Titolo nota 04/02/2006

1. EISENSTEIN ai interi

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ p primo

$p \nmid a_n$, $p \mid$ tutti altri a_i $p^2 \nmid a_0$

$\Rightarrow f$ IRRIDUCIBILE IN $\mathbb{Z}[x]$

Corollario $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$ irriduc. (p primo)

2. Grafo con n vertici e k lati $\Rightarrow$ almeno $\frac{k(4k-n^2)}{3n}$ triangoli

3. $f(x^4+y) = x^3 f(x) + f(f(y))$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)=0$ numero finito di soluz.

$\boxed{\text{EISENSTEIN}}$

$a_n x^n + p x^{n-1} e_{n-1} + \dots + p e_1 x + p e_0$ $\quad p \nmid e_0$

$(b_0 + b_1 x + \dots + b_r x^r)(c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-r} x^{n-r})$

$b_0 c_0 = p e_0$ $\quad b_0 = kp \quad c_0 \not\equiv 0 \ (p)$

$b_0 c_1 + b_1 c_0 = p e_1$

$\dots$

$b_0 c_r + b_1 c_{r-1} + b_2 c_{r-2} + \dots + b_r c_0 = p e_r$

$b_r c_{n-r} = kp$ PER INDUZIONE ASSURDO!

$$\{b_0, b_1, \dots, b_n\} \equiv 0 \quad (p)$$

$$b_{n+1} c_0 + \dots = p\, e_{n+1}$$

$$1 + x + \dots + x^{p-1} = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

$k < p$

$\binom{p}{k}$

$$\frac{(x+1)^p - 1}{x}$$

$$x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \dots + \binom{p}{2} x + p$$

$$a_n x^n + \dots + a_0 = (b_k x^k + \dots + b_0)(c_{n-k} x^{n-k} + \dots + c_0)$$

$$\downarrow$$

$$\overline{a}_n x^n = \overline{b}_k x^k \cdot \overline{c}_{n-k} x^{n-k}$$

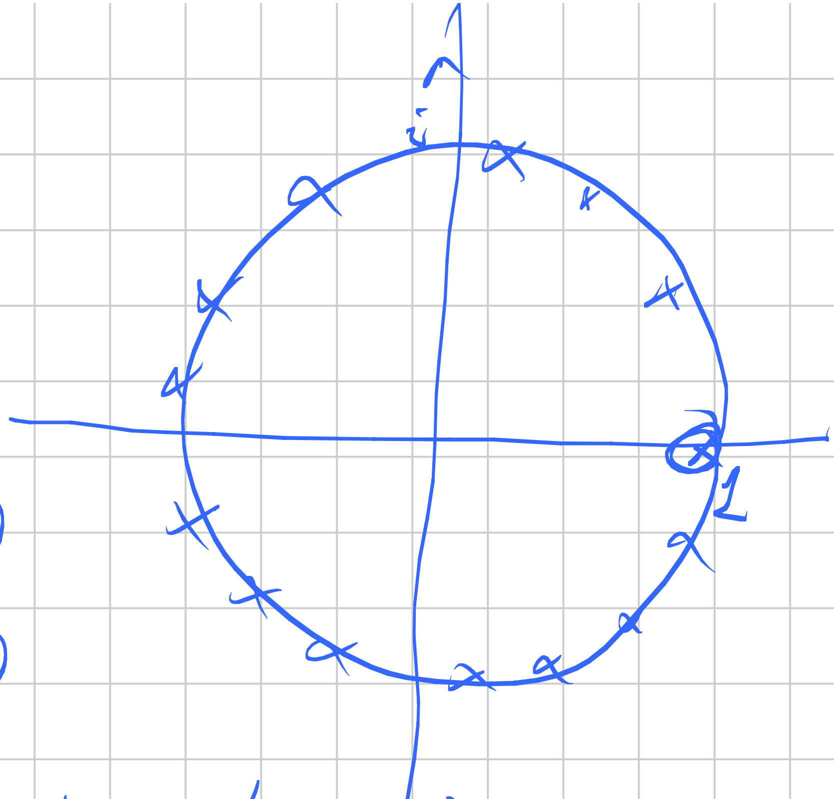
$$\overline{b}_0 = \overline{0} \qquad \overline{c}_0 = 0$$

$$p \mid b_0 \qquad c_0 \mid p$$

$$p^2 \mid b_0 c_0 = a_0 \qquad \underline{\text{ASSURDO}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{RIDUCIBILE} \Rightarrow \text{RID. MOD. } p \ \forall p \\ \text{IRR. MOD. } p \ (\text{per 1 } p) \Rightarrow \text{IRRIDUCIBILE} \end{array}}$$

$$\boxed{\frac{x^p-1}{x-1}}$$



$$x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \dots + x + 1)$$

$$\underline{x^n - 1} = \prod_{d \mid n} \underline{\underline{f_d(x)}}$$

$f_d(x)$ ha per radici i numeri di ordine d

$\downarrow$

grado $= \phi(d)$

$$\frac{X^{pq}-1}{(x^p-1)(x^q-1)}(x-1)$$

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$$

$$\frac{(X^n-1)\;\prod\left(X^{\frac{n}{p_i p_j}}-1\right)}{\prod\left(X^{\frac{n}{p_i}}-1\right)\;\prod\left(X^{\frac{n}{p_i p_j p_k}}-1\right)} \Longrightarrow \text{sub } D$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

$$D = \sum_{d \mid n} \mu(d)\frac{n}{d} = \phi(n)$$

$$\left(\frac{x^n-1}{x^d-1},\, x^d-1\right) \Big| \, n$$

$$\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$X^{16}+1$$

$$\left(\frac{x^p-1}{x-1},\ x-1\right) \Big|\ p \qquad x^p \equiv x \pmod p$$

$$|$$

$$x^{p-1}+\dots+x+1 = Q(x)(x-1)+r$$

$$x \equiv 1 \pmod p$$

$$x = kp+1$$

$$\frac{x^p-1}{x-1} = \frac{(kp+1)^p-1}{kp} = \frac{\quad + kp^2}{kp} \quad \dots \quad p$$

$$f(x^4+y) = x^3 f(x) + f(f(y))$$

1. $x=0 \qquad f(f(y)) = f(y)$
2. $x = y = -1 \qquad f(0) = -f(-1) + f(-1) = 0$
3. $y = 0 \qquad f(x^4) = x^3 f(x)$
4. $f(x^4+y) = f(x^4) + f(y)$
5. $f(x^4) = \cancel{-x^3} \cdot f(-x) = \cancel{x^3} f(x)$
6. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$a \neq b \quad | \quad f(a) = f(b)$

$f(2a) = 2f(a) = 2f(b) = f(2b)$

$2a \neq 2b$

$x = ma \qquad y = -mb \qquad f(m(a-b)) = f(ma) - f(mb) = 0$

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad \forall a \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{Q}$ - linearità

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}$$

f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $f(x)=0$ ha unica sol. $x=0$

se è una Cauchy

$$f(a) = f(b)$$

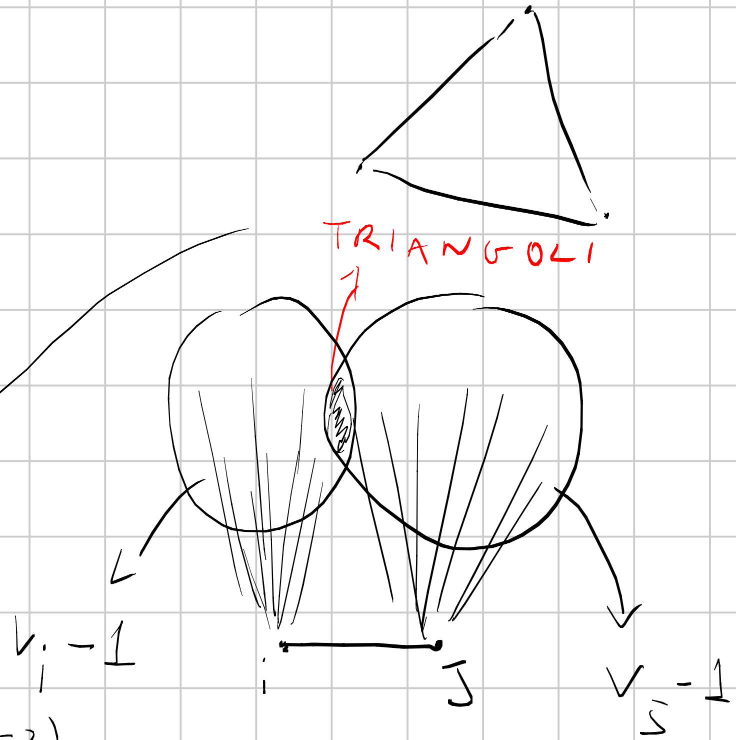
$$f(a-b) = f(a) - f(b) = 0$$

DATO UN GRAFO n VERTICI

k LATI

T = NUMERO DI TRIANGOLI

$$T \geq \frac{k(4k - n^2)}{3n}$$

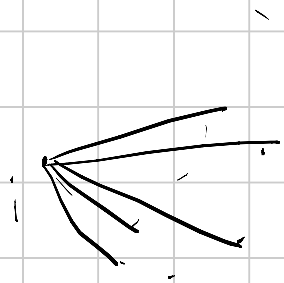


DOUBLE - COUNTING

$$T_{ij} \geq (v_i - 1) + (v_j - 1) - (n - 2)$$

$$T = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\text{coppie}\\ \{i,j\}\ \text{coll.}}} T_{ij}}{3} \geq \frac{1}{3}\left(\sum v_i \cancel{-1} + v_j \cancel{-1} - (n \cancel{-2})\right) =$$

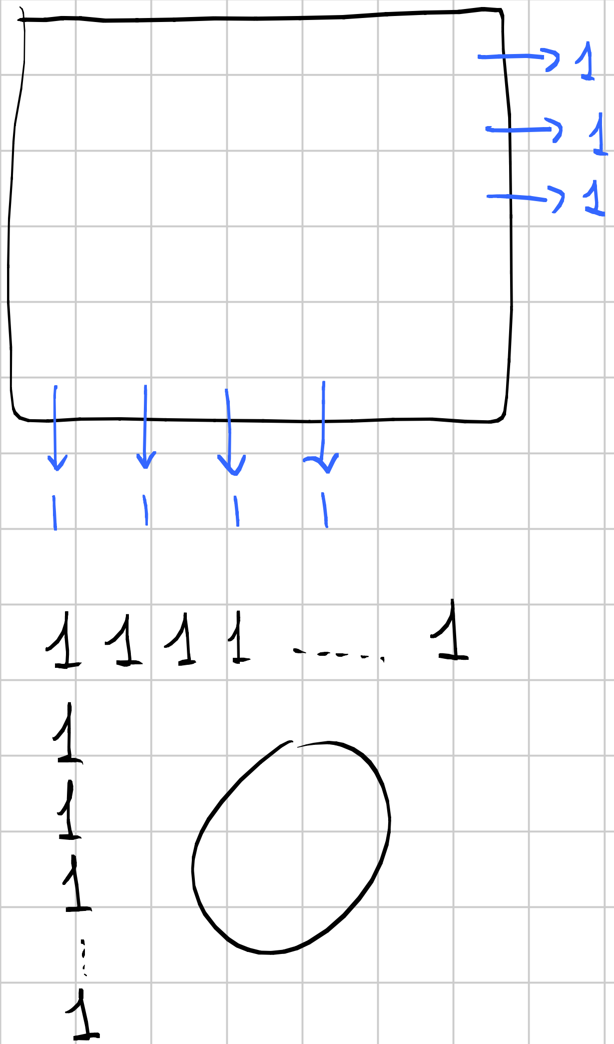
$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{\substack{\text{COPPIE}\ \{i,j\}\\ \text{LINKED}}} (v_i + v_j) - Kn\right] =$$



$$= \frac{1}{3}\left[\sum v_i^2 - Kn\right] \geq \frac{1}{3}\left[\frac{\left(\sum v_i\right)^2}{n} - Kn\right] = \frac{1}{3}\,\frac{4k^2 - kn^2}{n}$$

C.V.D.

J. WOPN



a_{ij}

Tesi: posso trovare n elementi posti in righe e colonne diverse $\neq 0$

MARRIAGE THEOREM

n Boys $\quad$ n Girls

Dato i-esimo ragazzo, sia G_i l'insieme delle ragazze che gli piacciono

Problema sposare ogni ragazzo con una ragazza che gli piaccia in modo iniettivo

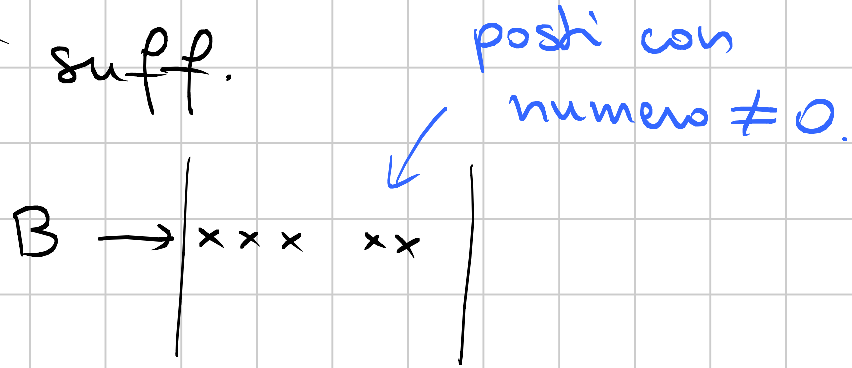
Condizione NECESSARIA

Dati $\quad i_1, \dots, i_k \quad$ k ragazzi

$$|G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}| \geq k$$

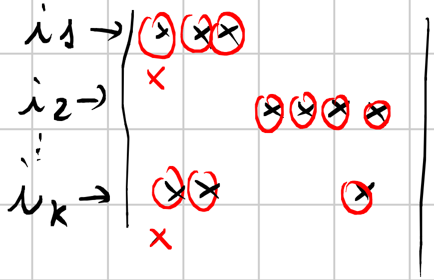
Teo.: la condizione è suff.

righe = Boys
colonne = Girls



Basta verificare l'Hp.

L'unione delle colonne con almeno una $\times$



Somma righe

$K = R_{i_1} + \dots + R_{i_k} \leq$ Somma colonne corrisp.

Poiché i num. erano $\geq 0 \Rightarrow \#$ colonne $\geq k$.

Induzione su n

$n \Rightarrow n+1$

- Esiste b_1 a cui piace 1 sola
  Se la prende, ed i restanti n
  soddisfano l'Hp.

- Esiste k ed esistono $b_1, \dots, b_k$ tali
  $$|G_1 \cup \dots \cup G_k| = k$$
  Il problema si spezza in 2
  i primi k e gli altri

- $\forall k \leq n$ $\quad |G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}| > k$

Prendo un ragazzo a caso, gli faccio sposare una che gli piace e verifico che gli altri n soddisfano anche l'Hp