WC 2009 - MISCELLANEA

Titolo nota 30/01/2009

Problema 1 $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = f\left(x+\frac{1}{y}\right)+f\left(y+\frac{1}{x}\right) \qquad \forall x>0\ \forall y>0$$

$$x+\frac{1}{y}=u \qquad y+\frac{1}{x}=v \qquad f(u+v)=f(u)+f(v)$$

vale $\forall u,v$ per cui esistono x e y pos. t.c.

$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=u \\ y+\frac{1}{x}=v \end{cases} \qquad \begin{cases} xy+1=yu \\ xy+1=xv \end{cases} \Rightarrow yu=xv \Rightarrow y=\frac{xv}{u}$$

$$x+\frac{u}{xv}=u \Rightarrow vx^2-uvx+u=0 \quad \text{ha soluzione in } x \text{ se}$$

$$\Delta = u^2v^2-4uv \geq 0 \qquad uv(uv-4)\geq 0 \Rightarrow uv \geq 4$$

Dobbiamo risolvere

$$f(u+v)=f(u)+f(v) \quad \text{se} \quad uv\geq 4$$

Passo 2 Dimostrare che $f(u+v)=f(u)+f(v) \qquad \forall u>0\ \forall v>0$

$$f(M+u+v) \stackrel{?}{=} f(M)+f(u+v) \qquad \text{SI SE} \quad M(u+v)\geq 4$$

$$\stackrel{?}{=} \underbrace{f(M+u)}+f(v) \qquad \text{SI SE} \quad (M+u)v\geq 4$$

$$\stackrel{?}{=} f(M)+f(u)+f(v) \qquad \text{SI SE} \quad Mu\geq 4$$

Dati u e v qualunque positivi, esiste M per cui valgono le uguagl.

$$\cancel{f(M)}+f(u+v)=\cancel{f(M)}+f(u)+f(v) \qquad \forall u>0\ \forall v>0$$

Passo 3 Finale stile Cauchy $\quad f(x)=\lambda x \quad \forall x>0\ x\in\mathbb{Q}$

Per arrivare ad $\mathbb{R}$ si usa la locale limitatezza che arriva dall'opportuna ipotesi (seconda nel testo).

— o — o —

$\boxed{\text{Problema 2}}$ $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ succ. di primi tali che

p_{n+1} = + grande primo che divide $p_n + p_{n-1} + 2000$

Tesi: p_n è limitata

Per induzione $p_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{base}}$ $\boxed{p_1 \leq M}$, $\boxed{p_2 \leq M}$

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ Hp: $p_n \leq M$, $p_{n-1} \leq M$ Tesi: $p_{n+1} \leq M$

$\boxed{\text{Caso } p_n \text{ e } p_{n-1} \text{ dispari}}$ $\rightarrow$ $p_n + p_{n-1} + 2000 \leq 2M$

Allora $p_{n+1} \leq \dfrac{p_n + p_{n-1} + 2000}{2} \leq \dfrac{2M}{2} \leq M$

$\rightarrow$ $2M < p_n + p_{n-1} + 2000 \leq 2M + 2000$

Vogliamo che nel range da $2M$ a $2M+2000$ non ci siano numeri pari della forma $2p$. Per questo basta che

$\boxed{\text{tra } M \text{ e } M+1000 \text{ non ci siano primi}}$

Hope

Ma allora $p_{n+1} \leq \dfrac{p_n + p_{n-1} + 2000}{3} \leq \dfrac{2M+2000}{3} \leq M$

Serve $\boxed{M \geq 2000}$

$\boxed{\text{Caso in cui c'è un 2}}$ Succede che $p_n + p_{n-1} + 2000$ è dispari.

$\rightarrow$ se $p_n + p_{n-1} + 2000 \leq M$ allora fine

$\rightarrow$ se $M < p_n + p_{n-1} + 2000 \leq M + 2002$

Serve che $\boxed{\text{non ci siano primi tra } M \text{ e } M+2002}$

Allora $p_{n+1} \leq \dfrac{p_n + p_{n-1} + 2000}{3} \leq \dfrac{M+2002}{3} \leq M$

$\boxed{M = (p_1+p_2)\,2003! + 2 \text{ VA BENE}}$

$\boxed{\text{FACILE}}$

PROBLEMA 3

$\boxed{\text{LEMMA 2008}}$ $P(x)$ coeff. interi, grado pari, monico + $P(x)$ = quadrato per infiniti x

Allora $P(x) = [Q(x)]^2$ con $Q(x)$ a coeff. interi

Oss. 1 Grado pari serve (esempio $P(x) = x$)

Oss. 2 Monico serve (esempio: $P(x) = 2x^2+1$ $\quad 2x^2+1=y^2$ ha infinite soluzioni)

$$y^2-2x^2=1$$

$$(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9-2\cdot 4=1$$
$$(3-2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})^n = 1$$
$$(X-Y\sqrt{2})(X+Y\sqrt{2}) = X^2-2Y^2$$

$\boxed{\text{LEMMA 2009}}$ $P(x)$ a coeff. interi + quadrato per ogni $x \in \mathbb{N}$

Allora $P(x) = [Q(x)]^2$ con $Q(x)$ a coeff. interi

Problema Trovare i $P(x)$ per cui $a+b=\square \Rightarrow P(a)+P(b)=\square$

$$P(x^2-a)+P(a) = \text{quadrato per ogni } x\in\mathbb{N} = [Q(x)]^2$$

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $P(x^2-a)+P(a) = [Q(x)]^2$

Allora $Q(x)$ è un polinomio PARI o DISPARI

LEMMA: Se $P(x) = [Q(x)]^2$ e $P(x)$ è pari, allora $Q(x)$ è pari o dispari

$\boxed{\text{Se } Q(x) \text{ è pari}}$ $P(x^2-a)+P(a) = [R(x^2)]^2$

$P(y)+P(a) = [R(y+a)]^2$ vera per ∞ y, quindi per ogni y

$$P(x) + P(a) = [R_1(x)]^2$$

Cambio il valore di a $\rightsquigarrow$ b

$$P(x) + P(b) = [R_2(x)]^2$$

Sottraggo: $\underbrace{P(a) - P(b)}_{\text{COSTANTE}} \Rightarrow = \underbrace{[R_1(x) + R_2(x)]}_{\text{COSTANTE}}\underbrace{[R_1(x) - R_2(x)]}_{\text{COSTANTE}}$

$\Rightarrow R_1(x)$ e $R_2(x)$ costanti $\Rightarrow P(x)$ costante $\Rightarrow P(x) = 2k^2$.

— o —

$\boxed{\text{Caso } Q(x) \text{ dispari}}$

$$P(x^2-a) + P(a) = [x\, R(x^2)]^2$$

$$P(y) + P(a) = [R(y+a)]^2 (y+a)$$

$$P(y) + P(b) = [S(y+b)]^2 (y+b)$$

$$P(a) - P(b) = y\,[R(y) - S(y)][R(y) + S(y)] + a[R(y)]^2 - b[S(y)]^2$$

... To be continued ...

— o — o —

$\boxed{\text{DIM. LEMMA 2009}}$

$\boxed{\text{Fattorizzo } P(x)}$ $\quad P(x) = c\,[P_1(x)]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [P_k(x)]^{m_k}$

$P_i(x)$ irr. primi.

Basta dire: $c = \square$. Tutti gli m_i pari

$\boxed{\text{Step 2}}$ Trovare q primo ed $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$q \mid P_1(n) \qquad q \nmid P_i(n) \qquad \forall\, i = 2, \ldots, k$

$q^2 \nmid P_1(n) \qquad q \nmid c$

Se ci riesco so che $q^{m_1} \parallel P(n) = \square \Rightarrow m_1$ pari

Alla fine anche c è un quadrato

$\boxed{\text{Step 2.1}}$ I primi q che dividono qualche valore di $P_i(x)$ sono infiniti (vedi Stage precedenti)

$\boxed{\text{Step 2.2}}$ I primi q che dividono valori di $P_1(x)$ e un altro $P_i(x)$ sono un numero finito

$$P_1(x)A(x) + P_i(x)B_i(x) = \text{costante}_i \neq 0$$

Quindi gli unici q in comune sono quelli che dividono la costante

$\boxed{\text{Step 2.3}}$ Se q è abbastanza grande e $q \mid P_1(n)$, di sicuro $q \nmid c$ e $q \nmid P_i(n)$ $i \geq 2$.

Se $q^2 \nmid P_1(n)$ ho finito.

$\boxed{\text{Step 2.4}}$ Se $q^2 \mid P_1(n)$, posso cambiare n con m in modo che ancora $q \mid P_1(m)$ ma $q^2 \nmid P_1(m)$

$$q^2 \mid P_1(n) \Rightarrow P_1(n) \equiv 0 \pmod{q^2} \Rightarrow P_1(x) = (x-n)\cdot \text{roba} \pmod{q^2}$$

$\boxed{\text{Step. 2.5}}$ Se q è abbastanza grande, allora $P_1(x)$ ha radici semplici (se ne ha) modulo q.

Se a è radice multipla, allora a è radice di $P_1(x)$ e $P_1'(x)$

$$D(x)P_1(x) + E(x)P_1'(x) = c$$

$\Rightarrow P_1(x)$ e $P_1'(x)$ non sono div. per $(x-a)$ (tutti e 2) se $q \nmid c$.

<u>Back to step 2.4</u> Se $q \mid P_1(n)$ e $q^2 \mid P_1(n)$ e q è grande per lo Step 2.5, allora $m = n+q$

$$P_1(n+q) = P_1(n) + q\underbrace{P_1'(n)}_{\neq 0} + q^2\cdot \text{roba} \quad \Rightarrow \quad \text{FINE.}$$