WC 2008 DISUGUAGLIANZE

Titolo nota 23/01/2008

$a, b, c > 0$ distinti

$$\left| \sum_{cyc} \frac{a+b}{a-b} \right| > 1$$

$$\left| \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right| > 1$$

$$\left| \frac{\sum_{cyc} (a+b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \right| > 1$$

$$\left| \sum_{cyc} (a+b)(b-c)(c-a) \right| > \left| (a-b)(b-c)(c-a) \right|$$

$$\left| \sum_{cyc} (a+b)(-c^2+bc-ab+ac) \right| > \left| \sum_{cyc} ab^2 - \sum_{cyc} a^2 b \right|$$

$$\left|\sum_{cyc} -ac^2 + abc - \cancel{a^2b} + \cancel{a^2c} - bc^2 + \cancel{b^2c} - \cancel{ab^2} + abc\right| > RHS$$

$$\left| 6abc - \sum_{cyc} a^2b - \sum_{cyc} ab^2 \right| \overset{?}{>} \Big| \underbrace{\sum_{cyc} ab^2}_{C_1} - \underbrace{\sum_{cyc} a^2b}_{C_2} \Big|$$

$$\shortparallel$$

$$\left| \sum_{sym} (abc - a^2b) \right|$$

1^a possibilità: elevo al quadrato

$$|6abc - C_1 - C_2| > |C_1 - C_2|$$

2^a possibilità: $|A| < B \iff -B < A < B$

Oss. $C_1 + C_2 \geq 6abc$ (AM-GM o bunching!!!)

$$\underbrace{|C_1 - C_2|}_{A} < \underbrace{C_1 + C_2 - 6abc}_{B}$$

$$-c_1 - c_2 + 6abc \underset{2}{<} c_1 - c_2 \underset{1}{<} c_1 + c_2 - 6abc$$

1 $\quad \cancel{c_1} - c_2 < \cancel{c_1} + c_2 - 6abc \qquad 2c_2 > 6abc \qquad$ AM-GM

2 $\quad c_1 - \cancel{c_2} > -c_1 - \cancel{c_2} + 6abc \qquad 2c_1 > 6abc \qquad$ AM-GM.

—— o —— o —— o ——

$$|6abc - c_1 - c_2|^2 > |c_1 - c_2|^2$$

$$36a^2b^2c^2 + \cancel{c_1^2} + \cancel{c_2^2} - 12abc\,c_1 - 12abc\,c_2 + 2c_1c_2 \overset{?}{>} \cancel{c_1^2} + \cancel{c_2^2} - 2c_1c_2$$

$$9a^2b^2c^2 + c_1c_2 > 3abc(c_1 + c_2)$$

$(3abc - c_1)(3abc - c_2) \overset{?}{>} 0 \qquad$ stessa cosa di sopra.

—— o —— o ——

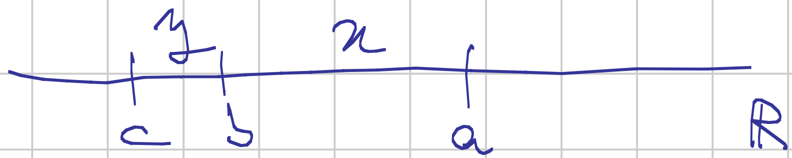
$$\left| \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right| > 1 \qquad a > b > c$$

$a > b > c \to$ vedi successivo

$c > b > a \to$ scambio a e c

$\dfrac{a+b}{a-b} \to \dfrac{c+b}{c-b} \to$ cambio segno

$\dfrac{b+c}{b-c} \to \dfrac{b+a}{b-a} \to$



$x = a - b$

$y = b - c$

$$\frac{2b+x}{x} + \frac{2c+y}{y} - \frac{2c+x+y}{x+y}$$

$$= 1 + \frac{2b}{x} + 1 + \frac{2c}{y} - 1 - \frac{2c}{x+y} \geq$$

$$\geq 1 + 2c\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right) \geq 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x+y}$$

2) $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a(a^2+bc)}{b+c} \overset{?}{\geq} a^2+b^2+c^2$

$$a^2+bc = (a-b)(a-c) + a(b+c)$$

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)+a^2(b+c)}{b+c} \overset{?}{\geq} a^2+b^2+c^2$$

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} \overset{?}{\geq} 0 \qquad a \leq b \leq c$$

$$\frac{a(b-a)(c-a)}{b+c} + \boxed{\frac{c(c-a)(c-b)}{a+b}} \overset{?}{\geq} \boxed{\frac{b(b-a)(c-b)}{a+c}}$$

$$\frac{a^3+abc}{b+c}+\frac{b^3+abc}{c+a}+\frac{c^3+abc}{a+b}\geq a^2+b^2+c^2$$

$$\sum_{cyc}(a^3+abc)(a+c)(a+b)\geq (a^2+b^2+c^2)\underbrace{(a+b)(b+c)(c+a)}_{\left(2abc+\sum_{sym}a^2b\right)}$$

$$\sum_{cyc}(a^3+abc)(a^2+ab+bc+ca)$$

$$\sum_{cyc}a^5+\cancel{\sum_{cyc}a^4b}+\cancel{\sum_{cyc}a^3bc}+\cancel{\sum_{cyc}a^4c}$$

$$+\cancel{\sum_{cyc}a^3bc}+\cancel{3}\sum_{cyc}a^2b^2c$$

$$\geq \cancel{2}\cancel{\sum_{cyc}a^3bc}+\cancel{\sum_{sym}a^4b}+$$

$$+\sum_{sym}a^3b^2+\cancel{\sum_{sym}a^2b^2c}$$

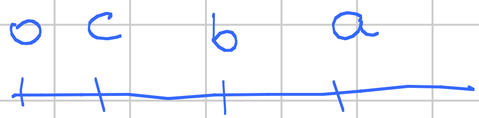
$$2\sum_{cyc}a^5+2\sum_{cyc}a^2b^2c\overset{?}{\geq}2\sum_{sym}a^3b^2$$

$$\sum_{sym} \left(a^5 + a^2b^2c - 2a^3b^2\right) \geq 0 \qquad \text{SCHUR}$$

Schur classico $$\sum_{sym} \left(a^3 + abc - 2a^2b\right) \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c) \geq 0$$



$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$+$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ $+$

1 $\qquad$ 2

1 batte 2 in valore assoluto

$$\sum_{cyc} a(a^2-b^2)(a^2-c^2) \overset{?}{\geq} 0$$

$$\underset{+}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\underset{-}{b(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\underset{+}{c(c^2-b^2)(c^2-a^2)}\ge 0$$

$a\ge b\ge c$

— o — o —

$$\sum_{cyc} x^r (x-y)(x-z)\ge 0 \qquad r>0$$

$$\sum_{cyc} f(x)(x-y)(x-z)\ge 0$$

f crescente e positiva

$$\sum_{cyc} \overbrace{x}^{g^{-1}(a)}\left(\overbrace{g(x)}^{a}-\overbrace{g(y)}^{b}\right)\left(\overbrace{g(x)}^{a}-\overbrace{g(z)}^{c}\right)\ge 0$$

battere

$$x\left(\cancel{g(x)-g(y)}\right)\left(g(x)-g(z)\right)\ge y\left(\cancel{g(x)-g(y)}\right)\left(g(y)-g(z)\right)$$

g crescente

$z \quad y \quad x$

$$g(x)\ge g(y) \Rightarrow g(x)-g(z)\ge g(y)-g(z)$$

$\boxed{\text{METODO ABC}}$ Disuguaglianze a 3 variabili

$\boxed{1^a}$ Funzioni simmetriche

$\boxed{2^a}$ Lemma ABC

$$\underbrace{\boxed{x^3+y^3+z^3+\underbrace{3xyz}_{3P}-\sum_{sym} x^2y}}_{LHS}$$

$S = x+y+z$

$P = xyz$

$Q = xy+yz+zx$

$$x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3 - 3\sum_{sym} x^2y - 6xyz$$

$$\sum_{sym} x^2y = (x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$$

$$LHS = S^3 - 4(SQ-3P) - 6P + 3P$$

$$= S^3 - 4SQ + 9P$$

Lemma ABC Posso sostituire una terna (x,y,z) con una terna (a,a,b) in modo che

* S sia la stessa $(x+y+z = a+a+b)$
* Q sia la stessa $(xy+yz+zx = a^2+2ab)$

Inoltre ci sono 2 soluzioni
→ una con P + grande
→ una con P + piccolo

Il mio CLAIM è $LHS \geq 0$

Conseguenza: se cerco il minimo di LHS (o se cerco il max) posso ridurmi a terne di tipo (a,a,b)

FUNZIONA TUTTE LE VOLTE CHE L'ESPRESSIONE in P, Q, S è MONOTONA nella variabile P una volta fissate S e Q.

— o — o —

$a_1, \dots, a_n$ $\qquad I \subseteq \{1, \dots, n\}$

Segno qualunque

$$\left(\sum_{i \in I} a_i\right)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i + a_{i+1} + \dots + a_j)^2$$

$1, 2, \dots, \underbrace{i, \dots, j}, \dots, n$

① Cercare di capire "il caso peggiore": un po' + e un po' −

I = tutti gli indici per cui a_i +
" " " " " a_i −

WLOG (a meno di cambiare i segni)

② Posso assumere che sia a segno alterno
(se la so dimostrare così, la so dim. sempre)

$\underbrace{\overset{+}{a_{1000}}, \overset{+}{a_{1001}}}$

sostituisco con
la somma

$+, -, +, -, +$

LHS non cambia
RHS ho meno termini

③ Il caso peggiore è $n = 2k+1$ dispari

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k+1})^2 \leq RHS$$

collaborano "meglio" i
tratti di lunghezza
dispari

④ Sostituisco il RHS con i soli pezzi di lunghezza dispari

$$\boxed{n=5} \quad (a+c+e)^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 + (a-b+c)^2 + (-b+c-d)^2 + (c-d+e)^2 + (a-b+c-d+e)^2$$

Accorpare ogni termine con "lui meno gli estremi"

RHS = QM LHS = AM

$$\sqrt{\frac{RHS}{9}} \geq \frac{\text{Somma di tutte le coppie di positivi} + \text{Somma singoli positivi}}{9}$$

$$(a-b+c-d+e) + (-b+c-d) \qquad \text{NO}$$

$$(a-\cancel{b}+\cancel{c}-\cancel{d}+e) - (-\cancel{b}+\cancel{c}-\cancel{d}) = a+e$$

a compare come $a+c$, $a+e$, a

$$\sqrt{\frac{RHS}{9}} \geq \frac{\cancel{3} \text{ somma positivi}}{\cancel{9}\ 3}$$