WC 2011 — ALGEBRA

Titolo nota 26/01/2011

Problema 4

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3} \sum_{cyc} a^2 \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{a+b}$$

$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \rightsquigarrow \sqrt{A} \leq$ cosa senza radici e cicliche

$\rightsquigarrow \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \leq \sqrt{3}\sqrt{A+B+C}$

C.S. oppure AM-QM

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ $\quad \dfrac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2} = \dfrac{(a^2+b^2)(a^3+b^3)}{2(a+b)} \overset{?}{\leq} \dfrac{(a^2+b^2)^4}{(a+b)^4}$

$$\frac{(a^3+b^3)}{2} \overset{?}{\leq} \frac{(a^2+b^2)^3}{(a+b)^3}$$

$(a+b)^3(a^3+b^3) \leq 2(a^2+b^2)^3$ conto:

$$(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a^3+b^3) \leq 2a^6+2b^6+6a^4b^2+6a^2b^4$$

$$\cancel{a^6}+3a^5b+\cancel{3a^4b^2}+a^3b^3+a^3b^3+\cancel{3a^2b^4}+3ab^5+\cancel{b^6} \leq \cancel{2}a^6+\cancel{2}b^6+\underset{3}{\cancel{6}}a^4b^2+\underset{3}{\cancel{6}}a^2b^4$$

$$3a^5b+2a^3b^3+3ab^5 \leq a^6+b^6+3a^4b^2+3a^2b^4$$

$$\underbrace{a^6}+b^6+\underbrace{3a^4b^2}+3a^2b^4-\underbrace{3a^5b}-3ab^5-2a^3b^3 \geq 0$$

$$a^3(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-b^3(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3) \geq 0$$

$(a^3-b^3)(a-b)^3 \geq 0$ VERA

Alternativa: dividere per b^6, porre $x = \frac{a}{b}$, ottenere un polinomio $p(x)$ di grado 6 che si annulla per $x=1$, quindi lo posso scomporre.. Fortunatamente $x=1$ ha molt. 4.

$$\text{LHS} \leq \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \overset{?}{\leq} \text{RHS}$$

Questa è Chebycheff. $\quad \frac{1}{3}\sum A_i B_i \underset{\leq}{\geq} \frac{1}{3}\sum A_i \cdot \frac{1}{3}\sum B_i$

$\geq$: se ordinati uguale

$\leq$: se ordinati all'inverso

$\boxed{\text{Wlog } a \geq b \geq c}$. Quindi $a^2+b^2 \geq a^2+c^2 \geq b^2+c^2$

$a+b \geq a+c \geq b+c$

$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$

Vale se le somme sono simmetriche, e nel nostro caso lo sono (è come se lo fossero)

Essendo ordinati all'inverso, vale

$$LHS \leq \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{cyc} (a^2+b^2)}_{2\sum_{cyc} a^2} \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{a+b}$$

$\boxed{2^{o} \text{ modo}}$ Faccio GM-AM dentro le radici

$$\underbrace{\frac{(a^2+b^2)}{2} \quad (a^2-ab+b^2)}_{\text{i due termini sono uguali quando } a=b} \leq \left[\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+a^2-ab+b^2}{2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}\right]^2$$

i due termini sono uguali quando $a=b$

$$LHS \leq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \sqrt{3a^2+3b^2-2ab}$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\sum_{cyc} 6a^2-2ab\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} \left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2}$$

Passiamo al RHS: $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{9}{2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)^{1/2}}$$

$$RHS = \frac{2}{3} \sum a^2 \cdot \sum \frac{1}{a+b} \geq \cancel{\frac{2}{3}} \sum a^2 \cdot \frac{\cancel{9}\sqrt{3}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{3}}} (\sum a^2)^{-1/2}$$

$$= \sqrt{3} \left[\sum a^2\right]^{1/2}$$

Abbiamo finito se

$$\frac{\sqrt{6}}{\cancel{2}}\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2} \leq 2\sqrt{3}\left[a^2+b^2+c^2\right]^{1/2}$$

$$3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca) \leq 2(a^2+b^2+c^2)$$

Banalmente falsa   Boh...

VEDI RISISTAMAZIONE IN FONDO

— o — o —

$\boxed{\text{Problema 5}}$ $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{1}{a^5(b+2c)^2} \geq \frac{1}{3}$ se $abc = 1$.

Utile: $a = \frac{1}{x}$ $b = \frac{1}{y}$ $c = \frac{1}{z}$ $xyz = 1$

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} = \frac{x^5}{\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)^2} = \frac{x^5y^2z^2}{(z+2y)^2} = \frac{x^3}{(z+2y)^2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{(z+2y)^2} \geq \frac{1}{3}$$

Cauchy - Schwarz al contrario.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $\displaystyle\sum x = \sum \frac{x\sqrt{x}}{z+2y}\,\frac{z+2y}{\sqrt{x}} \leq \left(\sum\frac{x^3}{(z+2y)^2}\right)^{1/2}\left(\sum\ldots\right)^{1/2}$

Così non va.

$$\sum x = \sum \frac{x}{(z+2y)^{2/3}}(z+2y)^{\frac{1}{3}}(z+2y)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leq \left[\sum\frac{x^3}{(z+2y)^2}\right]^{\frac{1}{3}} \underbrace{\left[\sum z+2y\right]^{1/3}\left[\sum z+2y\right]^{1/3}}_{\sqrt[3]{9}\left(\sum x\right)^{2/3}}$$

Semplificando:

$$\left[\sum\frac{x^3}{(z+2y)^2}\right]^{1/3} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\left(\sum x\right)^{1/3}$$

Elevo al cubo e uso che $\sum x \geq 3$ ← AM-GM.

$\boxed{2^\circ \text{modo}}$

$$\sum \frac{x^3}{(z+2y)^2} \sum x \geq \left(\sum \frac{x\sqrt{x}}{z+2y} \cdot \sqrt{x} \right)^2$$

$$= \left(\sum \frac{x^2}{z+2y} \right)^2 = (\star)$$

$$\sum x = \sum \frac{x}{\sqrt{z+2y}} \cdot \sqrt{z+2y} \leq \left(\sum \frac{x^2}{z+2y} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum z+2y \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum \frac{x^2}{z+2y} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{3} \left(\sum x \right)^{1/2}$$

Elevando al quadrato:

$$\sum \frac{x^2}{z+2y} \geq \frac{1}{3} \sum x$$

Tornando a $(\star)$ abbiamo che

$$\sum \frac{x^3}{(z+2y)^2} \cdot \sum x \geq \frac{1}{9} \left(\sum x \right)^2$$ e torno nel 1° modo.

$\boxed{3^\circ \text{modo}}$

$$\frac{x^3}{(z+2y)^2} + \frac{(z+2y)}{27} + \frac{(z+2y)}{27} \underset{\text{AM-GM}}{\geq} 3 \frac{x}{9} = \frac{x}{3}$$

Point of Incidence

Sommando

$$\text{LHS} + \frac{2}{9} \sum x \geq \frac{1}{3} \sum x$$

Occhio: è sostanzialmente rifare la dim. di C.S. a 3 specie.

$\boxed{4^\circ \text{modo}}$ Jensen su $\frac{1}{t^2}$ con pesi $\frac{x}{x+y+z}$ e simili

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \; ; \quad \frac{1}{x+y+z} \sum x \frac{x^2}{(y+2z)^2}$$

$$= \sum \frac{x}{x+y+z} f\left(\frac{y+2z}{x} \right) \underset{\text{Jensen}}{\geq} f\left(\sum \frac{\cancel{x}}{x+y+z} \frac{y+2z}{\cancel{x}} \right)$$

$$= f(3) = \frac{1}{9}$$

Esercizio: provare con a^4 al denominatore: viene con BUNCHING, dopo aver fatto QM-AM sul LHS

— o — o —

Problema 6 (b) $a^2+b^2+c^2+d^2=12 \Rightarrow \sum_{cyc}(4a^3-a^4) \leq 48$

Basta osservare che $4x^3-x^4 \leq 4x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (banale) e quindi sommare.

(a) $a^2+b^2+c^2+d^2=12$ e $a+b+c+d=6$

$$\Rightarrow \sum (4a^3-a^4) \geq 36$$

Prima idea: traslare nel centro della sfera intersezione

$$a=x+\frac{3}{2} \qquad b=y+\frac{3}{2} \qquad c=z+\frac{3}{2} \qquad d=w+\frac{3}{2}$$

Allora i vincoli diventano
$$x+y+z+w=0$$
$$x^2+y^2+z^2+w^2=3$$

Anche quando sostituisco in $4a^3-a^4$ se ne va molta roba

Scelta migliore $a=x+1$, $b=y+1$, $c=z+1$, $d=w+1$
in maniera da mandare via i termini cubici

$$\sum_{cyc} 4a^3-a^4 = \sum_{cyc} 4(x^3+3x^2+3x+1)-(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)$$

$$= -\sum_{cyc} x^4 + \underbrace{6\sum_{cyc} x^2 + 8\sum_{cyc} x + 3\sum 1}_{\text{li so calcolare e sono numeri}}$$

Diventa tipo $\sum x^2 = 4$. Ora devo fare max e min di $\sum x^4$ con questo vincolo

Max $\rightsquigarrow$ tutti 0 tranne 1 (unsmoothing)
min $\rightsquigarrow$ tutti uguali (smoothing $\rightsquigarrow$ medie)

Altro modo di vedere che 1 è la traslazione giusta. Il caso del 48 viene preso da $(2,2,2,0)$. Traslando in 1 diventa $(1,1,1,-1)$ ed i quadrati in quel caso sono uguali.

<u>Lemma</u> Dati quei vincoli, tutte le variabili stanno in $[0,3]$

$$a^2+b^2+c^2 = 12-d^2 \qquad a+b+c = 6-d$$

impongo $\quad 6-d \leq \sqrt{3}\sqrt{12-d^2}\quad$ e ottengo $d \in [0,3]$.

Idea: fare parte (a) come si è fatta la parte (b)

$$4x^3 - x^4 \geq \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Cerco i coeff. α, β, γ in modo che la relazione valga per ogni $x \in [0,3]$. Ci deve essere uguaglianza nei casi in cui si realizza il 36, cioè con $x=1$ e $x=3$ e in $x=1$ ci deve essere tangenza.

Funziona !!!

— o — o —

<u>Risistemazione 2ª soluzione problema 4.</u>

$$LHS \leq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$RHS = \frac{2}{3}\sum_{cyc} a^2 \cdot \sum_{cyc}\frac{1}{a+b} \geq \cancel{\frac{2}{3}}\,\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = 3\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Tesi se

$$\frac{\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{2}}\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2} \leq \overset{\sqrt{6}}{\cancel{3}}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2} \le \sqrt{6}\,(a^2+b^2+c^2)$$
$$(a+b+c)^2\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right] \le 6\,(a^2+b^2+c^2)^2$$

$S = a+b+c \qquad Q = ab+bc+ca$

$$S^2\left[3(S^2-2Q)-Q\right] \le 6(S^2-2Q)^2$$
$$S^2\left[3S^2-7Q\right] \le 6S^4-24S^2Q+24Q^2$$
$$\underbrace{3S^4}\ \underbrace{-7S^2Q} \le \underbrace{6S^4}\ \underbrace{-24S^2Q} + 24Q^2$$

$17S^2Q \le 3S^4+24Q^2$ Grande tentazione: GM-AM

$$\frac{3S^4+24Q^2}{2} \ge \sqrt{72S^4Q^2} = 6\sqrt{2}\,S^2Q$$

$$\Rightarrow 3S^4+24Q^2 \ge 12\sqrt{2}\,S^2Q \ge 17S^2Q$$

Hope

Nel caso di uguaglianza $a=b=c=1$ $288 \ge 289$ Acc...

$3S^4 = 3^5$

$24Q^2 = 24\cdot 9$

Come equilibrare S^4 con Q^2 $\frac{S^4}{9}$ Q^2

$\frac{24}{9}S^4,\ 24Q^2$

$$3S^4+24Q^2 = \frac{3}{9}S^4 + \underbrace{\frac{24}{9}S^4+24Q^2}_{\text{AM-GM}} \ge \frac{1}{3}S^4 + 2\,\frac{24}{3}S^2Q$$

$$= \frac{1}{3}S^4 + \frac{48}{3}S^2Q \overset{?}{\ge} 17S^2Q$$

Hope

$S^4 \overset{?}{\ge} 3S^2Q$ $S^2 \ge 3Q$

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge 3(\quad)$

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Dalla parte giusta.

— o — o —