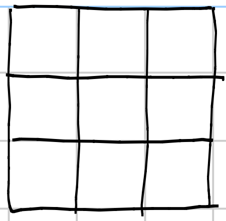
WC 2009 – COMBINATORIA

Titolo nota 29/01/2009

Problema 1

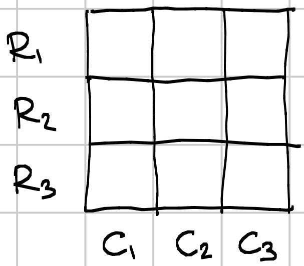


$n \times n$. Ogni casella numero $0, 1, \dots, k$ (modulo $k+1$)

Mossa: aggiungere $+1$ a una riga o una colonna a scelta.

All'inizio tutti 0. Si fanno un po' di mosse.
Tesi: si può tornare a tutti 0 con al più kn mosse.

Oss. 1 Gioco "commutativo": lo stato finale non dipende dall'ordine di esecuzione, ma solo da quante volte è stata toccata una certa riga o colonna.



$$a_{ij} = R_i + C_j$$

Oss. 2 Modo banale di tornare indietro. Fare su ogni riga e ogni colonna il complementare a $k+1$.
Così servono però $2kn$ mosse (a priori)

Oss. 3 Dato un modo di sistemare, ne ottengo un altro toccando una volta in più tutte le righe e una volta in meno tutte le colonne.
Così otteniamo $k+1$ modi di sistemare. Uno di questi va bene.

Oss. 4 DOUBLE COUNTING. Ad ogni modo di risistemare associamo la somma delle mosse

$\sum_{\text{MODI}}$ (somma mosse) : ogni riga e ogni colonna viene toccata $0, 1, 2, \dots, k$ volte

$$= \boxed{2n} \cdot \boxed{\frac{k(k+1)}{2}} = nk(k+1)$$

totale righe e colonne

numero totale di volte che una data riga o colonna viene toccata

Avendo $(k+1)$ modi di risistemare, almeno 1 ha $\leq nk$ mosse.

— o — o — o —

Problema 2 Torneo n squadre. Tutti incontrano tutti. Allora una ed una sola delle seguenti:

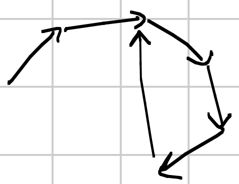
(a) $1 \to 2 \to 3 \to \dots \to n \to 1$

(b) V e P partizione delle squadre con tutti i V che battono tutti i P.

Oss. 1 Grafi orientati. È vero che c'è sempre un ciclo? NO: basta che "rispettino il ranking" $i \to j$ se $i < j$.

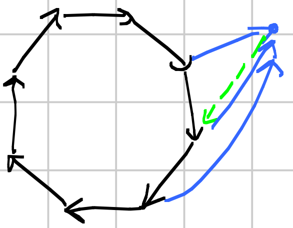
Oss. 2 Se c'è uno che perde da tutti il problema è finito P = quello V = gli altri

Oss. 3 Se non c'è uno che perde da tutti, allora c'è almeno un ciclo. Si parte da un pto a caso e si procede a caso seguendo le frecce.

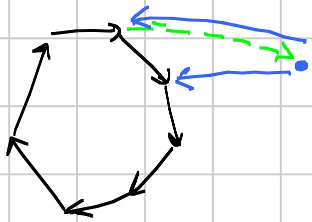


ORA e SOLO ORA sappiamo che esiste un ciclo di lungh. max. Se ha lungh. n, siamo nel caso (a)

$\boxed{\text{Oss. 4}}$ Supponiamo che il ciclo max abbia lunghezza $< n$.



Se un tizio esterno perde da uno del ciclo, allora perde da tutti



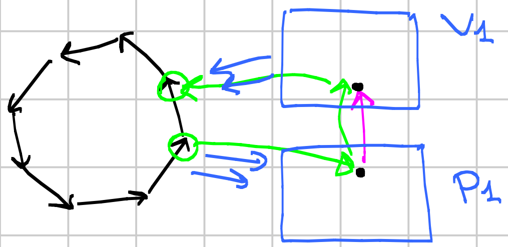
Se un tizio esterno batte uno del ciclo, allora li batte tutti.

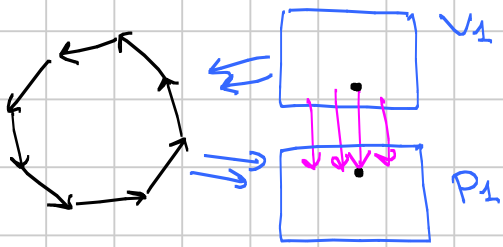
Gli esterni li posso partizionare in 2 gruppi: V_1 e P_1

$\boxed{\text{Oss. 5}}$ se $V_1 = \emptyset$ $\quad V = \text{ciclo} \quad P = P_1$

se $P_1 = \emptyset$ $\quad V = V_1 \quad P = \text{ciclo}$

Supponiamo quindi che $V_1 \neq \emptyset$ e $P_1 \neq \emptyset$





$\boxed{\text{ALLUNGAMENTO}}$

↳ Basta che esista una freccia $P_1 \to V_1$

Resta solo il caso in cui tutti gli elementi di V_1 battono tutti gli elementi di P_1.

In questo caso siamo nel (b) con

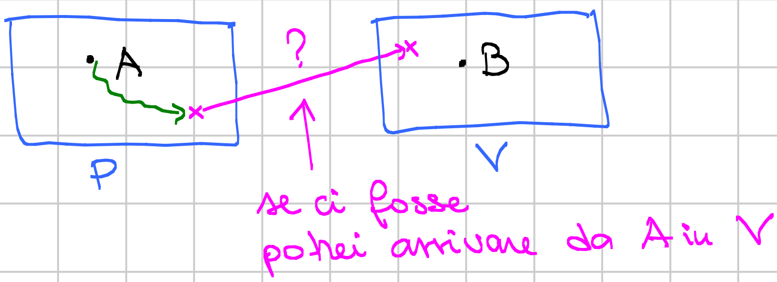
$$V = V_1 \qquad P = P_1 \cup \text{ciclo}.$$

— o — o —

$\boxed{\text{Oss. 6}}$ Supponiamo che la (b) non sia verificata.

Allora da ogni p.to si raggiunge ogni altro punto.

Supponiamo che da A non si possa arrivare a B.
Come posso trovare P e V?
Pongo
$P = \{$quelli raggiungibili da A, compreso A stesso$\} \ni A$
$V = \{$gli altri$\} \ni B$
$P \cap V = \emptyset \qquad P \cup V =$ tutti



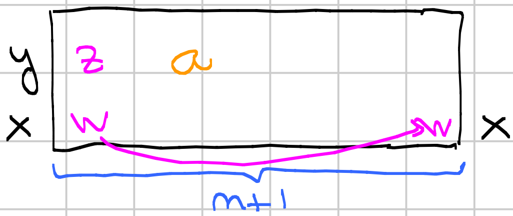
Analogo: $V = \{$quelli da cui si arriva a B$\} \ni B$
$P = \{$gli altri$\} \ni A$
(stessa dim. di prima).

—o—o—

$\boxed{\text{PROBLEMA 6}}$ (by Bobo) Le squadre sono $2n+1$

$\boxed{\text{LEMMA 1}}$ Sia d la distanza tra 2 partite della stessa squadra.
Allora $d \geq n$ (per ipotesi), ma anche $d \leq n+1$

Dim.: per assurdo ci sia un buco $\geq n+2$



Nel buco ci sono $2n+2$ posti e solo $2n$ squadre posso comparire. Le uniche squadre che possono comparire almeno 2 volte sono quelle che giocano la 1ª partita del buco (per gli altri sarebbe troppo presto).
Ma solo uno tra w e z può giocare l'ultima partita

Quindi riassumendo:

* ci sono $2n+2$ posti
* ci sono $2n$ candidati, e solo uno può occupare 2 posti

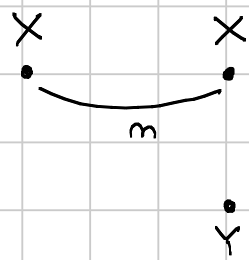
$\Rightarrow$ almeno un posto vuoto $\Rightarrow$ ASSURDO

— o —

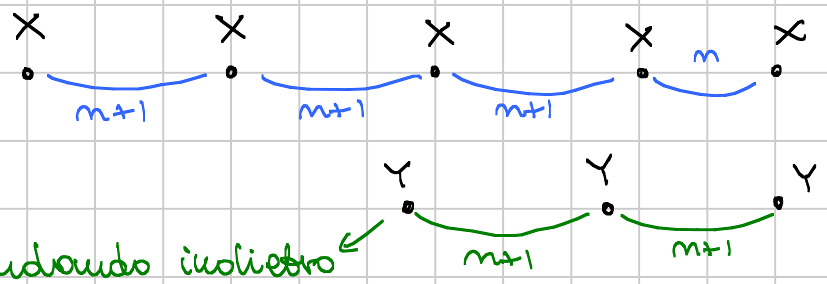
$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Ogni squadra fa solo salti da n o da $n+1$.
Se dimostro che c'è una squadra che fa solo salti da $n+1$ ho finito.
Infatti la somma totale delle distanze percorse è uguale alla lunghezza totale (conto da fare).

$\boxed{\text{Oss. 3}}$ Supponiamo che ogni squadra faccia prima o poi un salto da n.

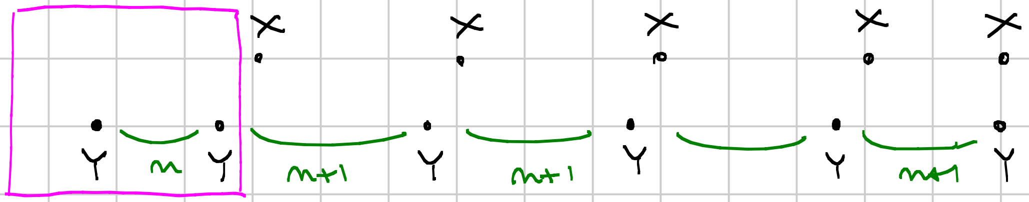
Consideriamo la squadra che fa il suo primo salto da n + tardi possibile (a posteriori è banalmente unica)



Prima X ha saltato sempre $n+1$



andando indietro Y deve fare un salto da n perché X è l'ultima a farlo. Bisogna vedere che non può farlo prima del primo X



n+1 partite nelle quali (cor. Lemma 1) tutti giocano