WC 2009 ALGEBRA

Titolo nota 28/01/2009

$\boxed{6}$

$$x_1, \dots, x_n \in [0,1]^n$$
$$Q = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Determinare max (o sup) di $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{x_1}{\frac{Q}{x_1}+1} = \sum_i \frac{x_i}{\frac{Q}{x_i}+1}$

$\boxed{1^a \text{ OSS}}$ Max $\geq n-1$ $\quad x_1 = 0,\ x_2 = \ldots = x_n = 1$

$\boxed{\text{Induzione}}$ $\boxed{n=2}$ $\quad \dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} \leq 1$

$$x^2 + \cancel{x} + y^2 + \cancel{y} \leq xy + \cancel{x} + \cancel{y} + 1 \qquad x^2+y^2 \leq xy+1$$

$$\underbrace{x^2 - xy + y^2}_{\text{CONVESSA in } x} \leq 1$$

CONVESSA in x $\Rightarrow$ a y fissato il max è in uno dei 2 estremi

$x=0$ $\quad y^2 \leq 1$ OK $\qquad x=1$ $\quad 1-y+y^2 = 1+\underbrace{y(y-1)}_{\leq 0} \leq 1$

$\boxed{\text{P.I.}}$ Suppongo vero per un certo n e dim. per n+1

Dati: $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ $\qquad y_1 = x_1,\ y_2 = x_2, \dots,\ y_n = x_n \cdot x_{n+1}$

$$P = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{\frac{Q}{x_i}+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{\frac{Q}{x_i}+1} + \frac{x_n}{Px_{n+1}+1} + \frac{x_{n+1}}{Px_n+1}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i}{\frac{Q}{y_i}+1} + \frac{y_n}{P+1}}_{\leq\, n-1 \text{ per ipotesi induttiva}} \underbrace{- \frac{y_n}{P+1} + \ldots + \ldots,}_{\text{se fosse } \leq 1 \text{ ho (avrei) finito}}$$

$$\frac{A}{PB+1} + \frac{B}{PA+1} \leq \frac{AB}{P+1} + 1 \qquad \text{contaccio} \ldots$$

$$[A+B] + P[A^2+B^2] + P^2[A^2+B^2] \leq [AB+1] + P[A^2B + AB^2 + 1] +$$
$$+ P^2[A+B+A^2B^2+AB] + P^3 AB$$

$\boxed{1°}$ $A+B \le AB+1$ $\qquad \underbrace{(1-B)A+B}_{} \le 1$

CONVESSA in A $\Rightarrow$ basta provare $A=0$ e $A=1$

$\boxed{2°}$ $A^2+B^2 \le A^2B+AB^2+1$ $\qquad (1-B)A^2-B^2A+B^2 \le 1$

CONVESSA in A !! $\qquad$ ($A=0$ e $A=1$)

$\boxed{3°}$ $\boxed{A^2}+\boxed{B^2} \le \boxed{A}+\boxed{B}+A^2B^2+AB$

— o — o —

$\boxed{4}$ $(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \ge 3(x+y+z)^2$ con uguale $\Leftrightarrow$ 1, 1, 1

$$x^2y^2z^2+2\sum_{cyc}x^2y^2+\cancel{4}\sum_{cyc}x^2+8 \ge 3\cancel{\sum_{cyc}}x^2+6\sum_{cyc}xy$$

$\boxed{\text{1° Metodo + semplice}}$: polinomio quadratico in z:

$\ge 0 \Leftrightarrow \Delta \le 0 \leftarrow$ solo x e y e si fa.

$\boxed{\text{2° metodo calcoloso}}$: $S=x+y+z$ $\quad Q=xy+yz+zx$ $\quad P=xyz$

$P^2+2Q^2-4PS+S^2-2Q+8 \ge 6Q$ $\qquad \sum_{cyc}x^2y^2 = Q^2-2PS$

$$P^2+\underbrace{\underbrace{2Q^2}-4PS+S^2-\underbrace{8Q}+\underbrace{8}}_{2(Q-2)^2} \ge 0$$

[$\boxed{\text{Se}}$ l'espressione ottenuta è monotona in P, allora max e min si hanno quando 2 variabili sono uguali, wlog $x=y$]

N.B. Il tipo di monotonia può dipendere da S e Q.

Non può andar bene perchè nel caso di uguaglianza deve venire 0, mentre viene 2·1.

$$\underset{\substack{\uparrow\\6}}{P^2}+\underset{\substack{\uparrow\\4}}{2Q^2}+\underset{\substack{\uparrow\\2}}{S^2}+\underset{\substack{\uparrow\\0}}{8} \ge \underset{\substack{\uparrow\\4}}{4PS}+\underset{\substack{\uparrow\\2}}{8Q}$$

$P^2+S^2 \ge 2PS$

Pessima idea: nel caso di uguaglianza $P^2 \ne S^2$

$9P^2+S^2 \ge 6PS$ $\leftarrow$ Buona idea: vale $=$ quando 1, 1, 1

$$\boxed{P^2+\frac{1}{9}S^2 \ge \frac{2}{3}PS}$$ 1ª Disug.

$2Q^2 + \frac{8}{9}S^2 + 8 \geq \frac{10}{3}PS + 8Q$ $\qquad$ $Q^2 \geq 3PS$ ← viene in tutti i modi

$\underset{4}{\uparrow} \quad \underset{2}{\uparrow} \qquad\qquad \underset{4}{\uparrow} \quad \underset{2}{\uparrow}$

$\boxed{\frac{10}{9}Q^2 \geq \frac{10}{3}PS}$ 2ª Disug.

$\frac{8}{9}Q^2 + \frac{8}{9}S^2 + 8 \geq 8Q$

$\boxed{\frac{8}{9}Q^2 + 8 \underset{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{16}{3}Q}$ 3ª Disug.

$\boxed{\frac{8}{9}S^2 \geq \frac{8}{3}Q}$ 4ª Disug.

Oss. $\quad A + B \geq C + D$ $\quad$ Da fare

$A \geq C$ $\quad$ Fatto

$\boxed{\text{Iniziale} \iff B \geq D}$ NO!!! $\quad$ Iniziale $\Leftarrow B \geq D$

—o—o—

<u>Con l'analisi</u>: $\quad f(x,y,z) = (x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) - 3(x+y+z)^2$

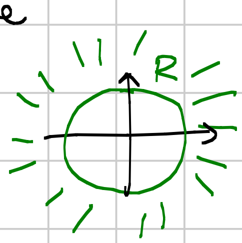
$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2 + 2\sum x^2y^2 + \sum x^2 - 6\sum xy + 8 \geq 0$$

Se c'è il minimo, allora è in punto in cui $f_x = f_y = f_z = 0$

Le uniche soluzioni sono $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.

Per dimostrare che esiste il minimo bisogna che

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \to +\infty} f(x,y,z) = +\infty$$



$f(x,y,z) \geq 100$ se $x^2+y^2+z^2 \geq R^2$

$\Rightarrow$ minimo sta nella palla $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

(chiusa + limitata $\Rightarrow$ min. esiste)

<u>Oss.</u>: $2x^2y^2 - 6xy \geq k$ ← costante negativa $\qquad 2t^2 - 6t$

$$2\sum x^2y^2 - 6\sum xy \geq 3k$$

Quindi $\quad f(x,y,z) \geq \boxed{\underset{\to +\infty}{\sum x^2}} + 8 + 3k$ $\quad$ quindi $f \to +\infty$

$$\cancel{2}x(y^2+2)(z^2+2) = \overset{3}{\cancel{6}}(x+y+z) \qquad f_x = 0$$

idem per y e z

$$x(y^2+2)\cancel{(z^2+2)} = y\cancel{(z^2+2)}(x^2+2)$$

$$xy^2+2x = x^2y+2y \qquad xy(y-x) = 2(y-x) \quad \begin{array}{l} \nearrow x=y \\ \searrow xy=2 \end{array}$$

L'unico caso non banale è $x=y$ e $yz=2$ ...

— o — o —

$\boxed{\text{Problema}}$ $\quad (a^2,1,1) \quad (b^2,1,1) \qquad (a^2,1,1),\ (1,1,b^2)$

$$(a^2+1+1)(b^2+1+1) \geq (a^2\cdot 1+1+1\cdot b^2)3$$

$$(c^2+2)(a^2+2)(b^2+2) \geq 3(a^2+b^2+1)(1+1+c^2) \quad \text{C.S.}$$

$$\geq 3(a+b+c)^2$$

wlog ci sono $a^2, b^2 \geq 1$ oppure $a^2, b^2 \leq 1$

Mettiamo che sia $a^2 \geq 1$ e $b^2 \geq 1$. Allora

$(a^2,1,1)$ e $(1,1,b^2)$ sono ordinate in modo opposti

Cheb. $\quad (a^2+1+1)(1+1+b^2) \geq 3(a^2+1+b^2)$

— o — o —

$$\sum_{cyc} \frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$

Partenza: $\displaystyle \sum_{cyc} \frac{2yz-xy-xz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq 0$] Si dimostra con Cheb.

$$\sum_{cyc} \frac{2x^2+2yz-2x^2-x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq 0$$

$$\sum_{cyc} \frac{2x^2+2yz-2\sqrt{2x^3(y+z)}}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq \text{somma prec.} \geq 0$$

$$2\sum_{cyc} \frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq 2\sum_{cyc} \sqrt{x}$$

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \cdots + \cdots \geq 3\sqrt[3]{\frac{(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)}{\sqrt{8x^2y^2z^2(y+z)(z+x)(x+y)}}} \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$

Hope

$$27(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy) \geq 2\sqrt{2}\,xyz\sqrt{x+y}\sqrt{y+z}\sqrt{z+x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^3$$

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}$$

$$\left(\frac{2x+2y+2z}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}}{3}\right)^3 \geq \sqrt{x+y}\sqrt{y+z}\sqrt{z+x}$$

$$\text{LHS} \geq \text{coeff.}\ xyz(x+y+z)^3$$