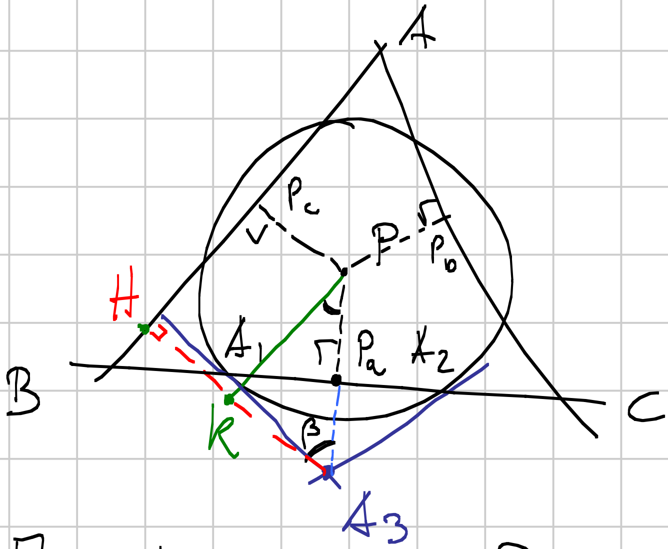
WC 2010 - Geometria 2

Titolo nota 22/01/2010

7) ABC Triangolo Γ cfr. qualsiasi.

P, Q, R poli di BC, CA, AB risp. a Γ

$\Rightarrow AP, BQ, CR$ concorrono.



$dist(A_3, AB)$
$dist(A_3, AC)$

P centro di Γ : A_3 è inv. di P_a risp. a Γ $\quad PK \parallel AB$

$A_3H = ?$ $\quad HK = PP_c$ $\quad A_3K = ?$

$$A_3K = PA_3 \cdot \cos\beta = \frac{R^2}{PP_a}\cos\beta$$

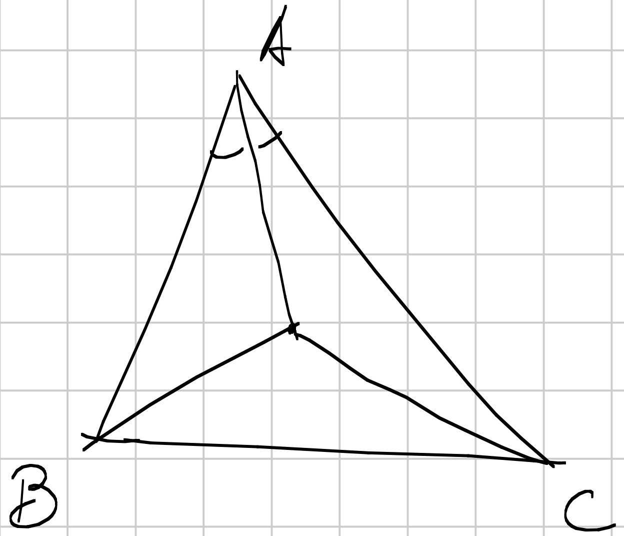
$$PA_3 = \frac{R^2}{PP_a}$$

$$A_3H = PP_c + \frac{R^2}{PP_a}\cos\beta = dist(A_3, AB)$$

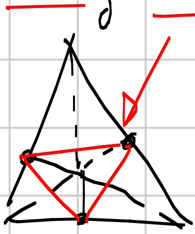
$$dist(A_3, AC) = PP_b + \frac{R^2}{PP_a}\cos\gamma = \frac{1}{PP_a}(PP_b \cdot PP_a + R^2\cos\gamma)$$

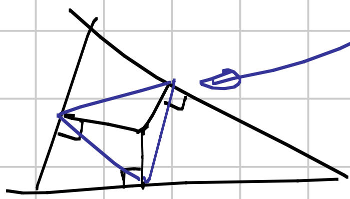
$$\frac{dist(A_3, AB)}{dist(A_3, AC)} = \frac{PP_c \cdot PP_a + R^2\cos\beta}{PP_b \cdot PP_a + R^2\cos\gamma}$$

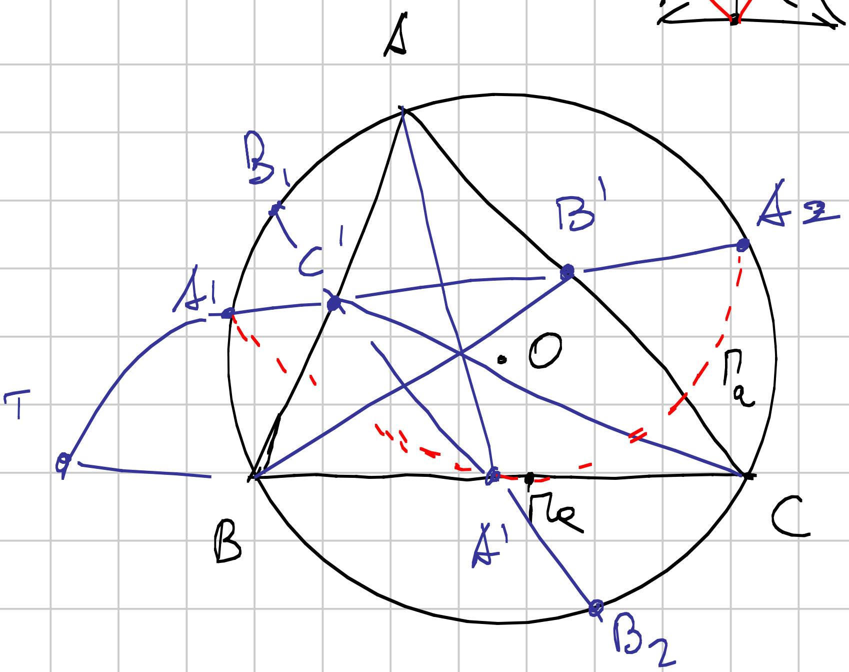
$$\frac{d(A_3, AB)}{d(A_3, AC)} \cdot \frac{d(B_3, BC)}{d(B_3, BA)} \cdot \frac{d(C_3, AC)}{d(C_3, BC)} = 1$$



8) P t.c. il suo Triangolo ceviano sia Tri. pedale di un altro punto







$T = BC \cap B'C'$

$(B, C, T, A') = -1.$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BT}{TC}$$

$\Longrightarrow TB \cdot TC = TA' \cdot TM_e \quad \parallel \quad \Longrightarrow M_e \in \Gamma_a$

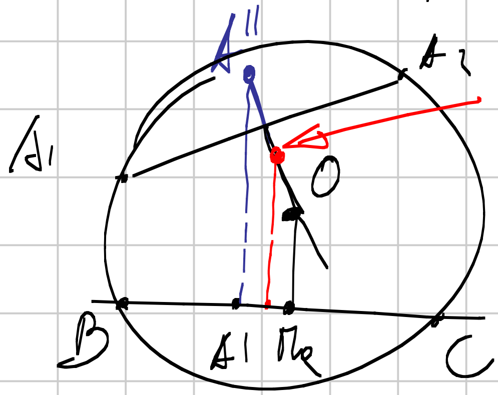
$TB \cdot TC = \underbrace{TA_1 \cdot TA_2} = \mathrm{pow}_{\Gamma_a}(T)$

O_a = centro di Γ_a = asse di $A_1 A_2$ $\cap$ asse di $A' M_e$

$\parallel$

perp. da O a $A_1 A_2$

A'' = asse di $A_1 A_2$ $\cap$ perp. per A' a BC



O_a = pt medio di $A''O$

$\Rightarrow$ $O_a O_b O_c$ pt. medi di OA'' OB'' OC''

$\Rightarrow$ $O_a O_b O_c \triangleq A''B''C''$

— o —

$C'A_1 \cdot C'A_2 = C'B_1 \cdot C'B_2 \Rightarrow C' \in$ asse rad cfr. per $A' A_1 A_2$ e cfr. per $B' B_1 B_2$ $= \ell_c$.

ℓ_c passa per C' e $\ell_c \perp O_a O_b \parallel A''B''$

per ip: le perp. da A', B', C' ai lati concorrono in Q,

$\parallel$ $\quad$ $\parallel$ $\quad$ $\parallel$

$A'A''$ $\quad$ $B'B''$ $\quad$ $C'C''$ concorrono

($A'B'C'$, $A''B''C''$ sono perspettivi in Q).

le perp. da A' a $B''C''$, da B' a $A''C''$, da C' a $A''B''$

concorrono. e viceversa

in O, nel centro rad di $A'A_1A_2$, $B'B_1B_2$, $C'C_1C_2$ = R

(lemma) $\Rightarrow$ O, R, Q sono allineati

<u>Rimane da dim che</u>: P' sta su questa retta

- si trova la condizione di $3°$ grado
- $P = [p : q : z]$ $\quad O : [\ \_\_\_\_\ ]$

  $P' = \left[\frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{z}\right]$

A', B', C'

$AP = \{ zz - qy = 0 \}$

$A' = AP \cap BC = [0 ; q ; z]$

$A'' =$ anzichè.

$f(x, y, z) = 0 \quad \deg f = 3$

$x^2 y - z^2 x + y^2 z = 0$

$z^2 x = x^2 y + y^2 z$

$f(x,y,z) \mid g(x,y,z)$

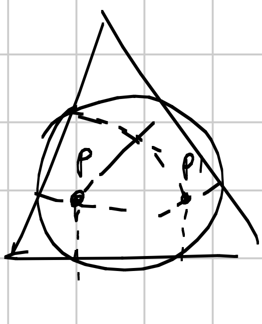
<u>Note</u>:

$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$ (T. di Ceva)

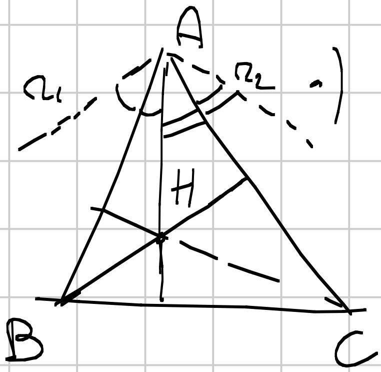
$AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$ (T. di Carnot)

<u>Oss</u>: P, P' coniug. isog (O, H)

$\Rightarrow$ proiez sui lati sono concicliche



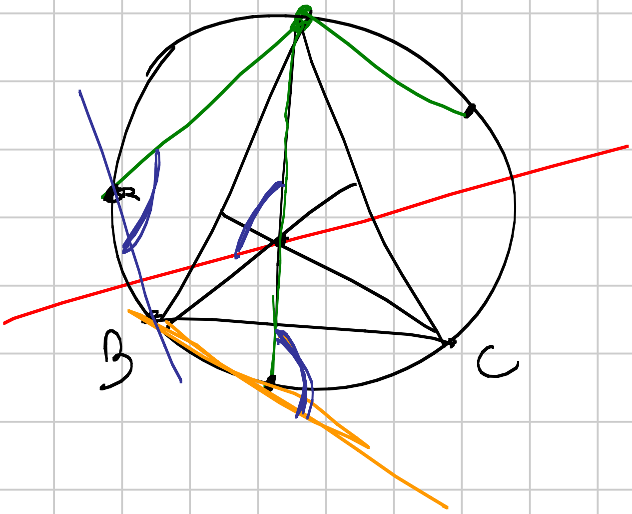
9) (a) Le rifl. di una retta per H nei lati concorrono.



•) le rifl. di AH nei lati concorrono.

$$\left.\begin{array}{l} - AH \\ - r_1 \\ - r_2 \end{array}\right\} \text{concorrono in } A$$

•) I simm. di H risp. ai lati stanno sulla cfr. circo



$\Rightarrow$ concorrono.

<u>Cor</u>: i simm. della retta di Eulero concorrono sulla cfr. circoscritta

<u>Via coord</u>: $E = \left[\dfrac{a^2}{b^2-c^2} : \dfrac{b^2}{c^2-a^2} : \dfrac{c^2}{a^2-b^2}\right]$

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\textstyle\sum' a^2yz\right) - (x+y+z)(\;??\;) = 0$$

$$\textstyle\sum' b^2c^2x$$

${}^tPAX = 0$ $\qquad$ $A =$ matr. della cfr. $\qquad$ $X = [x:y:z]$

$P = [\,-\;-\;-\,]$

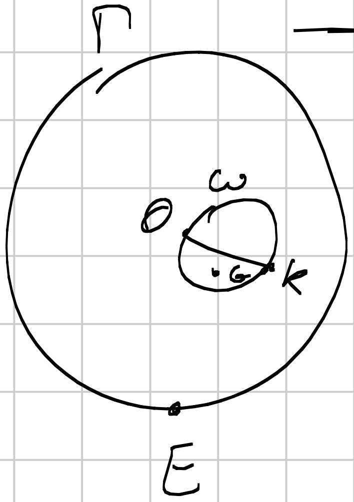
$$\begin{pmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} & \frac{xz}{2} \\ \cdot & y^2 & \frac{yz}{2} \\ \cdot & \cdot & z^2 \end{pmatrix}$$

$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$

$$(0:1:1)\begin{pmatrix}0 & \frac{c^2}{2} & \frac{b^2}{2}\\ \frac{c^2}{2} & 0 & \frac{a^2}{2}\\ \frac{b^2}{2} & \frac{a^2}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \left(\frac{c^2+b^2}{2} : \frac{a^2}{2} : \frac{a^2}{2}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} =$$

$$= x\left(\frac{c^2+b^2}{2}\right) + y\frac{a^2}{2} + z\frac{a^2}{2}$$

—— * ——



1) se inverto in Γ

$E \longrightarrow E$

$\omega \longrightarrow$ retta $= \ell$

$G \longrightarrow$ ...

retta di Eul $\to$ retta

inv. circo $\to$ simm in ℓ.

2) Considerare $\Gamma_a = \left\{P : \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}\right\}$

(a) asse rad tra Γ_a e Γ è la simmediana AK

(b) $\Gamma_a \perp \Gamma$

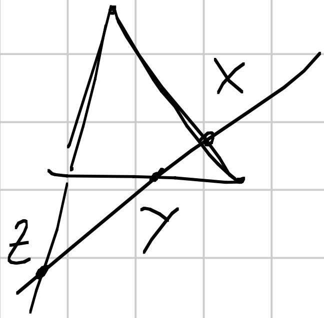
(c) i centri di $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ sono allineati. (Menelao)

X, Y, Z

$\Rightarrow$ retta per X, Y, Z è l'inv. di ω in Γ.

$\Rightarrow$ simm. di $E \in$ inv. della retta di Eulero.

Se: $EG \cap OK$ è pt. med di OK ho finito.



dimm di E risp ad AB, AC, BC
sono all.