WC 2010 – COMBINATORIA

Titolo nota 21/01/2010

$\boxed{\text{Pb. 4}}$ $N = m^2+1$

Quadrato $N \times N$ $= N^2$ caselle colorate usando N colori (ogni colore N volte)

Tesi: esiste riga o esiste colonna con almeno $m+1$ colori

— o — o —

Idea: DOUBLE COUNTING dopo aver supposto per assurdo che ogni riga e ogni colonna contengano $\leq m$ colori.

$R = \{(\text{riga}, \text{colore}) : \text{colore appare nella riga}\}$
$C = \{(\text{colonna}, \text{colore}) : \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{colonna}\}$

Conto in 2 modi gli elementi di $R \cup C$.

<u>Riga-wise</u> Per ogni riga fissata ho al + m colori che vi appaiono (sono per assurdo). Quindi

$$|R| \leq mN$$

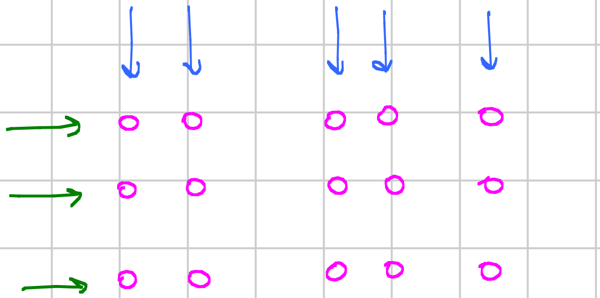
Analogamente: $|C| \leq mN$

$$|R \cup C| \leq 2mN$$

<u>Color-wise</u>. Fisso uno degli N colori e vedo in quante righe o colonne compare. Mettiamo che il colore C_k compaia in x_k righe ed y_k colonne. Allora

$$|R \cup C| = \sum_{k=1}^{N} (x_k + y_k) \geq \sum_{k=1}^{N} 2\sqrt{x_k y_k}$$

Ora c_k compare in al max $x_k y_k$ posizioni, quindi



$x_k y_k \geq N$, quindi

o possibili posizioni del colore c_k

$$x_k + y_k \geq 2\sqrt{x_k y_k} \geq 2\sqrt{N} = 2\sqrt{n^2+1}$$

Quindi $x_k + y_k \geq 2\sqrt{n^2+1}$, ma essendo $x_k + y_k$ intero sarà $x_k + y_k \geq 2n+1$. Da qui concludo perché

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k + y_k) \geq (2n+1)N$$

In alternativa bastava:

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k + y_k) \geq \sum_{k=1}^{N} 2\sqrt{x_k y_k} \geq 2N\sqrt{n^2+1} > 2nN$$

— o — o —

$\boxed{\text{Pb 5}}$ 2009 pedine allineate BNBBBN...

Mossa: scegliere una nera e girare le 2 vicine (una se la scelta ai bordi)

Iniziale: una sola N.

Domanda: dove deve essere la N iniziale per arrivare con tutte N alla fine.

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ N iniziale deve essere in posizione dispari.

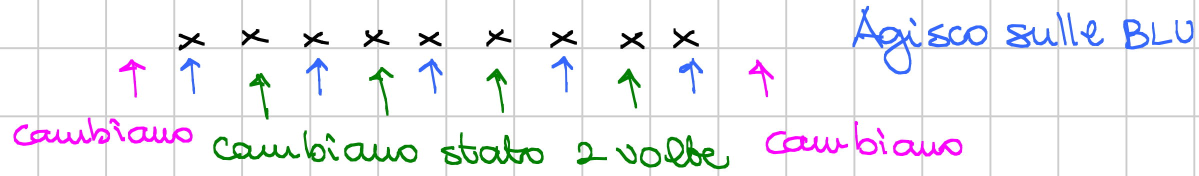
Infatti: parità di N in posizione dispari è invariante

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Parità di N in posizione pari $\boxed{\text{non}}$ è invariante

$\boxed{\text{Oss. 3}}$ Se N iniziale è ai lati, allora non si può

(ad ogni step ci sono sempre solo 2 N consecutive o una ai bordi)

$\boxed{\text{Oss. 4}}$ Partendo dal centro ci si fa. Induzione: si fa con $2n+1$



$\boxed{\text{Oss. 5}}$ Se 2009 ⤳ 2010: con ragionamenti simile si riesce dalle 2 centrali.

$\boxed{\text{Oss. 6}}$ Dalle altre posizioni non si riesce.

Idea 1: trovare un set di configurazioni tale che
- → contiene quella iniziale
- → non contiene quella finale
- → chiuso rispetto alle mosse ammissibili

In questo caso non sembra così facile

Altra oss.: i blocchi pari si possono trasportare dx − sx   B B N N B B   B B B N N B

Serve un "invariante" che sia invariante per traslazioni

Invariante: SOMMA A SEGNO ALTERNO DELLE POSIZIONI DEI NERI

Bisogna dim. che è invariante MODULO 2010 $(n+1)$

Con questo si escludono tutte le posizioni fuori dal centro.

— o — o —

Pb 6 Grafo con 2009 vertici. Dire se esiste cammino chiuso che li visita tutti una e una sola volta (circuito HAMILTONIANO) in questi casi

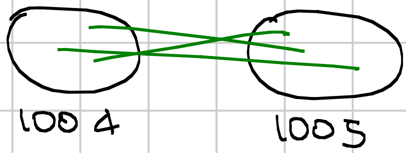
2m+1

① Se ogni vertice è collegato con almeno 1004 ; NO m

② " " " " " " " 1005 ; SI m+1

③ " " " " " " esattamente 1004. SI m

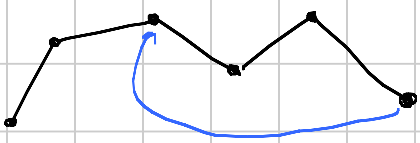
① Prendo 2009 punti e collego i 2 gruppi in tutti i modi



Non esistono cammini chiusi di lungh. DISPARI.

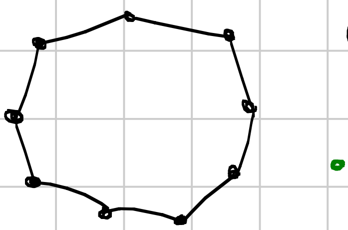
② → mostrare che almeno un cammino chiuso esiste
→ prendere quello massimale (uno di quelli)
→ allungarlo se serve.

Per il primo step parto da un punto e giro finché non ritorno ad un p.to già visitato



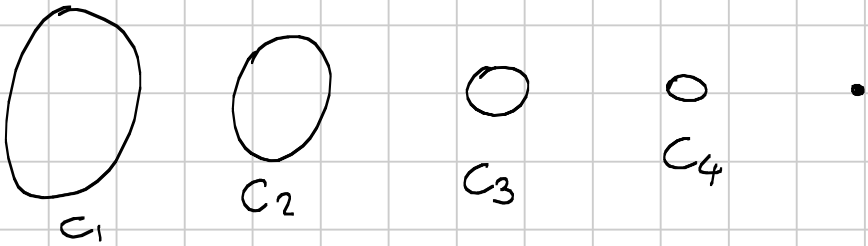
Il cammino sarà lungo ALMENO 1006

Quello massimale avrà almeno 1006 vertici visitati



Come allungarlo ?

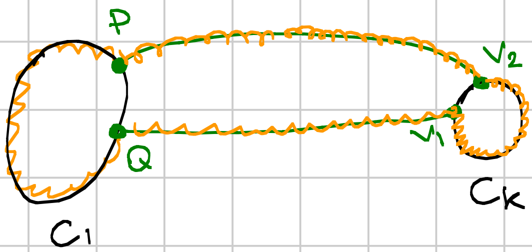
Idea: fare una successioni di cammini max disgiunti



I cicli da 2
si considerano
chiusi

Siano $|C_1| \geq |C_2| \geq \dots \geq |C_k|$ con $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ = tutti

Può essere $|C_k| = 1$? NO : il superstite dovrebbe essere collegato a strett. + di metà dei rimanenti.
Ma allora esiste ciclo precedente in cui ne tocca + di metà, quindi 2 consecutivi, quindi ciclo precedente no massimale

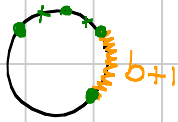


Ho allungato se tra P e Q ce ne sono meno di b.

$|C_1| = a$ $\qquad$ $|C_k| = b$

Prendo v_1. Non ci sono buchi $\geq b$ tra i suoi contatti in C_1.

Con quanti è collegato v_1 ? (al +)



$$b - 1 + \frac{1}{2}|C_{k-1}| + \frac{1}{2}|C_{k-2}| + \dots + \frac{1}{2}|C_2| + \frac{1}{2}(|C_1| - b \;)$$

potrebbe esserci $\frac{1}{2}$ in +.

$$\cancel{b} - 1 - \frac{\cancel{b}}{2} \qquad + \frac{1}{2}(|C_{k-1}| + \dots + |C_1|)$$

$$= \frac{2009}{2} - \cancel{\frac{b}{2}} = 1004 \quad \text{troppo pochi}$$