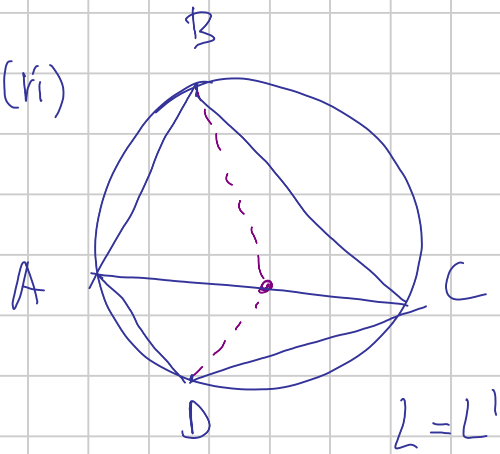
$(A,C,B,D) = -1 \iff T \in BD$

$\widehat{TnP} = \widehat{TnA} = \frac{\pi}{2}$

$(B,D,P,T) \underset{\text{da } C \text{ su } \Gamma}{=} (B,D,A,C) = (A,C,B,D) = -1$

$\iff Pn, nT$ bisett. int. e est. di $\widehat{BnD}$.

(vi)



BL bisett. di $\widehat{ABC}$ $\quad L, L' \in AC$

DL' bisett. di $\widehat{ADC}$

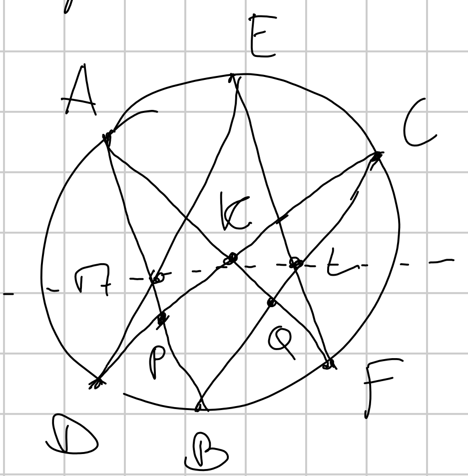
$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} \qquad \frac{AL'}{L'C} = \frac{AD}{DC}$

$L = L' \iff \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \iff (i)$

(vii) conto di trig. $\square$

Teo di PASCAL

Γ cp. $\quad A,B,C,D,E,F$ su Γ $\Rightarrow$ $AB \cap DE = M$, $BC \cap EF = L$, $CD \cap FA = K$ sono allineati



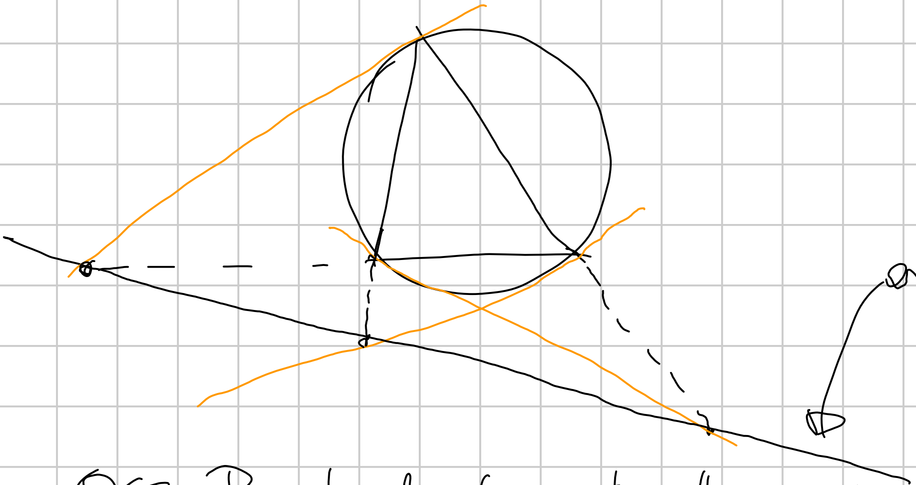
dim: Se dim che $MK \cap BC = L$ ho finito.

$(C,L,Q,B) \underset{\text{da } F \text{ su } \Gamma}{=} (C,E,A,B) \underset{\text{da } D \text{ su } AB}{=}$

$= (P,M,A,B) \underset{\text{da } K \text{ su } BC}{=} (C, MK\cap BC, Q, B)$

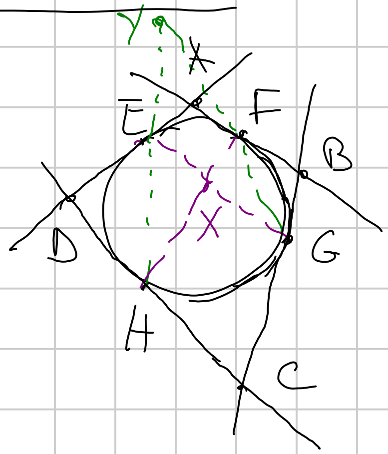
$\Rightarrow L = MK \cap BC$ per la biy. del bir. $\square$

Es: $AABBCC \Rightarrow AA \cap BC, BA \cap CC, BB \cap AC$ sono allineati



OSS: Permutando i 6 punti ottengo rette diverse!!

Teo di NEWTON



AC, BD, EG, FH concorrono.

dim: $X = EG \cap FH$
$Y = EH \cap FG$

·) Pascal su EGGFHH

$EG \cap FH$, $GG \cap HH$, $GF \cap EH$ sono allineati
$\;\;\; \| \quad\quad\; \| \quad\quad\; \|$
$\;\;\; X \quad\quad C \quad\quad Y$

·) Pascal su EEHFFG

$EE \cap FF$, $EH \cap FG$, $HF \cap GE$ sono allineati
$\;\;\; \| \quad\quad\; \| \quad\quad\; \|$
$\;\;\; A \quad\quad Y \quad\quad X$

$\Rightarrow$ A, C, X, Y sono allineati $\Rightarrow$ AC, GE, HF concorrono. $\square$

Teo di BRIANCHON

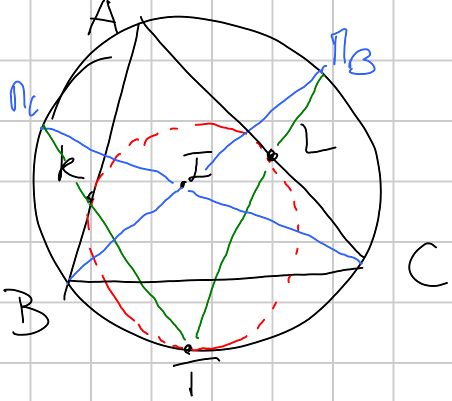
ABCDEF circoscritto a Γ $\Rightarrow$ AD, BE, CF concorrono.

(Dim x esercizio)

a, b, c, d, e, f rette tangenti a Γ, $A = a \cap b$, $B = b \cap c$, $C = c \cap d$, $D = d \cap e$, $E = e \cap f$, $F = f \cap a$

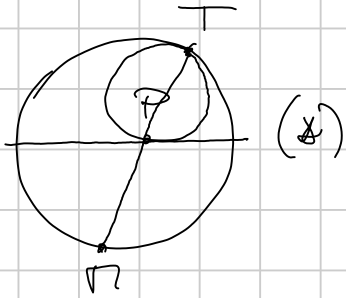
allora AD, BE, CF concorrono.

ES:



I incentro

K, I, L allineati



dim: (*) $\Rightarrow$ M_C, K, T allineati
M_B, L, T allineati

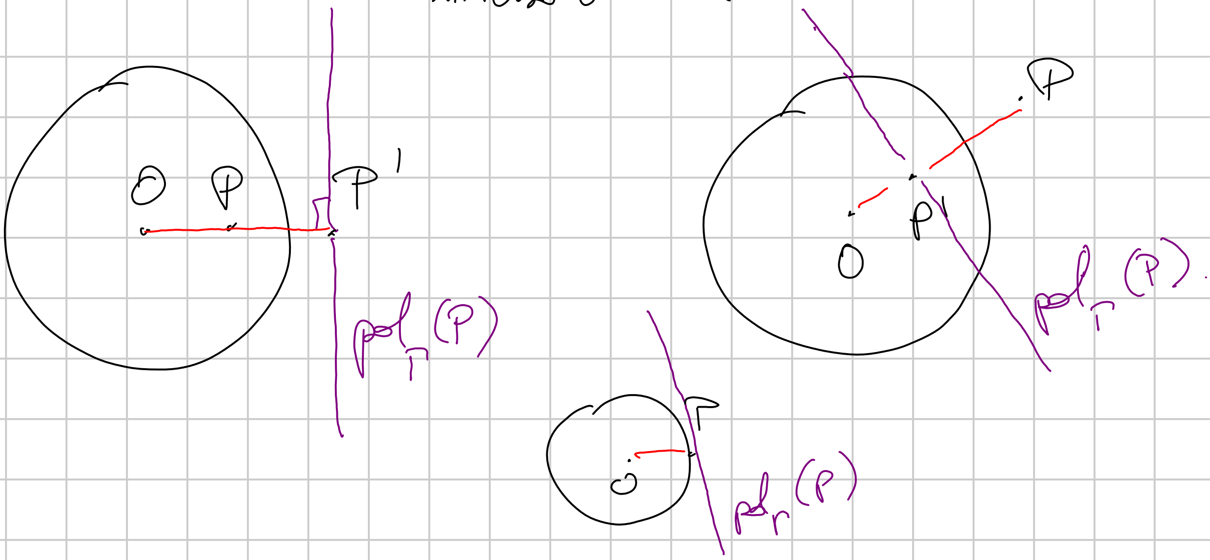
. Pascal su $BACM_CTM_B$

$\Rightarrow BA \cap M_CT,\ AC \cap TM_B,\ CM_C \cap BM_B$ sono allineati

$\Rightarrow K, L, I$ allineati. $\square$

③ POLI & POLARI

Γ cf. di centro O. La POLARE di un punto P risp. a Γ è la perpendicolare a OP che passa per P' inverso di P in Γ.



Se r è una retta, il POLO di r rispetto a Γ è il punto P tale che $pol_\Gamma(P) = r$ e si scrive $pol_\Gamma(r) = P$.

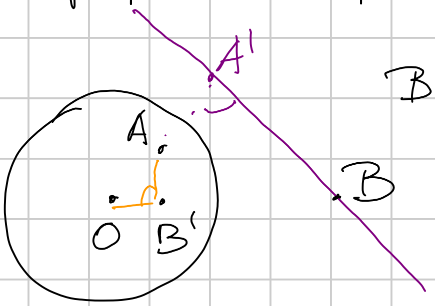
Proprietà elementari

(a) $A \in pol_\Gamma(B) \Longleftrightarrow B \in pol_\Gamma(A)$ (teo di La Hire)

(b) $pol_\Gamma(r \cap s)$ = retta per $pol_\Gamma(r)$ e $pol_\Gamma(s)$

(c) $pol_\Gamma(A) \cap pol_\Gamma(B) = pol_\Gamma(AB)$

dim: (a)



$B \in pol_\Gamma(A) \iff B\hat{A'}O = \frac{\pi}{2}$

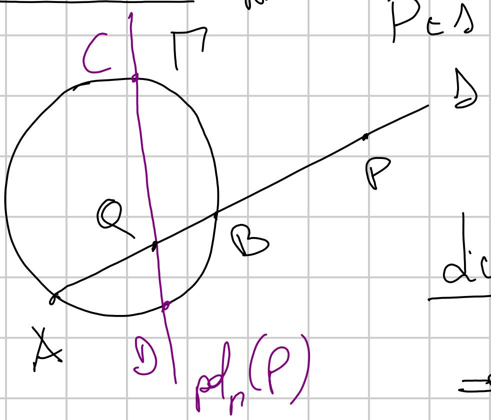
$\iff A\hat{B'}O = \frac{\pi}{2}$

$\iff A \in pol_\Gamma(B)$.

(b) e (c) x esercizio.

Oss: $pol_\Gamma(P) = \{ pol_\Gamma(r) \mid P \in r \}$

Polarità e birapporto



$P \in s \qquad Q = s \cap pol_\Gamma(P) \qquad \{A,B\} = s \cap \Gamma$

$\Rightarrow (A,B,P,Q) = -1$

dim: $\{C,D\} = pol_\Gamma(P) \cap \Gamma$

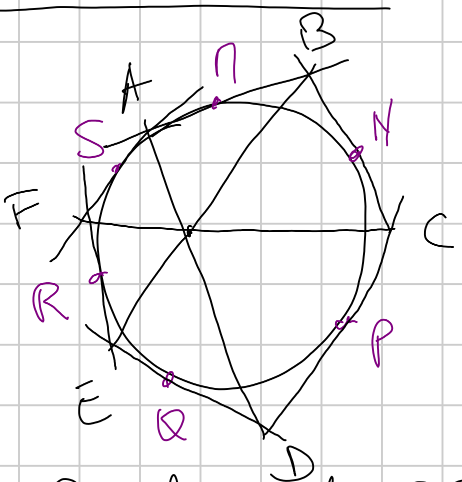
$\Rightarrow CC \cap DD = P \Rightarrow CDBA$ quad. armonico

$\Rightarrow (A,B,C,D) = -1$

proietto da C su s $\Rightarrow (A,B,P,Q) = -1$.

(Lemma della POLARE)

Dim di BRIANCHON



Prendo poli/polari di tutto

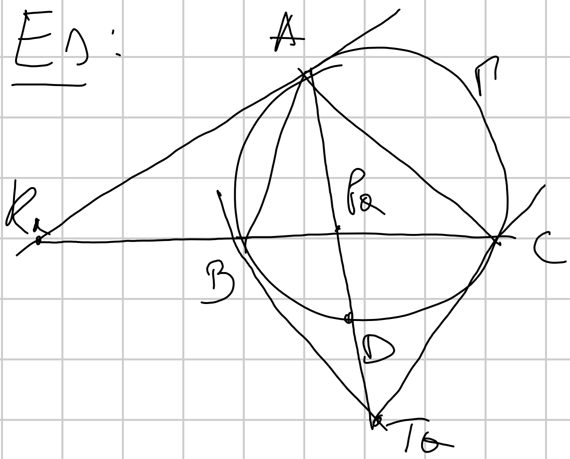
$pol_\Gamma(A) = MS \quad pol_\Gamma(B) = MN \quad pol_\Gamma(C) = NP$

$pol_\Gamma(D) = PQ \quad pol_\Gamma(E) = QR \quad pol_\Gamma(F) = SR$

per Pascal so che $\underbrace{MS \cap PQ}_{=\,pol_\Gamma(AD)}$, $\underbrace{MN \cap QR}_{=\,pol_\Gamma(BE)}$, $\underbrace{NP \cap SR}_{=\,pol_\Gamma(CF)}$ sono allineati

$\Rightarrow$ AD, BE, CF concorrono.

Es:



$BC = pol_\Gamma(T_a)$

$K_a \in BC = pol_\Gamma(T_a)$ (La Hire)

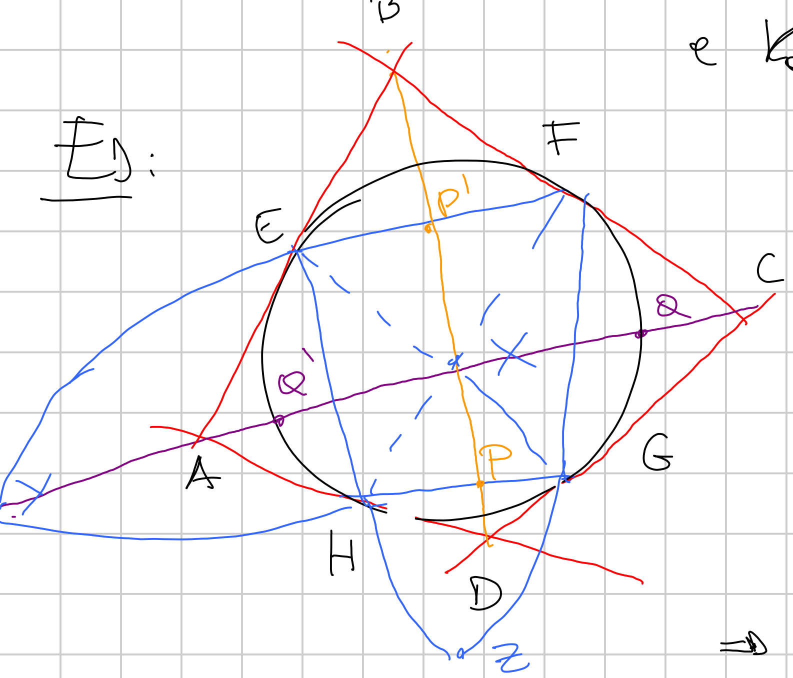
$\Rightarrow T_a \in pol_\Gamma(K_a)$

ma $A \in pol_\Gamma(K_a) \Rightarrow pol_\Gamma(K_a) = T_aA$

$\Rightarrow (B, C, P_a, K_a) = -1$

e K_aD è tangente a Γ

Es:



A, X, Y, C
B, X, Z, D allineati

$B = pol_\Gamma(EF)$
$D = pol_\Gamma(HG)$

$\Rightarrow Y = EF \cap HG = pol_\Gamma(BD)$

$P = BD \cap HG \Rightarrow (H, G, Y, P) = -1$
$P' = BD \cap EF \Rightarrow (E, F, Y, P') = -1$

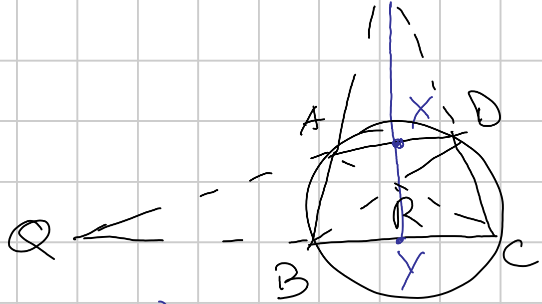
$\Rightarrow (Q, Q', X, Y) = -1$

Teo di BROCARD

ABCD quadrilatero ciclico, centro O

$P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap DA$, $R = AC \cap BD$.

Allora P, Q, R sono i poli di QR, PR, PQ rispettivamente e O è l'ortocentro di PQR.



Dim:

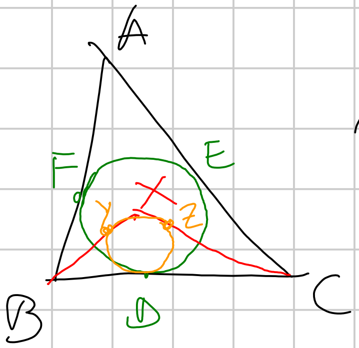
$(B, C, Q, Y) = (A, D, Q, X) = -1$

$\Rightarrow X, Y \in pol_\Gamma(Q)$ ovvero $PR = pol_\Gamma(Q)$

idem per gli altri due.

Inoltre per def. di polare $OR \perp PQ$ e così via $\Rightarrow O$ ortocentro.

Es 1



X t.c. l'incerchio di $B\hat{X}C$ è tg in D a BC

$\Rightarrow$ YZEF ciclico.

Es 2: Dim. la retta di Eulero usando DESARGUES.

BMO 2022-1

IMO 2014-4

IMO 2023-2

IMO SL 2017-4

APMO 2012-4