GEOMETRIA 1

Titolo nota 28/01/2009

4) Fatto noto:

Se P, Q con. isog. $\Rightarrow P_i, Q_i$ sono concicliche

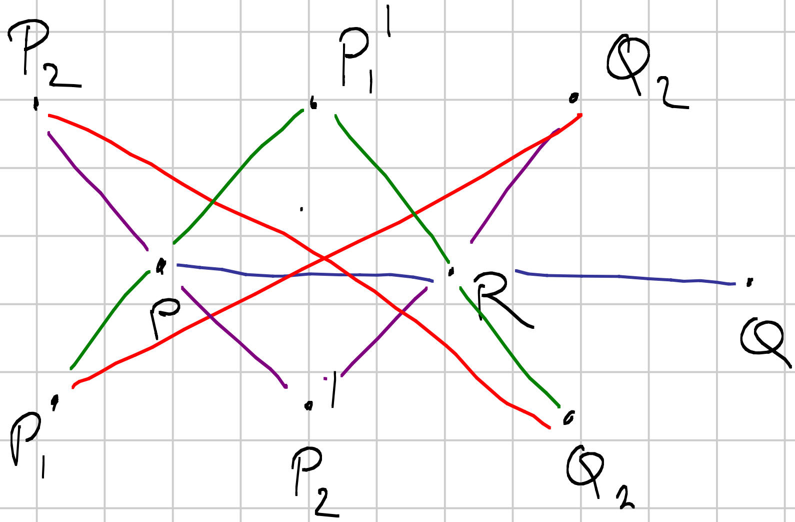
$R =$ pt. medio di PQ

R è centro della cfr.

$X_3 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$

$P_1' = PP_1 \cap Q_1R$

$P_2' = PP_2 \cap Q_2R$



$PP_1 \perp P_1Q_1$

$\Downarrow$

$P_1'\hat{P}Q_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_1'$ conciclico con P_i, Q_i

$PP_2 \perp P_2Q_2$

$\Downarrow$

$P_2'\hat{P}Q_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_2'$ " " " "

$P_1 P_1' Q_1 P_2 P_2' Q_2$ esagono "ciclico"

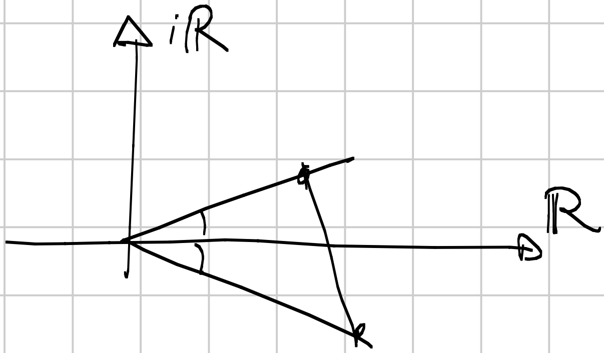
$\Rightarrow$ (Pascal) $P_1P_1' \cap P_2P_2' = P$

$P_1'Q_1 \cap P_2'Q_2 = Q$

sono allineati

$Q_1 P_2 \cap Q_2 P_1 = X_3 \int$

Num. compl x il fatto noto

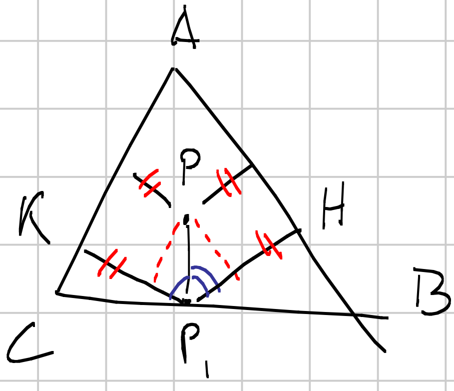


Conti con le Trilineari

•) $[x, y, z] \longrightarrow \left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right]$

•) proiez. di $[x, y, z]$ su $\{z = 0\}$

$$[x + z\cos\beta,\ y + z\cos\alpha,\ 0]$$



$P_1H \perp AB$

$PP_1 \perp CB$

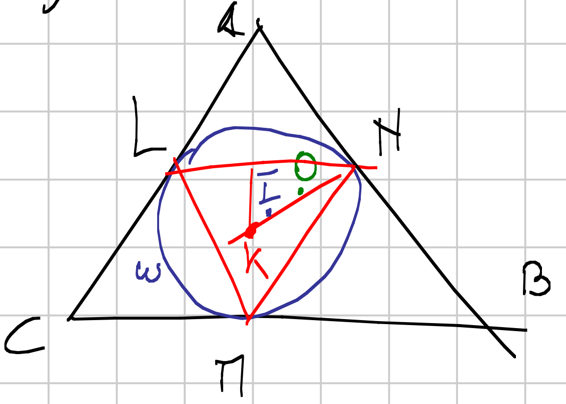
$\Rightarrow$

$\widehat{PP_1H} = \widehat{ABC}$

•) retta per due punti $[p_1, p_2, p_3]$ $[q_1, q_2, q_3]$

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 0$$

5) Soluzione sintetica



•) I, K stanno sulla retta di Eulero di LMN.

•) Invertendo in ω:
A, B, C vanno nei punti med. di LN, NM, ML
$\Rightarrow$ la cfr. per A, B, C va nella cfr. di Feu. di LMN

3) Un diametro per I va in un diam. per I sotto inv.
$\Rightarrow$ la retta IO è diam. della cfr. di Feu di LMN
$\Rightarrow$ contiene il centro $\Rightarrow$ è la retta di Eulero di LMN
$\Rightarrow$ contiene K.

Soluzione Complessa

Sia ω la cfr. unitaria in $\mathbb{C}$. Siano $M = m$, $L = l$, $N = n$ i vertici del triangolo di tangenze di ω, allora:

1) $k = m + l + n$ $\quad$ (I = origine = zero)

2) $a = \dfrac{2ln}{l+n}$ $\quad$ $\left(\text{se } |z| = 1 \quad \dfrac{1}{z} = \bar{z} \right)$

$b = \dfrac{2nm}{n+m}$

$c = \dfrac{2ml}{m+l}$

3) Come calcolo il circocentro di ABC?

$\dfrac{a+b}{2} + \lambda i (a-b)$ $\quad$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\dfrac{b+c}{2} + \mu i (b-c)$

$$\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b+c}{2}\right)+i\left(\lambda(a-b)-\mu(b-c)\right)=0$$

$$\left(\frac{\bar a+\bar b}{2}-\frac{\bar b+\bar c}{2}\right)-i\left(\lambda(\bar a-\bar b)-\mu(\bar b-\bar c)\right)=0$$

$$o=\frac{2lmn\,(l+m+n)}{(l+m)(m+n)(n+l)} \qquad \left(\frac{1}{z}=\bar z \text{ se } |z|=1\right)$$

$\Rightarrow$ Tesi : $\qquad \{\lambda(l+m+n)\}\quad \lambda\in\mathbb{R}$

$$\frac{2\frac{1}{l}\frac{1}{m}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{l}\right)}=\frac{\frac{2}{\cancel{lmn}}}{\frac{(\quad)(\quad)(\quad)}{(lmn)^{\cancel{2}}}}=$$

$$=\frac{2\,lmn}{(\;)(\;)(\;)}$$

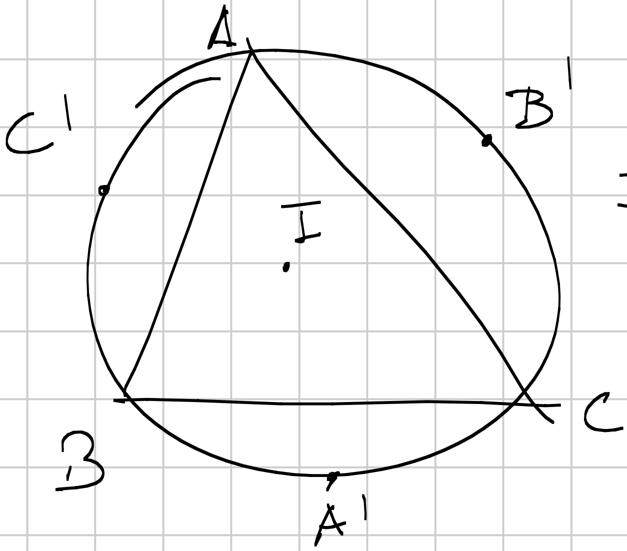
Si può fare anche in Tolomeo

6) <u>Soluzione in $\mathbb{C}$</u>

1) Posso trovare 3 numeri compl. u, v, w di norma 1 (cfr. circo = circ. unitaria) t.c.

$A = u^2 \quad B = v^2 \quad C = w^2$

$A' = -vw \quad B' = -uw \quad C' = -uv$



2) I è ortocentro di $A'B'C'$

I incentro

$I = -uv - uw - vw = \ell$

(a) $IA' \cdot IC' = R \cdot IB \qquad R = 1$

$IA' \cdot IC' = IB$

$|\ell - a'| \cdot |\ell - c'| = |\ell - b|$

$|-uv - uw| \, |-uw - vw| = |-uv - uw - vw - v^2|$

$\underbrace{|u|}_{=1} |w+v| \, \underbrace{|w|}_{=1} |u+v| = |w+v| \, |u+v| = |v^2 + v(u+w) + uw|$

(b) x = proiez. di I in BC

$x = \frac{1}{2}(b + c + \ell - bc\bar{\ell})$

$$r = |l - x| = \frac{1}{2}\left|\frac{(u+v)(v+w)(w+u)}{u}\right| = \frac{1}{2}|u+v||v+w||w+u|$$

$$lA \cdot lB = 2r\ lC' \qquad \frac{lA \cdot lB}{lC'} = 2r$$

$$\frac{|l-a|\,|l-b|}{|l-c'|} = \frac{|w+u|\,|v+u| \cdot |w+v|\,\cancel{|v+u|}}{\underset{\substack{\Downarrow \\ 2}}{|w|}\,\cancel{|u+v|}} = 2r$$

(c)

$$S(ABC) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} u^2 & \frac{1}{u^2} & 1 \\ v^2 & \frac{1}{v^2} & 1 \\ w^2 & \frac{1}{w^2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$S(A'B'C') = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} -vw & -\frac{1}{vw} & 1 \\ -uw & -\frac{1}{uw} & 1 \\ -vu & -\frac{1}{vu} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4uvw}\begin{vmatrix} vw & u & 1 \\ uw & v & 1 \\ vu & w & 1 \end{vmatrix}$$

$$S(ABC) = (u+v)(v+w)(w+u)\,S(A'B'C')$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4}$$