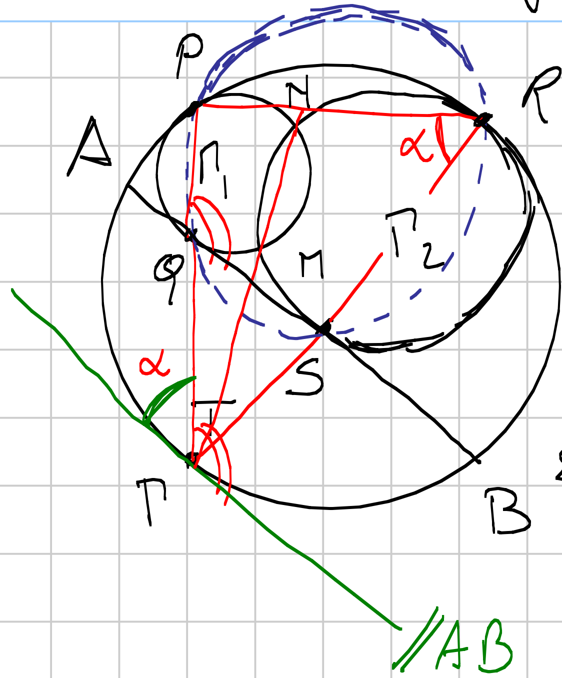
WC 2010 - Geometria · 1

Titolo nota 21/01/2010

4a)



T pt medio di $\widehat{AB}$

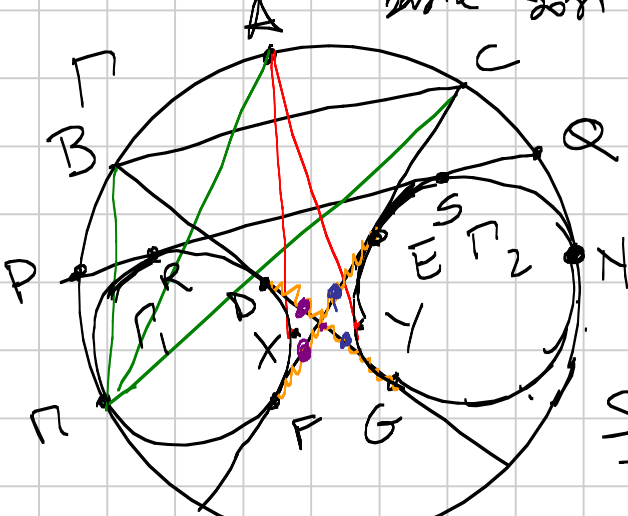
1) P, Q, T all.
R, S, T all.

2) PQSR ciclico
↳ ω cfr. per PQSR

⇒ PQ asse rad. di Γ_1 e ω
RS asse rad di Γ_2 e ω
MN asse rad di Γ_1 e Γ_2

Concorrono ⇒ MN passa per $PQ \cap RS = T$.

4b) $\boxed{\text{OSS}}$: in 4a non serve che Γ_1 e Γ_2 si intersecano basta sost MN con asse radicale.



Tesi: PQ // BC
pt med $\widehat{PQ}$ = pt med $\widehat{BC}$.
A pt. med di PQ

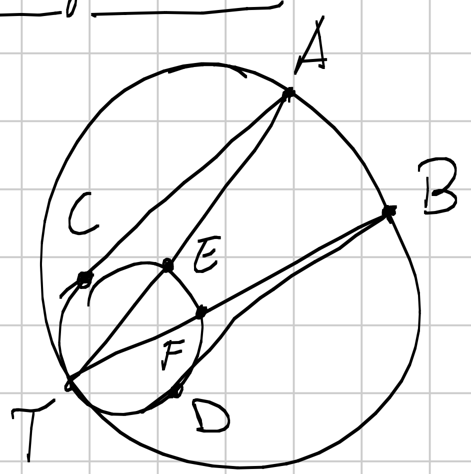
Sappiamo che: • A, S, N ; A, R, M } allineati
• A ∈ asse rad(Γ_1, Γ_2).
⇒ AX = AY. (AX tg Γ_1, AY tg Γ_2)

Tesi: AC = AB.

Tolomeo su ABMC: $MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$

Tolomeo su ACNB: $NA \cdot BC = NB \cdot AC + NC \cdot AB$

Problema giocattolo:



$$AC^2 = AE \cdot AT$$
$$DB^2 = BF \cdot BT$$

$$\frac{AC^2}{DB^2} = \frac{AE}{BF} \cdot \frac{AT}{BT} = \left(\frac{AT}{BT}\right)^2$$

$$\frac{AE}{BF} = \frac{TA}{TB}$$

$$\frac{TA}{TB} = \frac{TE}{TF} \overset{\text{✱}}{=} \frac{TA - AE}{TB - BF} \overset{\flat}{=} \frac{AE}{BF}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{AC}{DB} = \frac{AT}{BT}}$$

Scuola Media:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$$
$$NA \cdot BC = NB \cdot AC + NC \cdot AB$$

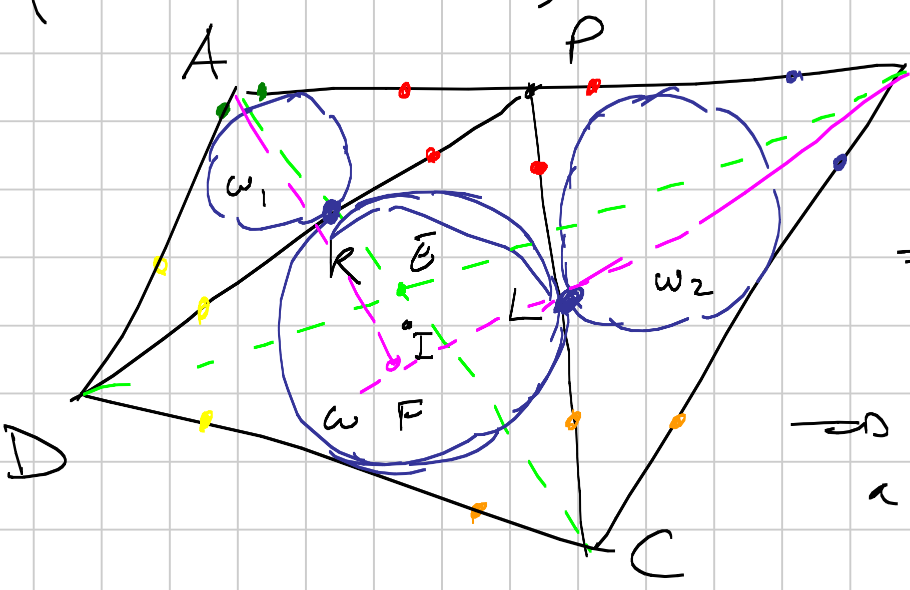
$$\frac{MA}{AX} = \frac{MB}{BD} = \frac{MC}{CF}$$

$$AX \cdot BC = BD \cdot AC + CF \cdot AB$$
$$AY \cdot BC = BG \cdot AC + CE \cdot AB$$

$$\Rightarrow (BD - BG)AC = (CE - CF) \cdot AB$$

$$D\cancel{G} \cdot AC = E\cancel{F} \cdot AB \Rightarrow AC = AB.$$

5) (SL IMO 2008) = IMO 6 - 2008



Γ_b: E, I, F all.

$\Rightarrow$ APCD circoscritto a una cf. Γ_a

$\Rightarrow$ BPDC circoscritto a una cf Γ_b.

Fatto 1: Date 2 cf. $\exists$ 2 pt. centri di similitudine tra le 2 cf.

Fatto 2: Date 3 cf. i centri di simil sono all. a 3 a 3

la comp. di 2 omot. è un'omot. con centro sulla congiungente dei centri.

$\boxed{\text{OSS}}$: $A = \text{exsim}(\Gamma_a, \omega_1)$ $\qquad B = \text{exsim}(\Gamma_b, \omega_2)$

$K = \text{insim}(\omega_1, \omega)$ $\qquad L = \text{insim}(\omega_2, \omega)$

$C = \text{exsim}(\Gamma_a, \omega)$ $\qquad D = \text{exsim}(\Gamma_b, \omega)$

Supponiamo di avere: Γ cf. tg. a AB, AD, BC.

$\Rightarrow$ $A = \text{exsim}(\omega_1, \Gamma)$ $\qquad B = \text{exsim}(\omega_2, \Gamma)$.

O centro di Γ.

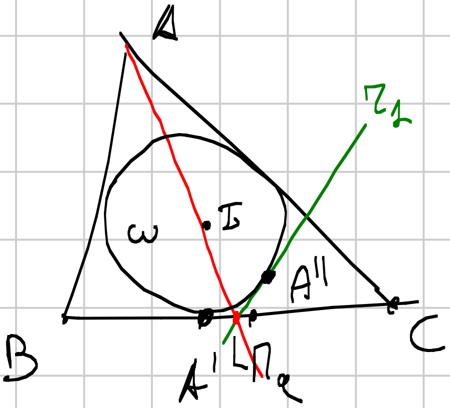
$$\left.\begin{array}{l} \text{exsim}(\Gamma, \omega) = AK \cap OI \\ \text{exsim}(\Gamma, \omega) = BL \cap OI \end{array}\right\} \Rightarrow F = \text{exsim}(\Gamma, \omega)$$

$A = \text{exsim}(\Gamma, \Gamma_a)$ $\qquad B = \text{exsim}(\Gamma, \Gamma_b)$

$AC \cap OI =$ insim (ω, Γ)
$BD \cap OI =$ insim (ω, Γ) $\Big\} \Rightarrow E =$ insim (Γ, ω)

$\Rightarrow O, I, E, F$ sono allineati $\left[(O, I, E, F) = -1 \right]$

6) <u>1° pezzo</u>: Chi é r_1?



$r_1 =$ simm. di BC risp. a AI
"retta tang. a ω passante per L"
$L = AI \cap BC$.
$A'' = r_1 \cap \omega =$ simm. di A' risp. a AI.

•) $A''B''C''$ omotetico ad ABC. (lati con trigo. + lati paralleli)
(AA'', BB'', CC'' concorrono nel centro di simil. (...) di ω e Γ circo ad ABC.)

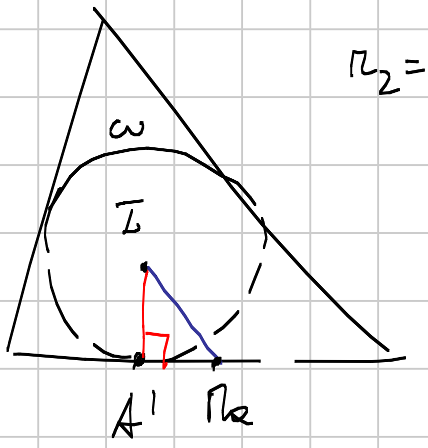
•) $\Pi_a \Pi_b \Pi_c$ omotetico ad ABC.

•) $A''B''C''$ omot. a $\Pi_a \Pi_b \Pi_c$ con centro in U.

cfr. circo $= \omega \xrightarrow{\text{omot.}}$ cfr. circo $=$ Feuerb

ω tange Feuerbach $\Rightarrow U =$ centro simil. esterno
$\Rightarrow U =$ pt. di Feuerb $=$ pt. di tg. tra cfr. inscr. e cfr. di F.

2° Passo: Chi è r_2?



r_2 = perp da A' a IM_a.

$A' \in$ cfr di diam $IM_a = \Gamma_a$

$\Rightarrow r_2$ passa per $\Gamma_a \cap \omega$

$\Rightarrow r_2$ = asse rad. di Γ_a, ω

3° passo: inversione in ω

$r_1 \longrightarrow$ cfr. di diam IA'' $\longrightarrow$ centro P_a = pt. med di IA''

$r_2 \longrightarrow$ cfr di diam IM_a $\longrightarrow$ centro Q_a = pt med di IM_a.

$X_a \longrightarrow$ intersez. di $\neq I = Y_a$

Tesi: $IY_aY_bY_c$ ciclico.

IY_a = asse rad.

$\Downarrow$

$IY_a \perp P_aQ_a$

$IY_b \perp P_bQ_b$

$IY_c \perp P_cQ_c$

e per i pt. medi

$\Downarrow$

$P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$ omotetici di centro V = pt med di IU.

$P_aQ_a \cap P_bQ_b \cap P_cQ_c = V$.

$\Rightarrow IY_aY_bY_c$ ciclico

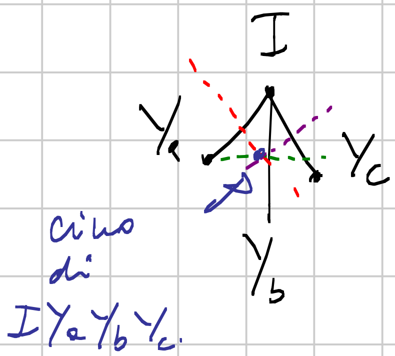
$\Downarrow$

X_a, X_b, X_c all.

e

U è simm di I risp a V

$\Rightarrow$ è concicl con $IY_aY_bY_c$



$\Rightarrow X_a, X_b, X_c$ stanno su una retta che incontra
ω solo in U. $\Rightarrow$ la t_g in U.