WC 2010 – DISUGUAGLIANZE

Titolo nota 20/01/2010

$$|I| = |J| = n \qquad |I \cap J| = m \qquad n \ge m > 0$$

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| = \left|\sum_{j\in J} u_j\right| = 1 \qquad u_k \quad \forall k \in I \cup J$$

$$u_k \in \mathbb{R}^3$$

Tesi:

$$\sum_{k\in I\cup J} |u_k|^2 \ge \frac{2}{m+n}$$

Osservazioni

1- con i numeri o i vettori è uguale

2- Se $I \cap J = \emptyset \Rightarrow$ uguaglianza sse tutti ug.

3- Se $I \cap J \ne \emptyset \Rightarrow$ tutti uguali in $I \cap J$

" " in 

$$1 = \left|\sum_{i\in I} u_i\right| \overset{\text{Triangolare}}{\le} \sum_{i\in I} |u_i| \le \sqrt{n}\left\{\sum_{i\in I} |u_i|^2\right\}^{1/2}$$

$$= \sum_{i\in I\setminus J} |u_i| + \sum_{i\in I\cap J} |u_i|$$

$$= \underbrace{\sum_{i\in I\setminus J} |u_i| + \sum_{i\in I\cap J} \frac{|u_i|}{2}}_{n \text{ vettori}} + \underbrace{\sum_{i\in I\cap J} \frac{|u_i|}{2}}_{m \text{ vettori}}$$

(C.S. su $(m+n)$ vettori)

$$\le \sqrt{m+n}\left\{\sum_{i\in I\setminus J} |u_i|^2 + \sum_{i\in I\cap J} \frac{|u_i|^2}{2}\right\}^{1/2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Facendo i quadrati:

$$\sum_{i\in I\setminus J} |u_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\in I\cap J} |u_i|^2 \ge \frac{1}{m+n}.$$

Allo stesso modo:

$$\sum_{j\in J\setminus I} |u_i|^2 + \quad \text{"} \quad \ge \frac{1}{m+n}.$$

Sommo $\square$.

Generalizzazione: $|I| = p \quad |J| = q \quad |I \cap J| = m$

— o — o —

$a>0 \quad b>0 \quad c>0$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 1$

$$3 + \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} \le \sqrt{2} \sum_{cyc} \sqrt{a+b}$$

Metodi per disug. con radici ⇝ eliminare le radici

$\boxed{1}$ $A \le B$ provare $A \le C \le B$ provare se $\exists\, C$ numero che va bene

$\boxed{2}$ Somma di 3 radici $\le$ cosa con radice sola

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{3}\sqrt{x+y+z}$$

$\boxed{3}$ Cercare di accoppiare le radici al LHS con quelle al RHS

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}}$$

$$A + B \le \sqrt{2}\sqrt{A^2+B^2}$$

Ho dim. che $\sqrt{2}\sum_{cyc}\sqrt{a+b} \ge \sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sum_{cyc}\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}$

$$\ge \quad \text{''} \quad + \quad 3$$

Hope

Spero $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \ge 3$, cioè $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}} \ge 3$

$x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$ con il vincolo che $x+y+z \le 1$

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{2}{x+y}} \ge \frac{3}{\sqrt{x+y+z}} \ge 3$$

Medie ...

6

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3\sum_{cyc} a^3 b}$$

$$\sum a^4 + 2\sum = (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3\sum a^3 b$$

1) sostituzioni $a \to x+y$, $b \to y+z$

2) C-S, riarrangiamenti ...

$$\sum a^2 \cdot ab \leq \sum \frac{a^4+a^2b^2}{2}$$

$$LHS = \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} 2a^2b^2$$

SOS

cerchiamo di scrivere $LHS - RHS = \sum (\ )^2$

$a^3 b$ = doppio prodotto

$$a^2(a-b)^2 \longleftrightarrow \underline{(a^2-ab)^2}$$

$$\sum (a^2-ab)^2 \geq 0$$

$$(a^2-2ab)^2$$

1 4 NO

$$\sum_{cyc} (a^2 - \underbrace{ab}_{X} - bc)^2 =$$

$$= \sum_{cyc} \underbrace{a^4+a^2b^2+b^2c^2}_{LHS} - \underbrace{2a^3b}_{\text{"quasi" RHS}} - \cancel{2a^2bc} + \cancel{2ab^2c}$$

$$\geq \sum_{cyc} a^3b$$

$x = a^2-ab-bc$

$y =$ ''

$z =$ ''

$$x^2+y^2+z^2 \geq 0$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq \underline{xy+xz+yz}$$

x y

$$(a^2-ab+bc)(b^2-bc+ca) = \sum b^3c$$

$$\cancel{= a^2b^2 - 2^2bc - a^3c - ab^3 \quad bc + a^2bc}$$
$$\cancel{-b^3 \quad c + bc^2a}$$

NO

$$\sum_{cyc} \begin{matrix} \cancel{a^2b^2} & \cancel{-a^2bc} & \cancel{+a^3c} \\ \cancel{-ab^3} & \cancel{+ab^2c} & \cancel{-a^2bc} \\ b^3c & \cancel{-b^2c^2} & \cancel{+abc^2} \end{matrix}$$

VASC INEQUALITY

$$\sum_{cyc} (a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2) = \frac{1}{2}\sum_{cyc} (a^2 - b^2 + \underbrace{ac + bc - 2ab}_{\text{a meno di permutazioni}})^2$$

— o — o —

$c = \min \qquad b = c + x \qquad a = c + y$

espandendo: roba quadratica in c con $\Delta \leq 0$

dipende solo da x e y.

— o — o —

Teorema SID (Symmetric Inequality Degree ...)

$f(a,b,c)$ simmetrica in 3 variabili e polinomiale (omogenea)
Se il grado è ≤ 5, allora $f(a,b,c)$ assume max e min in uno dei seguenti 2 casi:

$\to a = b = c$
$\to a = b$
} se cerco max / min su $\mathbb{R}^3$

$\to a = b = c$
$\to a = 0$
} se cerco max / min su $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

— o — o —

Idea della dim: scrivo $f(a,b,c)$ come funzione di S, P, Q

Lemma Dati a, b, c esistono sempre

a_1, b_1, c_1 con $a_1 = b_1$ e stessa S, stesso Q, P maggiore $\geq$

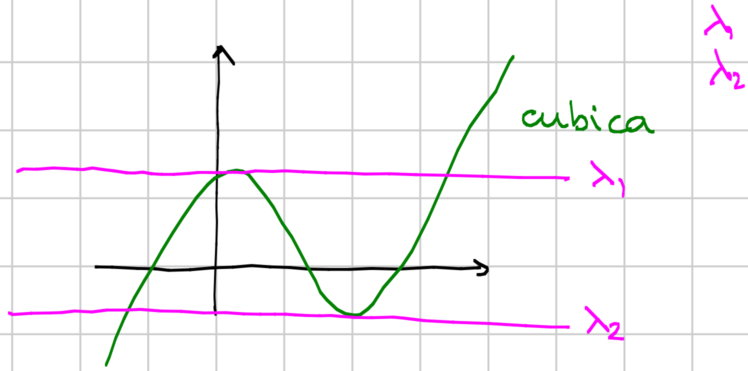
a_2, b_2, c_2 con $a_2 = b_2$ " " P $\leq$

$$f(a,b,c) = \text{Mostro}_1(S,Q) + P\ \text{Mostro}_2(S,Q)$$

Se grado ≤ 5, l'espressione è di 1° grado in P.

In ogni caso per il max / min (inf / sup) se la giocano solo le terne con 2 comp. uguali.

Dim. Lemma a, b, c sono le soluzioni di $x^3 - Sx^2 + Qx - P = 0$



$$u = \sum_{cyc} a^3 b$$

S, Q, P

$$v = \sum_{cyc} a^3 c$$

$$u + v = \text{mostro}_1(S,P,Q)$$
$$u \cdot v = \text{mostro}_2(S,P,Q)$$

$$\frac{\text{mostro} \pm \sqrt{\text{mostro}}}{2}$$