RELAZIONI ALGEBRA

Titolo nota 25/01/2008

A1

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

1ª soluzione: Bunching

$$\sum_{sym} a^2 b \geq 2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,(a+b+c)$$

il RHS è $\displaystyle\sum_{sym} a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}}$

la disuguaglianza è vera per bunching.

2° modo

lemma: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geq \dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

dimostrazione:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{\cancel{a}}{b}\,\frac{c}{\cancel{a}}\,\frac{c}{a}} = \sqrt[3]{\frac{c^2 c}{abc}} = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Sommando ciclicamente si ottiene il lemma

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

si dimostra sommando la disug. del lemma

3° modo: medie

$$\frac{\sum_{sym} a^2 b}{abc} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+bc+ac}$$

$$RHS \leq 2(a+b+c)\,\frac{ab+bc+ac}{3abc}$$

Se si dimostra

$$\frac{\sum_{sym} a^2 b}{\cancel{abc}} \geq \frac{2(a+b+c)(ab+bc+ac)}{3\cancel{abc}}$$

si dimostra anche la tesi

$$\sum_{sym} a^2 b \geq \sum_{sym} abc$$ vera per bunching

Sol. alternativa

$$a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \geq 2a\cdot bc+2b\cdot ac+2c\ldots$$

Somma di quadrati

2ª soluzione

$$\frac{3abc+\sum_{sym} a^2b}{abc} \geq 2\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+3$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 2\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+3$$

$$\cancel{3}\,AM \cdot \frac{3}{HM} \geq 2\frac{3AM}{GM} + \cancel{3}$$

$$3\,AM \cdot GM \geq 2AM \cdot HM + HM\,GM$$

$$\begin{cases} \cancel{2AM} \cdot GM \geq \cancel{2AM}\,HM \\ AM \cdot \cancel{GM} \geq HM \cdot \cancel{GM} \end{cases}$$

A2 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+ \wedge a+b = c+d+e = \cancel{3}x$
$= 6x$

$$M_2 \geq M_1 \geq M_{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{c^2+d^2+e^2}{3}} \geq \frac{c+d+e}{3} \geq \left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}}{3}\right)^2$$

$$a^2+b^2 \geq 18x^2 \qquad c^2+d^2+e^2 \geq 12x^2$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq 2\sqrt{3}\sqrt{x} \qquad \sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e} \leq 3\sqrt{2}\sqrt{x}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geq \sqrt{18x^2+12x^2} = \sqrt{30}x$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{e}+\sqrt{d})^2 \leq (2\sqrt{3}\sqrt{x}+3\sqrt{2}\sqrt{x})^2 = (30+12\sqrt{6})x$$

Th: k massimo

$$\overbrace{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}} \geq k\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{e}+\sqrt{d}\right)^2$$

$$k \leq \frac{\qquad\qquad}{\cancel{x}} \qquad \leq \frac{\sqrt{30}\,\cancel{x}}{(30+12\sqrt{6})\cancel{x}}$$

$c = d = e \qquad a = b$

in questo caso tutte le medie e le relazioni precedenti diventano uguaglianze

1^a variante: prima provo

$a=b$ $\quad c=d=e$ $\quad$ e troviamo

$$K = \frac{\sqrt{30}}{30+12\sqrt{8}}$$ e poi dimostro

che con un K maggiore non

e' possibile

(2) $\mathbb{R}^5$ assi $a\ b\ c\ d\ e$

L : luogo di punti (a, b, c, d, e)

che soddisfano l'ipotesi

$c + d + e = a + b = 6$

xkè relazione omogenea

$Z(3,3,2,2,2)$ $\quad Z \in L$

R: il luogo dei punti ortogonali a oZ

ovvero tali che essendo $r \in \mathbb{R}$

valga $\overline{Zr}^2 + \overline{ZO}^2 = \overline{rO}^2$, con O origine degli assi

$\iff 3a + 3b + 2c + 2e + 2d = 30$

$\forall l \in L \quad l \in R \quad \wedge \quad \overline{ZO}^2 \leq \overline{rO}^2 \; \forall r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{TO} \leq \overline{LO}$

$\Rightarrow \sqrt{30} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}$

$\Delta_\alpha : \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{e}+\sqrt{d} = \sqrt{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$

al variare di α tutti gli Δ_α fanno il quadrante positivo

Sia O_k l'omotetia di centro O e parametro k

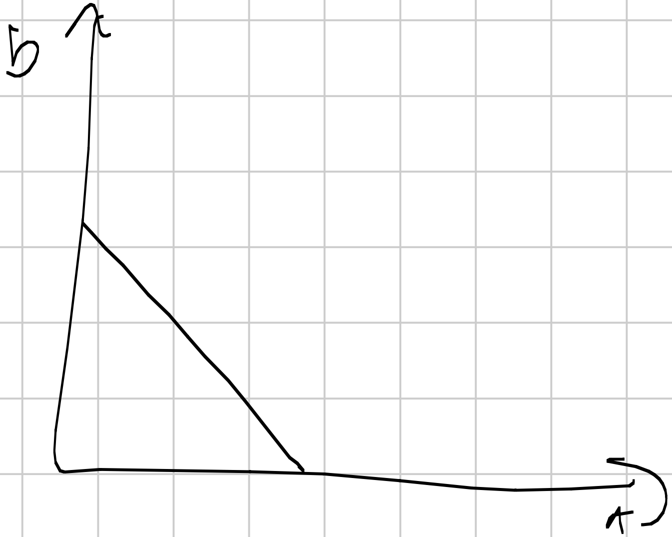
Allora:

$$\Delta_{\alpha'} = \mathcal{O}_{\frac{\alpha'}{\alpha}}\left(\Delta_\alpha\right)$$

Scannerizziamo $\mathbb{R}^5$ con un piano

Sia Π_{xyz} il piano tale che

$c = x \quad d = y \quad e = z$



$x + y + z = 6$

$\Rightarrow (a, b) \quad a + b = 6$

altrimenti

non vale $c + d + e = 6$

$\Rightarrow$ non "vediamo" $\angle$

$\bigtriangleup_\alpha \qquad \alpha \vdash_c \exists \in \bigtriangleup_\alpha$

$\alpha = 30 + 12\sqrt{6}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = x$

$x = \underbrace{\sqrt{\alpha} \ \sqrt{c} - \sqrt{d} - \sqrt{e}}\ \geq 2\sqrt{8}$

$3\left(\frac{c+d+e}{3}\right)^2 \geq \frac{\sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{\circ}}{3}$

A 3

$a_0 = \frac{m}{2}$ $\qquad a_{n+1} = \lceil a_n \rceil \cdot a_n$

I) $m = 1$ $\qquad a_n = 1/2 \quad \forall n$

$m = 2^k \cdot d + 1$ $\qquad$ (se m pari $k = 0$)

d dispari

Passo base $k = 0$

induttivo $\quad m = 2^{k+1} \cdot d + 1$

$$a_1 = \frac{2^{k+1} \cdot d + 1}{2} \cdot \left(2^k d + 1\right) = \frac{2^k\left(d^2 \cdot 2^{k+1} + 3d\right) + 1}{2}$$

a_{k+1} è il primo intero per hp. induttiva

Ogni termine è un intero per un razional

$a_n = \frac{2k+1}{2}$ $\qquad$ $a_{n+1} = (k+1)\left(\frac{2k+1}{2}\right)$

$$a_n = \frac{2k_n+1}{2} \qquad a_{n+1} = \frac{2\cdot k_{n+1}+1}{2}$$

$$v_2\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = v_2\left(\left(\frac{2k_n+1}{2}\right)(k_n+1) - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= v_2\left(\frac{2k_n^2+3k_n}{2}\right) = v_2\left(2k_n^2+3k_n\right) - 1 = v_2(k) - 1$$