WC 2010 — MISCELLANEA

Titolo nota 22/01/2010

$\boxed{7}$ $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$

$$f(x+y-z)+f(2\sqrt{xz})+f(2\sqrt{yz})=f(x+y+z)$$

$\forall\ x+y>z$

$\boxed{\text{Step 1}}$ Pongo $f(x)=g(x^2)$ [sia $g(x)=f(\sqrt{x})$. Esiste...]

$$g((x+y-z)^2)+g(4xz)+g(4yz)=g((x+y+z)^2)$$

Sembra $g(a)+g(b)+g(c)=g(a+b+c)$ $\forall\, a,b,c>0$

$\boxed{\text{Step 2}}$ Verificare che, per ogni $a>0, b>0, c>0$ esistono x,y,z soddisfacenti il vincolo iniziale $x+y>z$ t.c.

$$\left.\begin{aligned} a&=(x+y-z)^2\\ b&=4xz\\ c&=4yz\end{aligned}\right\}$$ bisogna trovare x,y,z in funzione di a,b,c

$x+y-z=\sqrt{a}$

$x+y+z=\sqrt{a+b+c}$ $\leadsto$ trovo z e $x+y$

$\boxed{\text{Step 3}}$ $z=y \Rightarrow g(x^2)+g(4xy)+g(4y^2)=g(x^2+4xy+4y^2)$

$y=\frac{x}{2} \Rightarrow g(x^2)+g(2x^2)+g(x^2)=g(4x^2)$

$$2g(x^2)+g(2x^2)=g(4x^2)$$

$\boxed{\text{Step 4}}$ $b=c$ nella Cauchy a 3:

$$g(a)+2g(b)=g(a+2b)$$

Metto $2a$ al posto di a: $g(2a)+2g(b)=g(2a+2b)$

RHS simmetrico $\Rightarrow$ LHS simmetrico

$$g(2a) + 2g(b) = g(2b) + 2g(a) \quad = g(2a+2b)$$

$\boxed{\text{Step 5}}$ $g(2a) - 2g(a) = g(2b) - 2g(b) \quad \forall a>0 \ \forall b>0$

$\Rightarrow \quad g(2a) - 2g(a) = \Delta \qquad$ Speranza: $\Delta = 0$

$\Rightarrow \quad g(2a) = 2g(a) + \Delta$

$2g(x^2) + g(2x^2) = g(4x^2)$ uso formula precedente

$$2\cancel{g(x^2)} + 2\cancel{g(x^2)} + \cancel{\Delta} = 2g(2x^2) + \Delta$$
$$= 4\cancel{g(x^2)} + 2\Delta + \cancel{\Delta} \qquad 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$\boxed{\text{Step 6}}$ Riparto dallo Step 4:

$\underbrace{g(a) + 2g(b)}_{2g(b) = g(2b)} = g(a+2b) \quad \Rightarrow g(a) + g(2b) = g(a+2b)$

$\Rightarrow g(a) + g(b) = g(a+b) \quad \forall a,b>0$

$\boxed{\text{Step 7}}$ Quindi $g(x) = \lambda x$ su $x \in \mathbb{Q}_{>0}$

+ locale (globale) limitatezza dal basso $\Rightarrow g(x) = \lambda x$ su $x \in (0, +\infty)$.

Fatto ancora + debole: basta un quadratino del piano in cui non entra il grafico.

— o — o —

Alternativa: dalla Cauchy a 3 si conquistano tutti gli $x \in \mathbb{Q}$ con numeratore e denom. dispari. Monotonia dalla $g(a+2b) = g(a) + 2g(b)$ $\Rightarrow$ conquista di $(0, +\infty)$.

$\boxed{\text{Problema 8}}$ $\quad \alpha \quad (x,y) \to 2x+3y$

$\quad\quad\quad\quad \beta \quad (x,y) \to 3x+y$

Parto da $(1,7)$ e costruisco la successione usando $\alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha\alpha\dots$ oppure quella inversa. Il risultato finale non cambia.

Data una successione w di α e β definisco L_w come l'ultimo termine

Tesi: $L_w(1,7) = L_{\overline{w}}(1,7)$

↑ parola invertita

INDUZIONE SU LUNGHEZZA DI w.

Osservazione fondamentale: l'operatore L_w è lineare

$$L_w(ax_1+bx_2, ay_1+by_2) = a\,L(x_1,y_1) + b\,L(x_2,y_2)$$

$$a(x_1,y_1)+b(x_2,y_2)$$

Passo induttivo $\quad w\alpha\alpha \quad$ (altri casi: $w_{\alpha\beta}$, $w_{\beta\beta}$, $w_{\beta\alpha}$)

$$L^{(1,7)}_{w\alpha\alpha} = \underbrace{\boxed{2L^{(1,7)}_{w}}}_{\text{2 prima}} + \underbrace{\boxed{3L_{w\alpha}(1,7)}}_{\text{penultimo}}$$

$$L_{\alpha\alpha\overline{w}} = L_{\alpha\overline{w}}(\underbrace{7,23}_{\text{termine vecchio}}) \qquad (1,7)\to(7,23)$$

$$(7,23) = 3(1,7)+(4,2)$$

$$= \boxed{3L_{\alpha\overline{w}}(1,7)} + 2L_{\alpha\overline{w}}(2,1) \qquad = 3(1,7)+2(2,1)$$

$L_{w\alpha}(1,7) = L_{\alpha\overline{w}}(1,7)$ per Hp. induttiva

$$L_{\alpha\overline{w}}(2,1) = \boxed{L_{\overline{w}}(1,7)} \qquad (2,1)\xrightarrow{\alpha}(1,7)$$

Idea

$$(2,1) \xrightarrow{\alpha} (1,7) \qquad (2,1) \xrightarrow{\beta} (1,7)$$

Altro esempio:

$$(5,3) \xrightarrow[\alpha]{6\cdot 5+4\cdot 3} (3,42) \qquad (5,3) \xrightarrow[12\cdot 5-6\cdot 3]{\beta} (3,42)$$

Esercizio: usando questa idea trovare un' induzione che usa il solo ultimo termine.

—o —o —

$\boxed{\text{Problema 9a}}$

Dim 1 Pigeonhole

a_1

a_1+a_2

$a_1+a_2+a_3$

...

Se una somma è 0, allora ok. Altrimenti p somme in p-1 classi

$\Rightarrow$ 2 somme uguali $\Rightarrow$ sottraggo.

Lemma

Dim 2 Dati h numeri $a_1, \dots, a_h \not\equiv 0 \pmod p$, allora le possibili somme coprono almeno h classi mod p.

se uno è $\equiv 0 \pmod p \Rightarrow$ fine

altrimenti applico lemma con $h=p$

conclusione dato lemma

Dim Lemma: induzione

$\boxed{\text{Passaggio induttivo}}$ $h \Rightarrow h+1$

Ho almeno h somme e aggiungo l' $(h+1)$-esimo elem. a

Cosa vuol dire se ottengo solo somme vecchie

$S_1 + a = S_2$

$S_2 + a = S_3$

$\vdots$

$S_h + a = S_1$

$\cancel{S_1 + \dots + S_h} + ha = \cancel{S_1 + \dots + S_h}$

Se $h < p$ e $a \not\equiv 0$ non può essere

[Se il ciclo $S_1 \to S_2 \to S_3 \to \dots$ si chiude prima della fine, è uguale!]

LEMMA UTILE

A, B insiemi di classi resto modulo p (p primo)

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

$|A| = m \qquad |B| = n$

$$|A+B| \geq m+n-1$$

(modulo m <u>non</u> primo, vero ancora se $A \ni 0$.)

Cauchy - Davenport - Chowla

$$n = k(p-1)+1$$

Posso ottenere una sottosomma del tipo

$(a, \dots)$ con a qualsiasi

Se no, potrei ottenere al massimo $p-1$ valori di a.

→ il numero di vettori con 1^a coordinata $\neq 0$ è $\leq p-1$

→ il numero di vettori con 1^a coordinata $= 0$ è $\geq (p-1)(k-1)+1$

$a_1, \ldots, a_n \qquad n = k(p-1)+1$

Obiettivo: trovare $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ (non tutti nulli) tali che

$$\sum \varepsilon_i a_i = 0 \qquad \text{(vettore nullo)}$$

$$\varepsilon_i = x_i^{p-1}$$

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$$

$$\sum \varepsilon_i a_{ij} = 0 \qquad j = 1, \ldots, k$$

$$\sum a_{ij} x_i^{p-1} = 0 \qquad j = 1, \ldots, k$$

k equazioni, $n = k(p-1)+1$ incognite.

Sistema di equazioni con coefficienti in $\mathbb{F}_p$.

polinomi

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} m \text{ equazioni} \\ n \text{ incognite} \end{array}$$

$$d_i = \deg f_i$$

Ipotesi: $d_1 + \ldots + d_m < n$

Tesi: V = insieme delle sol $\Rightarrow |V| \equiv 0 \pmod p$

$$P = \prod_{i=1}^{m} \left(1 - f_i^{p-1}\right)$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, \dots, x_n) \in V \\ 0 & \text{se } (x_1, \dots, x_n) \notin V \end{cases}$$

$$S(P) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_p^n} P(x_1, \dots, x_n)$$

$$|V| \equiv S(P) \pmod p$$

$\deg P < n(p-1)$

$\Downarrow$

P è somma di monomi

$$X_1^{t_1} \cdots X_n^{t_n} \qquad t_1 + \dots + t_n < n(p-1)$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{\underline{t}} x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$$

$$S(P) = \sum a_t \sum_{(x_1, \dots, x_n)} x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sum_{x_1} x_1^{t_1}\right) \cdots \left(\sum_{x_n} x_n^{t_n}\right)$$

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^t = \begin{cases} 0 & \text{altrimenti} \\ -1 & \text{se } p-1 \mid t \end{cases}$$

almeno un t_i è $< p-1 \rightarrow \square$.

Teorema di Chevalley (+ Warning).