

7 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$
 $f(x+y-z) + f(2\sqrt{xz}) + f(2\sqrt{yz}) = f(x+y+z)$
 $\forall x+y > z$

Step 1 Pongo $f(x) = g(x^2)$ [sia $g(x) = f(\sqrt{x})$. Esiste...]
 $g((x+y-z)^2) + g(4xz) + g(4yz) = g((x+y+z)^2)$

Sembra $g(a) + g(b) + g(c) = g(a+b+c) \quad \forall a, b, c > 0$

Step 2 Verificare che, per ogni $a > 0, b > 0, c > 0$ esistono x, y, z soddisfacenti il vincolo iniziale $x+y > z$ b.c.
 $a = (x+y-z)^2$
 $b = 4xz$
 $c = 4yz$
 } bisogna trovare x, y, z in funzione di a, b, c
 $x+y-z = \sqrt{a}$
 $x+y+z = \sqrt{a+b+c} \quad \leadsto$ trovo z e $x+y$

Step 3 $z=y \Rightarrow g(x^2) + g(4xy) + g(4y^2) = g(x^2 + 4xy + 4y^2)$

$y = \frac{x}{2} \Rightarrow g(x^2) + g(2x^2) + g(x^2) = g(4x^2)$

$2g(x^2) + g(2x^2) = g(4x^2)$

Step 4 $b=c$ nella Cauchy a 3:

$g(a) + 2g(b) = g(a+2b)$

Metto $2a$ al posto di a : $g(2a) + 2g(b) = g(2a+2b)$
 RHS simmetrico \Rightarrow LHS simmetrico

$$g(2a) + 2g(b) = g(2b) + 2g(a) = g(2a+2b)$$

$$\boxed{\text{Step 5}} \quad g(2a) - 2g(a) = g(2b) - 2g(b) \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$$

$$\Rightarrow g(2a) - 2g(a) = \Delta \quad \text{Speranza: } \Delta = 0$$

$$\Rightarrow g(2a) = 2g(a) + \Delta$$

$$2g(x^2) + g(2x^2) = g(4x^2) \quad \text{uso formula precedente}$$

$$\begin{aligned} 2\cancel{g(x^2)} + 2\cancel{g(x^2)} + \Delta &= 2g(2x^2) + \Delta \\ &= 4\cancel{g(x^2)} + 2\Delta + \Delta \quad 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Step 6}}$ Riparto dallo Step 4:

$$g(a) + 2g(b) = g(a+2b) \Rightarrow g(a) + g(2b) = g(a+2b)$$

$= g(2b)$

$$\Rightarrow g(a) + g(b) = g(a+b) \quad \forall a, b > 0$$

$\boxed{\text{Step 7}}$ Quindi $g(x) = \lambda x$ su $x \in \mathbb{Q}_{>0}$

+ locale (globale) limitatezza dal basso $\Rightarrow g(x) = \lambda x$
su $x \in (0, +\infty)$.

Fatto ancora + debole: basta un quadratino del piano
in cui non entra il grafico.

— 0 — 0 —

Alternativa: dalla Cauchy a 3 si conquistano tutti
gli $x \in \mathbb{Q}$ con numeratore e denom. dispari.
Monotonia dalla $g(a+2b) = g(a) + 2g(b)$
 \Rightarrow conquista di $(0, +\infty)$.

Problema 8

$$\alpha \quad (x, y) \rightarrow 2x + 3y$$

$$\beta \quad (x, y) \rightarrow 3x + y$$

Parto da $(1, 7)$ e costruisco la successione usando α e β β β α ... oppure quella inversa. Il risultato finale non cambia.

Data una successione w di α e β definisco L_w come l'ultimo termine

Tesi: $L_w(1, 7) = L_{\bar{w}}(1, 7)$

\uparrow parola invertita

INDUZIONE SU LUNGHEZZA DI w .

Osservazione fondamentale: l'operatore L_w è lineare

$$L_w(ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2) = aL_w(x_1, y_1) + bL_w(x_2, y_2)$$

$$a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2)$$

Passo induttivo $w\alpha$ (altri casi: $w\beta$, βw , αw)

$$L_{w\alpha}^{(1,7)} = 2L_w^{(1,7)} + 3L_{w\alpha}^{(1,7)}$$

\uparrow prima

\uparrow penultimo

$$L_{\alpha\bar{w}} = L_{\alpha\bar{w}}(7, 23)$$

\uparrow termine vecchio

$(1, 7) \rightarrow (7, 23)$

$$= 3L_{\alpha\bar{w}}(1, 7) + 2L_{\alpha\bar{w}}(2, 1)$$

$(7, 23) = 3(1, 7) + (4, 2)$

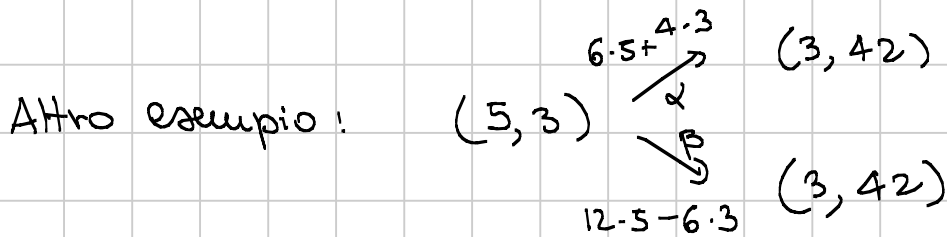
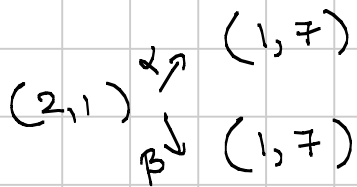
$= 3(1, 7) + 2(2, 1)$

$L_{w\alpha}(1, 7) = L_{\alpha\bar{w}}(1, 7)$ per Hp. induttiva

$$L_{\alpha\bar{w}}(2, 1) = L_{\bar{w}}(1, 7)$$

$(2, 1) \xrightarrow{\alpha} (1, 7)$

Idea



Esercizio: usando questa idea trovare un'induzione che usa il solo ultimo termine.

— o — o —

Problema 9a

Dim 1 Pigeonhole

- a_1
- $a_1 + a_2$
- $a_1 + a_2 + a_3$
- ...

Se una somma è 0, allora ok.
Altrimenti p somme in $p-1$ classi

\Rightarrow 2 somme uguali \Rightarrow sottragg.

Lemma

Dim 2 Dati h numeri $a_1, \dots, a_h \not\equiv 0 \pmod{p}$, allora le possibili somme coprono almeno R classi mod p .

se uno è $\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow$ fine
 \nearrow altrimenti applico lemma con $h=p$

conclusione dato lemma

Dim Lemma: induzione

Passaggio induttivo $R \Rightarrow R+1$

Ho almeno R somme e aggiungo l'($R+1$)-esimo elem. a
 Cosa vuol dire se ottengo solo somme vecchie

$$\begin{array}{l}
 S_1 + a = S_2 \\
 S_2 + a = S_3 \\
 \vdots \\
 S_R + a = S_{R+1}
 \end{array}$$

$$\cancel{S_1} + \dots + \cancel{S_R} + Ra = \cancel{S_1} + \dots + \cancel{S_R}$$

Se $R < p$ e $a \not\equiv 0$ non può essere

[Se il ciclo $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow \dots$ si chiude prima della fine, è uguale!]

LEMMA UTILE

A, B insiemi di classi resto modulo p
(p primo)

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$|A|=m \quad |B|=n$$

$$|A+B| \geq m+n-1$$

(modulo m non primo: vero ancora se $A \not\ni 0$.)

Cauchy - Davenport - Chowla

$$n = k(p-1) + 1$$

Posso ottenere una sottoinsieme del trg.

(a_1, \dots) con a qualsiasi.

Se no, poter ottenere al massimo $p-1$ valori di a .

→ le numero di vettori con 1^a coordinata $\neq 0$
 $\bar{e} \leq p-1$

→ le numero di vettori con 1^a coordinata $= 0$
 $\bar{e} \geq (p-1)(k-1) + 1$

$$a_1, \dots, a_n \quad n = k(p-1) + 1$$

Obiettivo: trovare $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$
 (non tutti nulli) tali che

$$\sum \varepsilon_i a_i = 0 \quad (\text{vettore nullo})$$

$$\varepsilon_i = x_i^{p-1}$$

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})$$

$$\sum \varepsilon_i a_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

$$\sum a_{ij} x_i^{p-1} = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

k equazioni, $n = k(p-1) + 1$ incognite.

Sistema di equazioni con coefficienti in \mathbb{F}_p .

p-1 m

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} m \text{ equazioni} \\ n \text{ incognite} \end{array}$$

$$d_i = \deg f_i$$

Ipotesi: $d_1 + \dots + d_m < n$

Test: $V = \text{insieme delle sol} \Rightarrow |V| \equiv 0 \pmod{p}$

$$P = \prod_{i=1}^n (1 - f_i^{p-1})$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, \dots, x_n) \in V \\ 0 & \text{se } (x_1, \dots, x_n) \notin V \end{cases}$$

$$S(P) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_p^n} P(x_1, \dots, x_n)$$

$$|V| \equiv S(P) \pmod{p}$$

$$\deg_1 P < n(p-1)$$

P è somma di monomi

$$x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$$

$$t_1 + \dots + t_n < n(p-1)$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{t_1, \dots, t_n} a_t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$$

$$S(P) = \sum a_t \sum_{(x_1, \dots, x_n)} x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$$

$$\left(\sum_{x_1} x_1^{t_1} \right) \dots \left(\sum_{x_n} x_n^{t_n} \right)$$

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^t = \begin{cases} 0 & \text{altrimenti} \\ -1 & \text{se } (p-1) \mid t \end{cases}$$

almeno un $t_i \bar{0} < p-1 \rightarrow \square$.

Teorema di Chevalley (e Warning).