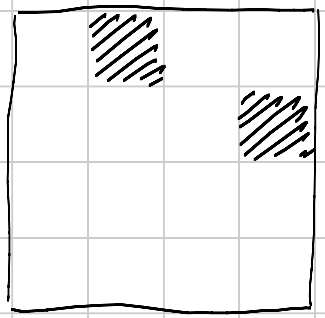
WC 2008 - COMBINATORIA

Titolo nota 24/01/2008

C4. Tabella

Modi di colorare in B/N senza 2 neri adiacenti



Lemma 1 Modi di colorare una striscia $n \times 1$

Guardo i finali

N_n = modi che finiscono con N

B_N = " " " " B

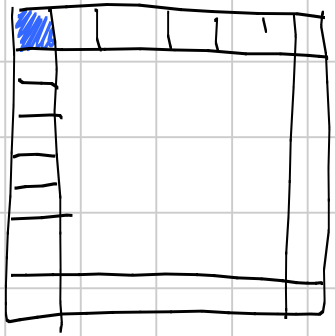
$$\begin{cases} N_{n+1} = B_n \\ B_{n+1} = B_n + N_n = B_n + B_{n-1} \end{cases}$$

$B_{n+1} = B_n + B_{n-1}$

$B_1 = 1 \quad B_2 = 2$

B_n = Fibonacci

Lemma 2 — Modi di colorare contorno del quadrato $n \times n$

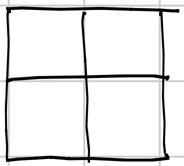


Ci sono $4n-4$

Se l'angolo è N è come colorare una striscia lunga $4n-7$

Se l'angolo è B è come striscia lunga $4n-5$

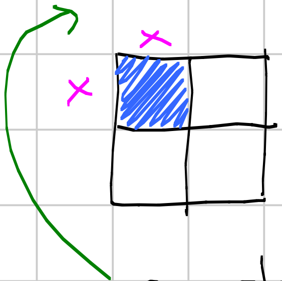
Problema — Guardo 2×2 centrale



↓

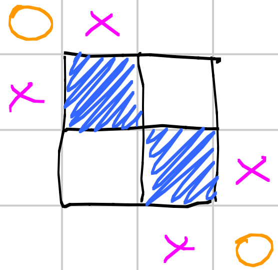
bordo di quadrato 4×4 (Lemma 2)

WLOG



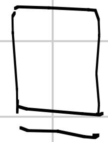
$2 \cdot$ striscia (9) $\cdot\, 4$ ← configurazioni

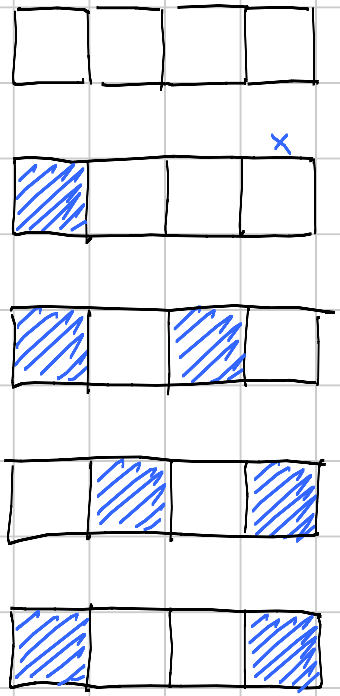
WLOG



$4 \cdot [\text{striscia}(3)]^2 \cdot 2$ ← config.

Impostazione alternativa per il caso $4 \times n$

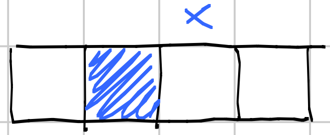
Spezzo le configurazioni a seconda dell'ultima riga 



Z_n

UE_n

UI_n



DA_n

DE_n

$$
\begin{cases}
Z_{n+1} = Z_n + UE_n + UI_n + DE_n + DA_n \\
UE_{n+1} = 2Z_n + UE_n + 2UI_n + DA_n \\
UI_{n+1} = 2Z_n + 2UE_n + UI_n + DA_n + 2DI_n \\
DA_{n+1} = 2Z_n + UE_n + UI_n + DA_n \\
DE_{n+1} = Z_n + UI_n
\end{cases}
$$

Iterando si fa il caso $n \times 4$

$\boxed{C5}$ **Grafo** 3n vertici

Comunque ne scelgo 2n, ci sono almeno n lati

Domanda: minimo numero di lati in totale

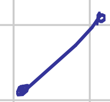
DOUBLE COUNTING

$$A = \{(\text{gruppo di } 2n, \text{ collegamento interno al gruppo})\}$$

Conto gli el. di A in 2 modi:

1° modo: Fissato un gruppo, ho almeno n colleg.

$$|A| \geq \binom{3n}{2n} \cdot n$$



2° modo: Fissato un colleg. qualunque, me lo ritrovo in tutti i gruppi che contengono i suoi estremi

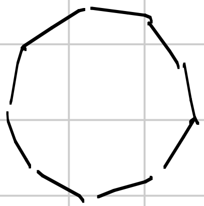
$$|A| = \text{Colleg.} \quad \binom{3n-2}{2n-2}$$

Conseguenza:

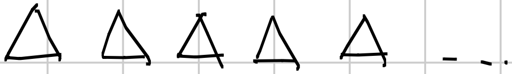
$$\text{Colleg.} \binom{3n-2}{2n-3} \geq \binom{3n}{2n} \cdot n$$

$$\text{Colleg.} \geq \frac{9n^2-3n}{4n-2} \sim \frac{9}{4}n \quad \text{Troppo Poco.}$$

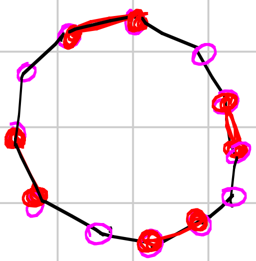
Congettura: Colleg $\geq 3n$. In + ci sono tante config. "ottimali"



poligono $3n$ lati



n triangoli



Osserv.: da ciascuno dei p.ti esclusi partono 2 colleg. verso i p.ti scelti

4 colleg. dentro + 4 p.ti fuori · 2 colleg

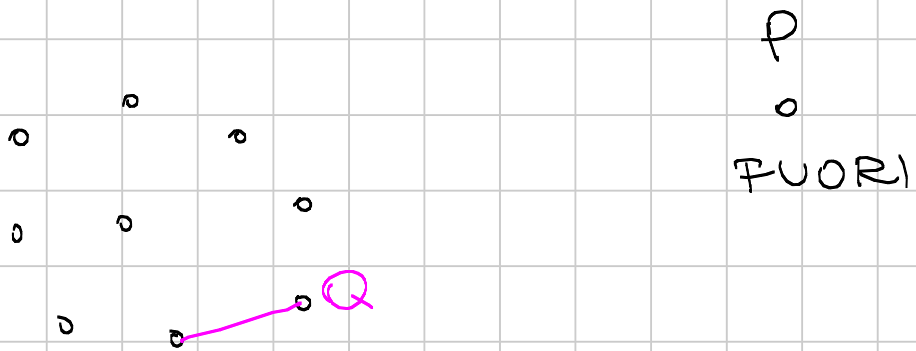
$4 + 8 = 12$

$2n$ p.ti $\downarrow$ almeno $\boxed{n}$ colleg

n fuori $\downarrow$ da ciascuno partono 2 colleg. $\boxed{2n}$

<u>CLAIM</u> Da ogni p.to fuori partono almeno 2 colleg. verso i p.ti dentro.

Dimostro che questo vale se ho scelto quelli dentro in modo da avere il minor numero possibile di collegamenti

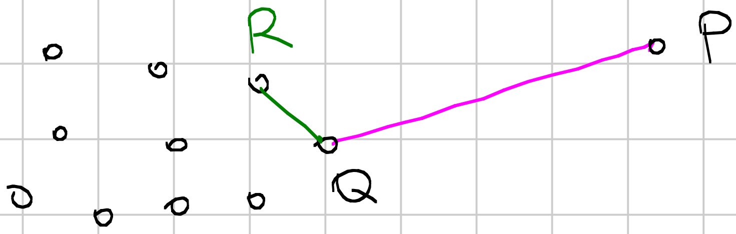


$2n$ "dentro"

Caso 1: può succedere che da P non parta nulla verso l'interno?

NO: cambio P con Q e ho insieme di $2n$ pti con meno collegamenti.

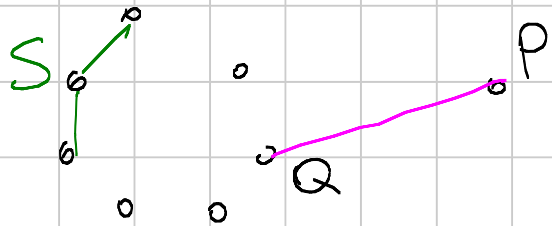
Caso 2: da P parte solo 1 collegamento verso dentro



Caso 2.1
Q è collegato con un certo R interno

Scambio P e Q e ho perso il colleg. verde → assurdo

Caso 2.2



Q scollegato all'interno

All'interno dei 2n p.ti ho n collegamenti (ipotesi) almeno, quindi in media ogni vertice è coinvolto in media 1 volta

→ se Q è coinvolto 0 volte, ci sarà dentro un S coinvolto 2 volte

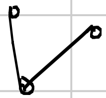
Scambio P con S e risparmio 1 colleg. (almeno)

→ ASSURDO

C5. Grafo — Sduzione alternativa (by Gennady)

$3n$ vertici $\qquad\qquad \leq 3n-1$ collegamenti

Parto dal grafo e cerco di togliere dei vertici

- se c'è un vertice con  almeno 2 cdl., lo tolgo e così via

<u>1° caso</u>: riesco a fare l'operazione n volte

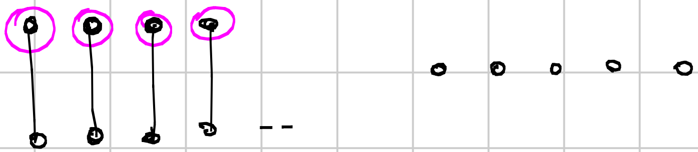
$$3n \qquad\qquad \leq 3n-1 \text{ colleg.}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \text{ scendo almeno di } 2n$$

$$2n \qquad\qquad \leq n-1 \qquad \text{assurdo}$$

2° caso: mi pianto strada facendo

$2m+k$ colleg $\le \left\lceil \frac{2m+k}{2} \right\rceil = n + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$



ne tolgo k (un estremo per ogni colleg.)

$2n+k$

$\downarrow$

$2m$

$m + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - k < m$

Assurdo

Ancora meglio se non ho nemmeno k collegamenti.

Es. $\boxed{C6}$

$a_1, \dots, a_n$ li divido in 2 gruppi in modo da minimizzare

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j \right|$$

$$\underset{+1}{a_i} \qquad \underset{-1}{a_j}$$

Tesi: prima o poi trovo un elemento $|x| \geq \frac{n}{2}$

2 IDEE

① RITORNO ALLA STESSA CONFIGURAZIONE

② "INVARIANTE"

Supponiamo per assurdo che tutti gli a_i stiano sempre $|\cdot| < \frac{n}{2}$

visto che il movimento è "quantizzato" il numero di possibilità per ogni a_i è FINITO

$\Rightarrow$ il numero di possibilità per la n-upla è finito

$\Rightarrow$ prima o poi una configurazione si ripete.

② Un invariante è LA SOMMA DEI QUADRATI

Prima: $\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{\ldots} + a_n^2$

Dopo $(a_1+1)^2 + \ldots + (a_k+1)^2 + (a_{k+1}-1)^2 + \ldots + (a_n-1)^2$

$\cancel{a_1^2} + 2a_1 + 1 + \ldots + \cancel{a_k^2} + 2a_k + 1 + \cancel{a_{k+1}^2} - 2a_{k+1} + 1 + \ldots$

$$\text{Dopo} - \text{Prima} = n + 2\underbrace{\left(\sum_{i\in I} a_i - \sum_{j\in J} a_j\right)}_{> -\frac{n}{2}} > 0$$

③ Lemma Se tutti i numeri sono $< \frac{n}{2}$ in val. assol., esiste un modo di partizionare in modo da avere diff $< \frac{n}{2}$ in val. ass.

$\Rightarrow$ L' invariante cresce $\Rightarrow$ NO RIPETIZIONE