RELAZIONE N2

Titolo nota 29/01/2009

PER QUALI $P \in \mathbb{Z}[x]$ SI HA:

$$a+b+c \mid P(a)+P(b)+P(c)$$

$$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}^+$$

$$x-y \mid P(x)-P(y)$$ (LEMMA DI POLONI)

$$P(a) \equiv P(-b-c) \quad (a+b+c)$$

$$a+b+c \mid \underbrace{P(-b-c)+P(b)+P(c)}$$

SE $\neq 0$ PRENDO a ENORME $\Rightarrow$ $\#$

$$\boxed{P(-b-c)+P(b)+P(c)=0} \quad \forall b,c \in \mathbb{Z}^+$$

SE È VERO IN $\mathbb{Z}^+$ È VERO IN $\mathbb{Z}$

LEMMA: SIA $Q(x_1,\dots,x_n)$ UN POLINOMIO

CHE HA GRADO $\leq d_i$ NELLA VARIABILE x_i,

SE ESISTONO $A_1,\dots,A_n$ T.C.:

1) $|A_i| > d_i$

2) $\forall (x_1,\dots,x_n) : x_i \in A_i$ SI HA $Q(x_1,\dots,x_n)=0$

ALLORA Q È IL POLINOMIO NULLO.

— o —

APPROCCIO + INTERESSANTE:

α È RADICE DI $p(x)$, ALLORA AVREMMO CHE =

$a = \alpha \quad b = \alpha \quad c = -2\alpha$ SI HA:

$a+b+c=0 \Rightarrow 0 \mid p(a)+p(b)+p(c)$ QUINDI

$\cancel{p(a)} + \cancel{p(b)} + p(c) = 0$ $\quad -2\alpha$ È UNA RADICE

COME SI AGGIUSTA?

SCRIVO $p(x) = q(x) \cdot x^k$ CON $q(0) \neq 0 \quad k \geq 0$

SUPPONGO PER ASSURDO CHE q NN È COSTANTE.

$\exists\, 2 \in \mathbb{P}$ T.C. PER QUALCHE α $2 \mid q(\alpha)$
$2 > |q(0)|$

$\alpha^{(\bmod p)}$ LO PRENDO IN $\mathbb{Z}^+$
$-2\alpha^{(\bmod p)} \in \mathbb{Z}^+$

$$a+b+c \mid p(a)+p(b)+p(c)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$0 \pmod 2 \Rightarrow 0 \pmod 2$$

$a=\alpha \quad b=\alpha \quad c=-2\alpha$, -2α È UNA RADICE
$\alpha(-2)^k$ È UNA RADICE $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ PER INDUZ.
$q(x)$ HA ALMENO $\mathrm{ord}_2(-2)$ RADICI $\rightarrow$ SONO TROPPE

$p(x) = \underline{cx^k}$ POI CI SI INVENTA QUALCOSA

— o —