Winter Camp 2011

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

WC 2011 — ALGEBRA

Titolo nota 26/01/2011

Problema 4

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \le \frac{2}{3}\sum_{cyc} a^2 \cdot \sum_{cyc}\frac{1}{a+b}$$

$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C} \rightsquigarrow \sqrt{A} \le$ cosa senza radici e cicliche

$\rightsquigarrow \sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C} \le \sqrt{3}\,\sqrt{A+B+C}$

C.S. oppure AM-QM

$\boxed{1° \text{ modo}}$

$$\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2} = \frac{(a^2+b^2)(a^3+b^3)}{2(a+b)} \overset{?}{\le} \frac{(a^2+b^2)^4}{(a+b)^4}$$

$$\frac{(a^3+b^3)}{2} \overset{?}{\le} \frac{(a^2+b^2)^3}{(a+b)^3}$$

$(a+b)^3(a^3+b^3) \le 2(a^2+b^2)^3$ conto:

$$(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a^3+b^3) \le 2a^6+2b^6+6a^4b^2+6a^2b^4$$

$$\cancel{a^6}+3a^5b+3\cancel{a^4b^2}+a^3b^3+a^3b^3+3\cancel{a^2b^4}+3ab^5+\cancel{b^6} \le \cancel{2}a^6+\cancel{2}b^6+\underset{3}{\cancel{6}}a^4b^2+\underset{3}{\cancel{6}}a^2b^4$$

$$3a^5b+2a^3b^3+3ab^5 \le a^6+b^6+3a^4b^2+3a^2b^4$$

$$a^6+b^6+3a^4b^2+3a^2b^4-3a^5b-3ab^5-2a^3b^3 \ge 0$$

$$a^3(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-b^3(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3) \ge 0$$

$$(a^3-b^3)(a-b)^3 \ge 0 \qquad \text{VERA}$$

Alternativa: dividere per b^6, porre $x=\frac{a}{b}$, ottenere un polinomio $p(x)$ di grado 6 che si annulla per $x=1$, quindi lo posso scomporre.. Fortunatamente $x=1$ ha molt. 4.

$$\text{LHS} \le \sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b} \overset{?}{\le} \text{RHS}$$

se ordinati uguale

Questa è Chebycheff. $\frac{1}{3}\sum A_iB_i \ge \frac{1}{3}\sum A_i \cdot \frac{1}{3}\sum B_i$

$\le$ se ordinati all'inverso

$\boxed{\text{Wlog } a \geq b \geq c}$. Quindi $a^2+b^2 \geq a^2+c^2 \geq b^2+c^2$

$a+b \geq a+c \geq b+c$

$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$

$\downarrow$
vale se le somme sono simmetriche, e nel nostro caso lo sono (è come se lo fossero)

Essendo ordinati all'inverso, vale

$$\text{LHS} \leq \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{cyc} (a^2+b^2)}_{2\sum_{cyc} a^2} \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{a+b}$$

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Faccio GM−AM dentro le radici

$$\underbrace{\frac{(a^2+b^2)}{2} (a^2-ab+b^2)}_{\text{i due termini sono uguali quando } a=b} \leq \left[\frac{\frac{a^2+b^2}{2} + a^2-ab+b^2}{2}\right]^2 = \left[\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}\right]^2$$

$$\text{LHS} \leq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \sqrt{3a^2+3b^2-2ab}$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\sum_{cyc} 6a^2-2ab\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} \left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2}$$

Passiamo al RHS: $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{9}{2\sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2)^{1/2}}$$

$$\text{RHS} = \frac{2}{3} \sum a^2 \cdot \sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \sum a^2 \cdot \frac{\cancel{9}^{\sqrt{3}}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{3}}} \left(\sum a^2\right)^{-1/2}$$

$$= \sqrt{3} \left[\sum a^2\right]^{1/2}$$

Abbiamo finito se

$$\frac{\sqrt{6}}{\cancel{2}}\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2}\leq 2\sqrt{3}\left[a^2+b^2+c^2\right]^{1/2}$$

$$3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\leq 2(a^2+b^2+c^2)$$

Banalmente falsa   Boh...

VEDI RISISTAMAZIONE IN FONDO

— o — o —

$\boxed{\text{Problema 5}}$ $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{1}{a^5(b+2c)^2}\geq\frac{1}{3}$ se $abc=1$.

Utile: $a=\frac{1}{x}$ $b=\frac{1}{y}$ $c=\frac{1}{z}$ $xyz=1$

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}=\frac{x^5}{\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)^2}=\frac{x^5y^2z^2}{(z+2y)^2}=\frac{x^3}{(z+2y)^2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{(z+2y)^2}\geq\frac{1}{3}$$

Cauchy – Schwarz al contrario.

$\boxed{1^o\text{ modo}}$ $\displaystyle\sum x=\sum\frac{x\sqrt{x}}{z+2y}\,\frac{z+2y}{\sqrt{x}}\leq\left(\sum\frac{x^3}{(z+2y)^2}\right)^{1/2}\left(\sum\dots\right)^{1/2}$

Così non va.

$$\sum x=\sum\frac{x}{(z+2y)^{2/3}}(z+2y)^{\frac{1}{3}}(z+2y)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leq\left[\sum\frac{x^3}{(z+2y)^2}\right]^{\frac{1}{3}}\underbrace{\left[\sum z+2y\right]^{1/3}\left[\sum z+2y\right]^{1/3}}_{\sqrt[3]{9}\left(\sum x\right)^{2/3}}$$

Semplificando:

$$\left[\sum\frac{x^3}{(z+2y)^2}\right]^{1/3}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\left(\sum x\right)^{1/3}$$

Elevo al cubo e uso che $\sum x\geq 3$

AM-GM.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$\sum \frac{x^3}{(z+2y)^2} \quad \sum x \geq \left(\sum \frac{x\sqrt{x}}{z+2y} \cdot \sqrt{x} \right)^2$$

$$= \left(\sum \frac{x^2}{z+2y} \right)^2 = (\star)$$

$$\sum x = \sum \frac{x}{\sqrt{z+2y}} \cdot \sqrt{z+2y} \leq \left(\sum \frac{x^2}{z+2y} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum z+2y \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum \frac{x^2}{z+2y} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{3} \left(\sum x \right)^{1/2}$$

Elevando al quadrato:

$$\sum \frac{x^2}{z+2y} \geq \frac{1}{3} \sum x$$

Tornando a $(\star)$ abbiamo che

$$\sum \frac{x^3}{(z+2y)^2} \cdot \sum x \geq \frac{1}{9} \left(\sum x \right)^2$$ e torno nel 1° modo.

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$

$$\frac{x^3}{(z+2y)^2} + \frac{(z+2y)}{27} + \frac{(z+2y)}{27} \underset{\text{AM-GM}}{\geq} 3 \frac{x}{9} = \frac{x}{3}$$

Point of Incidence

Sommando

$$\text{LHS} + \frac{2}{9} \sum x \geq \frac{1}{3} \sum x$$

Occhio: è sostanzialmente rifare la dim. di C.S. a 3 specie.

$\boxed{4^\circ \text{ modo}}$ Jensen su $\frac{1}{t^2}$ con pesi $\frac{x}{x+y+z}$ e simili

$$f(t) = \frac{1}{t^2}; \quad \frac{1}{x+y+z} \sum x \frac{x^2}{(y+2z)^2}$$

$$= \sum \frac{x}{x+y+z} f\left(\frac{y+2z}{x}\right) \underset{\text{Jensen}}{\geq} f\left(\sum \frac{\cancel{x}}{x+y+z} \frac{y+2z}{\cancel{x}} \right)$$

$$= f(3) = \frac{1}{9}$$

Esercizio: provare con a^4 al denominatore: viene con BUNCHING, dopo aver fatto QM-AM sul LHS

— o — o —

Problema 6 (b) $a^2+b^2+c^2+d^2=12 \Rightarrow \sum_{cyc}(4a^3-a^4) \leq 48$

Basta osservare che $4x^3-x^4 \leq 4x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (banale) e quindi sommare.

(a) $a^2+b^2+c^2+d^2=12$ e $a+b+c+d=6$

$$\Rightarrow \sum (4a^3-a^4) \geq 36$$

Prima idea: traslare nel centro della sfera intersezione

$$a=x+\frac{3}{2} \qquad b=y+\frac{3}{2} \qquad c=z+\frac{3}{2} \qquad d=w+\frac{3}{2}$$

Allora i vincoli diventano $x+y+z+w=0$

$x^2+y^2+z^2+w^2=3$

Anche quando sostituisco in $4a^3-a^4$ se ne va molta roba

Scelta migliore $a=x+1$, $b=y+1$, $c=z+1$, $d=w+1$ in maniera da mandare via i termini cubici

$$\sum_{cyc} 4a^3-a^4 = \sum_{cyc} 4(x^3+3x^2+3x+1)-(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)$$

$$= -\sum_{cyc} x^4 + \underbrace{6\sum_{cyc} x^2 + 8\sum_{cyc} x + 3\sum 1}_{\text{li so calcolare e sono numeri}}$$

Diventa tipo $\sum x^2 = 4$. Ora devo fare max e min di $\sum x^4$ con questo vincolo

Max ⇝ tutti 0 tranne 1 (unsmoothing)

min ⇝ tutti uguali (smoothing ⇝ medie)

Altro modo di vedere che 1 è la traslazione giusta. Il caso del 48 viene preso da $(2,2,2,0)$. Traslando in 1 diventa $(1,1,1,-1)$ ed i quadrati in quel caso sono uguali.

<u>Lemma</u> Dati quei vincoli, tutte le variabili stanno in $[0,3]$

$$a^2+b^2+c^2 = 12-d^2 \qquad a+b+c = 6-d$$

impongo $\quad 6-d \leq \sqrt{3}\sqrt{12-d^2}\quad$ e ottengo $d \in [0,3]$.

Idea: fare parte (a) come si è fatta la parte (b)

$$4x^3 - x^4 \geq \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Cerco i coeff. α, β, γ in modo che la relazione valga per ogni $x \in [0,3]$. Ci deve essere uguaglianza nei casi in cui si realizza il 36, cioè con $x=1$ e $x=3$ e in $x=1$ ci deve essere tangenza.

Funziona !!!

— o — o —

<u>Risistemazione 2ª soluzione problema 4.</u>

$$LHS \leq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$RHS = \frac{2}{3}\sum_{cyc} a^2 \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\,\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = 3\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Tesi se $$\frac{\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{2}}\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2} \leq \overset{\sqrt{6}}{\cancel{3}}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right]^{1/2} \le \sqrt{6}\,(a^2+b^2+c^2)$$

$$(a+b+c)^2\left[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\right] \le 6\,(a^2+b^2+c^2)^2$$

$S = a+b+c \qquad Q = ab+bc+ca$

$$S^2\left[3(S^2-2Q)-Q\right] \le 6(S^2-2Q)^2$$

$$S^2\left[3S^2-7Q\right] \le 6S^4-24S^2Q+24Q^2$$

$$\underbrace{3S^4}-\underbrace{7S^2Q} \le \underbrace{6S^4}\underbrace{-24S^2Q}+24Q^2$$

$$17S^2Q \le 3S^4+24Q^2$$

Grande tentazione: GM−AM

$$\frac{3S^4+24Q^2}{2} \ge \sqrt{72S^4Q^2} = 6\sqrt{2}\,S^2Q$$

$$\Rightarrow 3S^4+24Q^2 \ge 12\sqrt{2}\,S^2Q \underset{\text{Hope}}{\ge} 17S^2Q$$

Nel caso di uguaglianza $a=b=c=1$ $\qquad 288 \ge 289$ $\quad$ Acc...

$3S^4 = 3^5$

$24Q^2 = 24\cdot 9$

Come equilibrare S^4 con Q^2 $\qquad \frac{S^4}{9} \quad Q^2$

$\frac{24}{9}S^4,\ 24Q^2$

$$3S^4+24Q^2 = \frac{3}{9}S^4+\underbrace{\frac{24}{9}S^4+24Q^2}_{\text{AM}-\text{GM}} \ge \frac{1}{3}S^4+2\,\frac{24}{3}S^2Q$$

$$= \frac{1}{3}S^4+\frac{48}{3}S^2Q \underset{\text{Hope}}{\overset{?}{\ge}} 17S^2Q$$

$$S^4 \overset{?}{\ge} 3S^2Q \qquad\qquad S^2 \ge 3Q$$

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge 3(\quad)$

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Dalla parte giusta.

— o — o —

WC 2011 – COMBINATORIA

Titolo nota 27/01/2011

Problema 4

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$n \times n$. Si può invertire una riga o una colonna a scelta. Determinare il minimo di 0.

$\boxed{n=1}$ $\quad 0$

$\boxed{n=2}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 0$

$\boxed{n=3}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2$

$\boxed{n \geq 4}$ $\quad \min = n$.

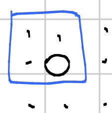
Oss 1 Per n pari la parità del numero di zeri è invariante

Oss. 2 L'oss. 1 vale in ogni sottomatrice $2k \times 2k$.

$\boxed{n=3}$ $\quad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

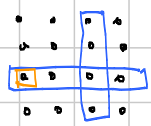
Nelle 2 matrici segnate c'è sempre almeno uno zero. O ci sono 2 zeri, o c'è 0 nella casella comune.

Se c'è 0 nella comune, ce ne deve essere altro in alto a sx (blocco 2×2)



$\boxed{n=4}$ Supponiamo di arrivare a ≤ 3 zeri. Allora per parità saranno ≤ 2 zeri. Ne fisso uno, diciamo in (i,j). Elimino riga i e colonna i.

Resta un blocco 3×3 che verifica le ipotesi (zeri sulla diagonale) in cui resta un solo 0 alla fine.



Ancora più semplice se alla fine non c'erano 0.

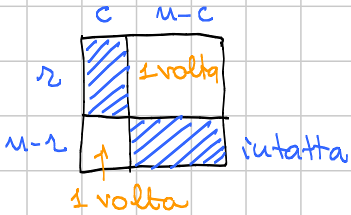
$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Prendiamo una $(n+1)\times(n+1)$ e supponiamo restino $\leq n$ zeri. Se ce ne sono, fisso (i,j) e elimino come prima riga e colonna i.
Ottengo blocco $n \times n$ in cui rimango $\leq n-1$ zeri

— o — o —

<u>Approccio costoso</u> (descritto per $n \geq 4$)

<u>Oss. 1</u> Le operazioni sono commutative, cioè il finale non dipende dall'ordine

<u>Oss. 2</u> Le operazioni sono binarie: l'unica cosa che conta è l'insieme delle righe e delle colonne su cui ho agito un # dispari di volte: r righe e c colonne.
Quanti 0 restano alla fine?
Pongo
d = elementi della diagonale in zona intatta.



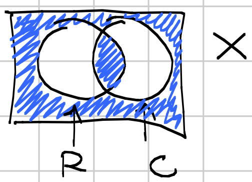
$$0 \text{ finali} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zeri blu}}}{d} + r(n-c) + c(n-r) - \underbrace{(n-d)}_{\text{zeri in zona 1 volta}}$$

$$= d + rn - rc + cn - cr - n + d$$

$$= 2d + (r+c)n - 2rc - n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hope}}}{\geq} n$$

Devo dimostrare: $2d + (r+c)n \geq 2rc + 2n$ se $n \geq 4$.
Resta da stimare d: R = indici delle righe cambiate
C = " " " cambiate
$X = \{1, \dots, n\}$

$$d = |\underbrace{(R \cap C)}_{\text{2 cambi}} \cup (X \setminus R) \cup (X \setminus C)|$$



$$= |R \cap C| + |X \setminus (R \cup C)|$$

$$= |R \cap C| + n - |R \cup C|$$

$$d = |R \cap C| + n - |R \cup C|$$

- <u>Caso 1</u> $\quad n \geq r+c$. Voglio dim. che $d \geq n-r-c$.

Infatti

$$\begin{aligned} d &= |R \cap C| + n - |R \cup C| \\ &= |R \cap C| + n - |R| - |C| + |R \cap C| \\ &\geq n - |R| - |C| = n-r-c \end{aligned}$$

$$2d + (r+c)\,n \geq 2rc + 2n \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\cancel{2n} - 2r - 2c + (r+c)\,n \geq 2rc + \cancel{2n}$$

$$(r+c)\,n \geq 2r + 2r + 2rc$$

Uso che $n \geq r+c$ e ho

$$\begin{aligned} (r+c)\,n &= \underbrace{(r+c)\cdot\frac{n}{2}}_{n \geq 4} + \underbrace{(r+c)\cdot\frac{n}{2}}_{n \geq r+c} \\ &\geq (r+c)\cdot 2 + \frac{(r+c)^2}{2} \\ &\qquad\qquad \downarrow \text{ AM-GM,} \\ &= 2r + 2c + 2rc \end{aligned}$$

<u>2° caso</u> $\quad n \leq r+c$. Dico che $d \geq r+c-n$

$$\begin{aligned} d &= |R \cap C| + n - |R \cup C| \\ &= |R| + |C| + n - 2\,|R \cup C| \geq r+c+n-2n = r+c-n \end{aligned}$$

Devo dimostrare $2d + (r+c)\,n \geq 2rc + 2n$, cioè

$$2r + 2c - 2n + rn + cn \geq 2rc + 2n, \text{ cioè}$$

$$(r+c)(n+2) \geq 2rc + 4n \qquad \text{so che } n \leq r+c, \text{ cioè } n = r+c-k$$

Basta dimostrare che

$$(r+c)(n+2) \geq \frac{(r+c)^2}{2} + 4n \qquad r+c = n+k$$

$$(n+k)(n+2) \geq \frac{1}{2}(n+k)^2 + 4n$$

$$\cancel{2n^2} + \cancel{4n} + \cancel{2kn} + 4k \geq \cancel{n^2} + \cancel{2nk} + k^2 + \overset{4}{\cancel{8}}n$$

$$n^2 - k^2 + 4k - 4n \geq 0$$

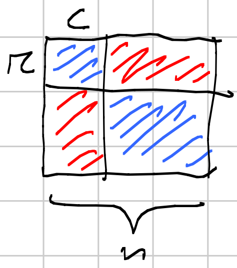
$$(n+k)(n-k) - 4(n-k) \geq 0$$

$$\underbrace{(n-k)}_{\geq 0 \text{ perché } r+c \leq 2}\underbrace{(n+k-4)}_{\geq 0 \text{ perché } n \geq 4} \geq 0$$

—o—o—

Altra forse idea: casella 1 volta $\geq 2n$

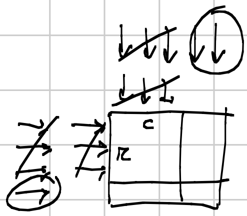
Caselle 1 volta: $n \cdot c + n \cdot r - 2rc \overset{?}{\geq} 2n$



$0 \quad 1$

$\boxed{n} \quad n(n-1)$

$\boxed{n}$



$$\min\{r,c\} \leq \frac{n}{2}$$

wlog $r \leq \frac{n}{2}$

$$r \cdot n + c\underbrace{(n-2r)}_{\geq 0} \overset{?}{\geq} 2n$$

$$rn \geq 2n \qquad r \geq 2$$

rimane il caso $r = 1$

$$n \cdot c + \cancel{n} - 2c \overset{?}{\geq} \cancel{2}n$$

$$c \geq \frac{n}{n-2} \qquad n = 1, 2, 3$$

$$n \geq 4$$

$$c \geq 2 \geq \frac{n}{n-2}$$

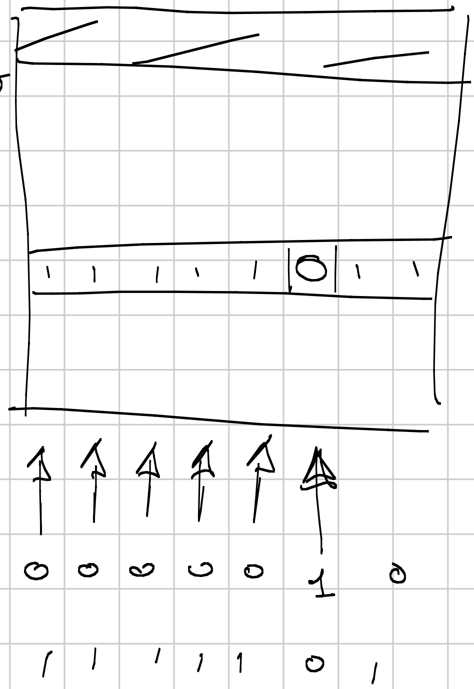
$$c = 1 \qquad r = 1 \quad c = 1$$

☒

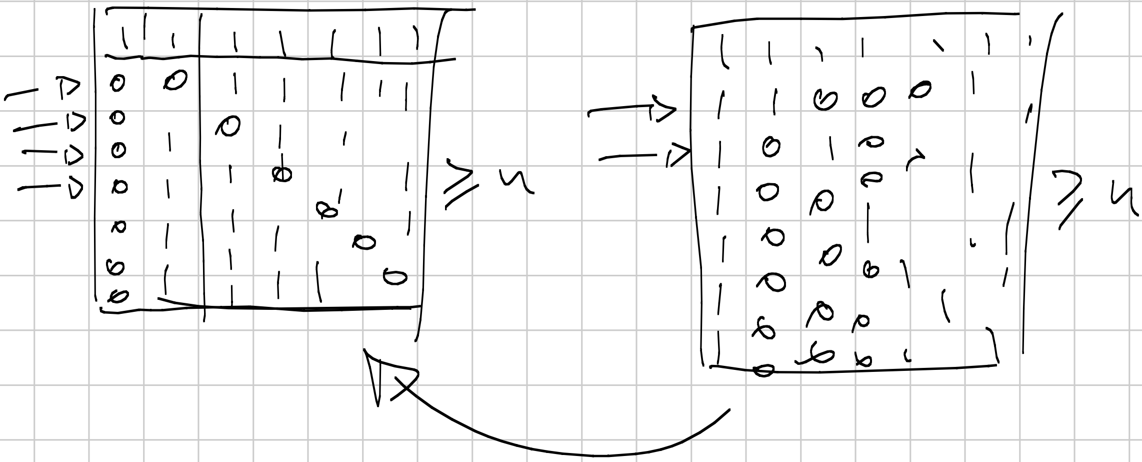
Caso I: alla fine tutte le righe hanno ≥ 1 zero

$\Downarrow$

almeno n zeri



Caso II: Alla fine ho una riga senza zeri

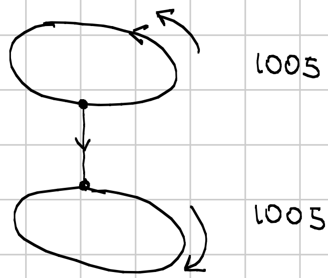


Problema 5 Grafo orientato connesso minimale (connesso nei 2 sensi).

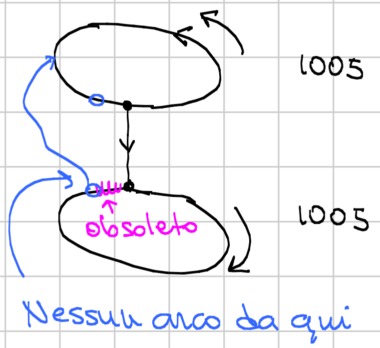
Risposta $= 1004^2$

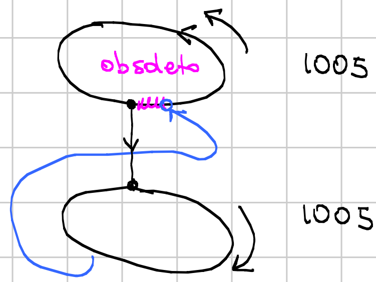
Esempio

Posso aggiungere un arco in 1004^2 rendendolo connesso minimale.

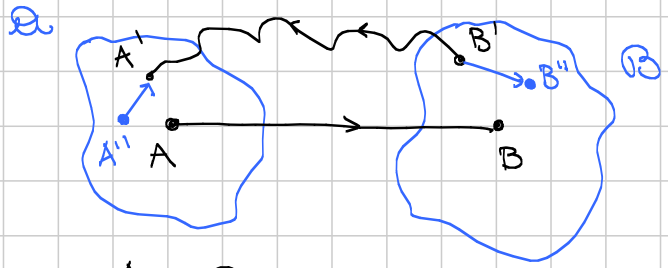


Deve essere da giù a su





Si verifica che ogni altro arco sotto $\to$ sopra va bene



Cancelliamo $A \to B$

$\mathcal{A} =$ p.ti raggiunti da A $\qquad \mathcal{B} =$ p.ti che vanno in B

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ perché altrimenti potevo cancellare $A \to B$ senza problemi

$a = |\mathcal{A}| \qquad b = |\mathcal{B}|$

Oss. 2 Non ci sono collegamenti $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

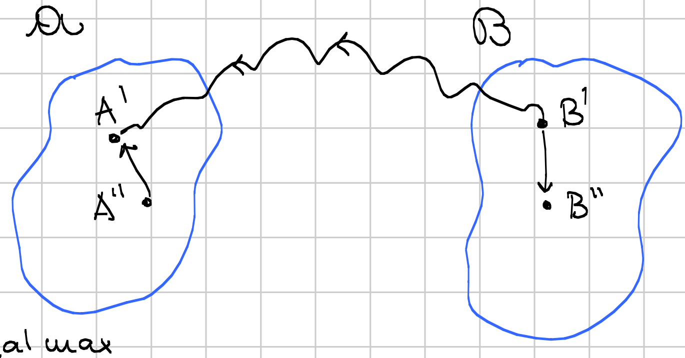
Oss. Esiste un collegamento, anche multiplo, tra un elemento $B' \in \mathcal{B}$ ed uno $A' \in \mathcal{A}$.

O siamo nel caso banale in cui $\mathcal{A} = \{A\}$ o $\mathcal{B} = \{B\}$ e allora ci sono pochi voli possibili (≤ 2008).

Altrimenti $B' \neq B$, $A' \neq A$.

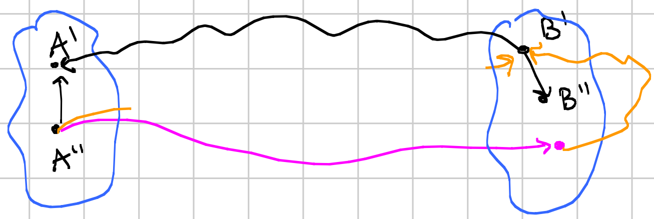
Quindi esistono A'' = penultima tappa del percorso $A \to A'$

B'' = prima tappa del percorso $B' \to B$



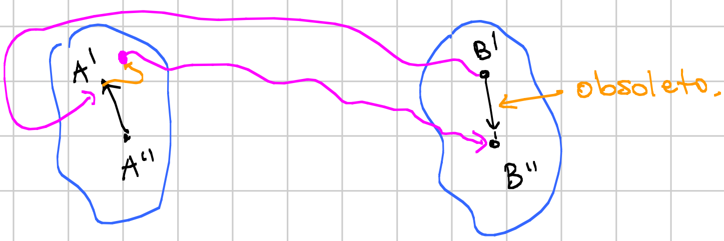
Posso fare $\overbrace{\text{ogni}}^{\text{al max}}$ collegamento possibile tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ purché non parta da A'' e non arrivi in B'' $\Rightarrow$ sono al più

$$(a-1)(b-1) \leq 1004^2$$



Oss. 3 $\quad \mathcal{B}$ in qualche modo è connesso

Se c'è un volo da A'', il tratto $A'' \to A'$ è obsoleto



Problema 6 $\quad m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n \qquad m_1 \geq 25$

- $m_1 \leq 75 \qquad \boxed{m_1} \; - - - - \; m_k \qquad -1$ persona

$\boxed{100 - m_1} \qquad -1$ mela

$m_k + m_1 - 100$

Controllare $\quad 100 - m_1 \geq 25 \qquad m_1 \leq 75$

$m_k + m_1 - 100 \geq 25 \qquad \underbrace{m_k}_{\geq 100} + \underbrace{m_1}_{\geq 25} \geq 125$

90	90	90	101	101	101	101	
$\boxed{25}$	35	$\boxed{45}$				$\boxed{30}$	-3 persone
65	$\boxed{55}$	$\boxed{45}$				71	-3 mele

Bisogna dim. che funziona

m_1	m_2	m_3
25	$\boxed{125 - m_1}$	$\boxed{225 - m_1 - m_2}$
$\boxed{m_1 - 25}$	$\boxed{m_2 + m_1 - 125}$	$m_1 + m_2 + m_3 - 225$

Devo controllare al passo k

$$100k + 25 - (m_1 + \dots + m_k) \geq 25$$

$$\iff \quad m_1 + \dots + m_k \leq 100k \qquad \text{gratis}$$

$$m_1 + \dots + m_k - 100k + 75 \geq 25$$

$$m_1 + \dots + m_k \geq 100k - 50$$

Fino al passaggio precedente

$$m_1 + \dots + m_{k-1} \geq 100(k-1) - 25 = 100k - 125$$

$$m_k \geq 75 \qquad \text{e sommo.}$$

Chiamo n-buono un insieme di k mele t.c.

- $m_1 + \dots + m_k = 100n$
- $m_1 \geq 25$
- $k = n$ oppure $k = n+1$

$m_1 = 25$
$m_2 \leq 75$
$m_3 > 75$

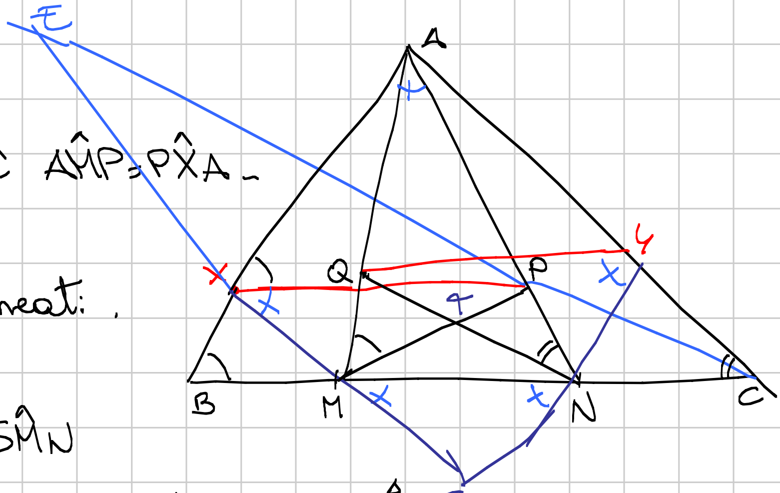
Teorema Un insieme n-buono è n-divisibile nel senso di Ludovico.

WC 2011 — GEOMETRIA 1

Titolo nota 26/01/2011

$X = \odot AMP \cap AB$

$PX \parallel BC$ perché $A\hat{M}P = P\hat{X}A$.

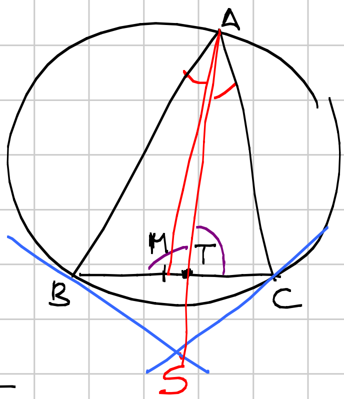


Tesi: A, S, T allineati.

$$M\hat{N}S = M\hat{A}N = S\hat{M}N$$

$\Rightarrow S$ sta sulla simmediana di $\overset{\triangle}{AMN}$

Lemma



$$B\hat{A}M = S\hat{A}C$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{\sin B\hat{A}T \cdot \frac{AB}{\sin B\hat{T}A}}{\sin T\hat{A}C \cdot \frac{AC}{\sin A\hat{T}C}} =$$

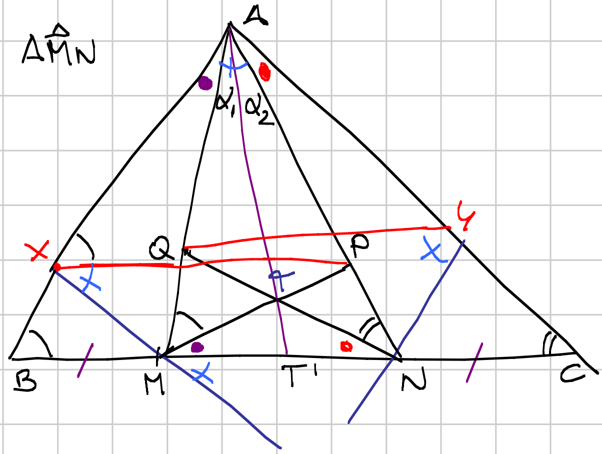
teo seni su ABT ...

$$\frac{BT}{\sin B\hat{A}T} = \frac{AB}{\sin B\hat{T}A}$$

$$= \frac{\sin MAC}{\sin MAB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Tesi $\iff$ $T \in$ simmediana di $A\hat{M}N$

$\iff \dfrac{MT'}{T'N} = \dfrac{AM^2}{AN^2}$



$$\frac{MT'}{T'N} = \frac{\sin\alpha_1 \cdot \dfrac{AM}{\cancel{\sin A\hat{T}'M}}}{\sin\alpha_2 \cdot \dfrac{AN}{\cancel{\sin A\hat{T}'N}}}$$

teo seni su $AT'M$ e ...

$$1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin ANQ}{\sin QNM} \cdot \frac{\sin NMP}{\sin PMA}$$

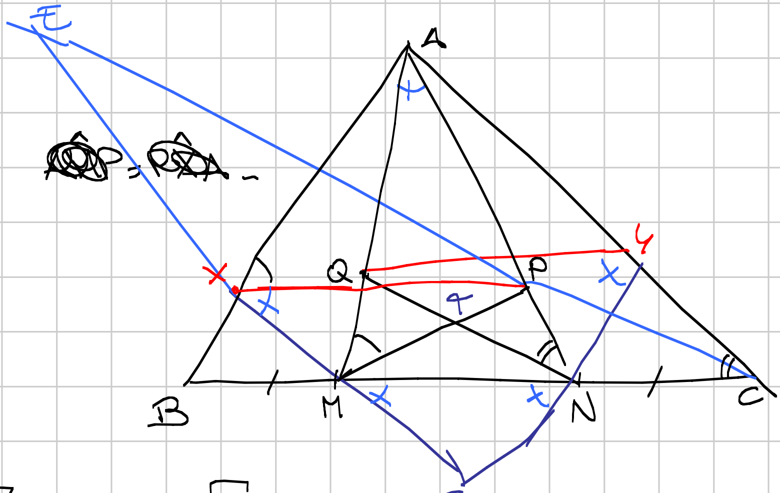
$$= \frac{\sin Q\hat{N}M}{\sin A\hat{N}Q} \cdot \frac{\sin P\hat{M}A}{\sin N\hat{M}P} \cdot \frac{AM}{AN} =$$

$$= \frac{\sin N\hat{A}C}{\sin A\hat{C}N} \cdot \frac{\sin M\hat{B}A}{\sin B\hat{A}M} \cdot \frac{AM}{AN}$$

$$= \frac{\cancel{NC}}{AN} \cdot \frac{AM}{\cancel{BM}} \cdot \frac{AM}{AN}$$

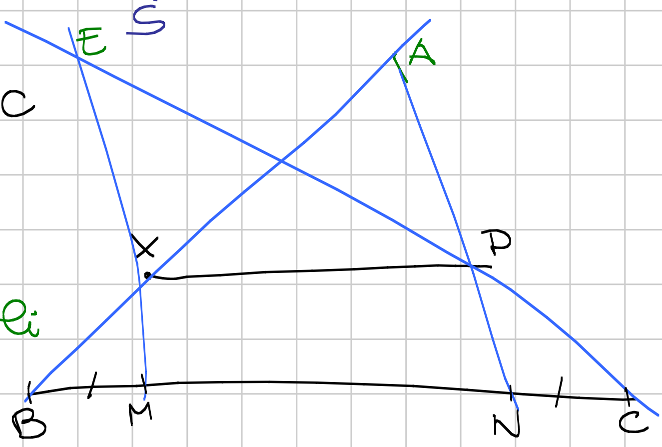
$$= \frac{AM^2}{AN^2}$$

Mostriamo $AE \parallel BC$.



$B\hat{X}M$ e $N\hat{P}C$

$BX \cap PN = A \quad XM \cap PC$



$EA \parallel BC$

$\iff E\hat{A}P$ e $C\hat{N}P$ simili

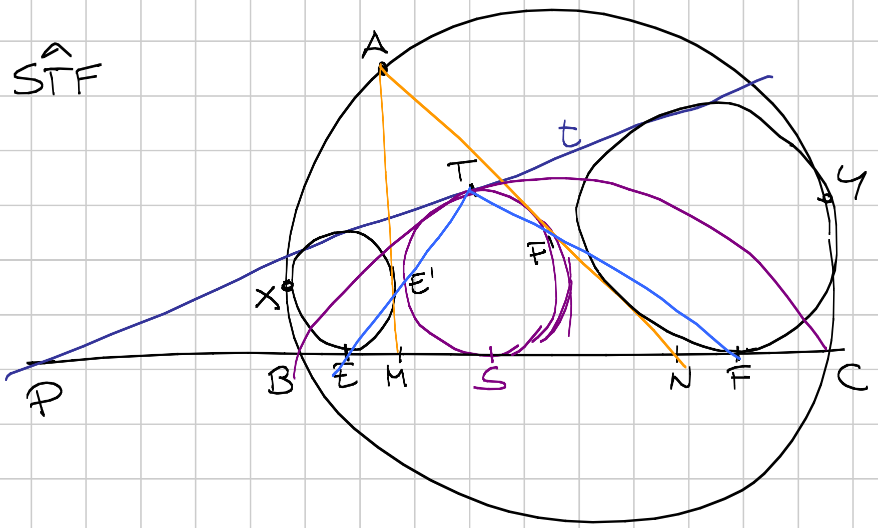
$\iff \dfrac{PN}{PA} = \dfrac{PC}{PE}$

$AXP \sim ABN \implies \boxed{\dfrac{AP}{AN}} = \dfrac{XP}{BN}$

$= \dfrac{XP}{MC} = \boxed{\dfrac{EP}{EC}}$

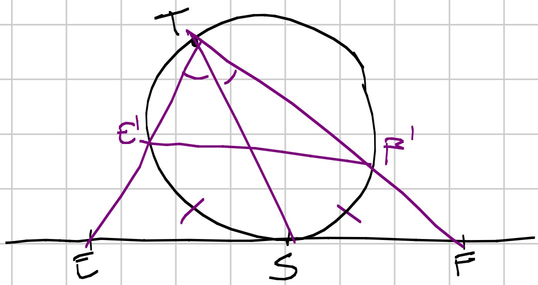
WC 2

Tesi: $E\hat{T}S = S\hat{T}F$



Oss 1: Tesi $\iff E'F' \parallel EF$.

$\iff \overset{\frown}{E'S} = \overset{\frown}{F'S}$



Oss 2: P, X, Y sono all.

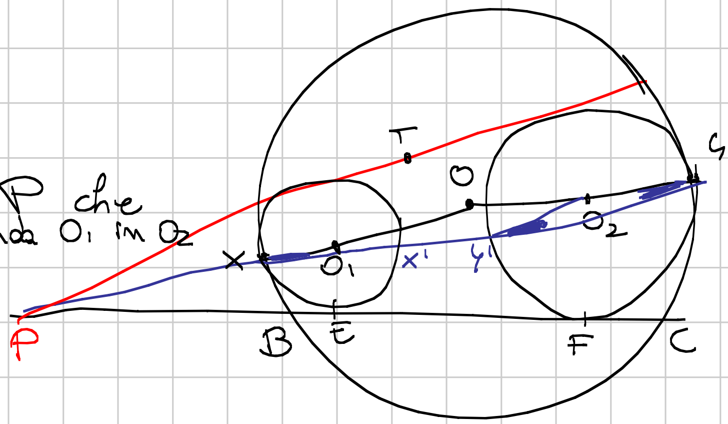
1° modo:

$X'\hat{X}O_1 =$

Omotetia di centro P che manda O_1 in O_2

$X \to Y'$

$XO_1 \parallel Y'O_2$

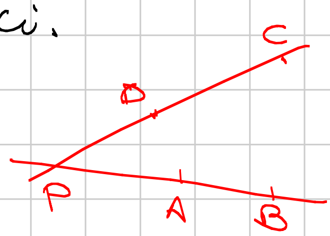


Oss 3: X, Y, F, E sono conciclici.

$\iff PX \cdot PY = PE \cdot PF$

(1) $PE^2 = PX \cdot PX'$

$PF^2 = PY \cdot PY'$



$$PE^2 \cdot PF^2 = PX \cdot PX' \cdot PY \cdot PY' = PX^2 \cdot PY^2$$

$$\frac{PX}{PY'} = \frac{PX'}{PY}$$

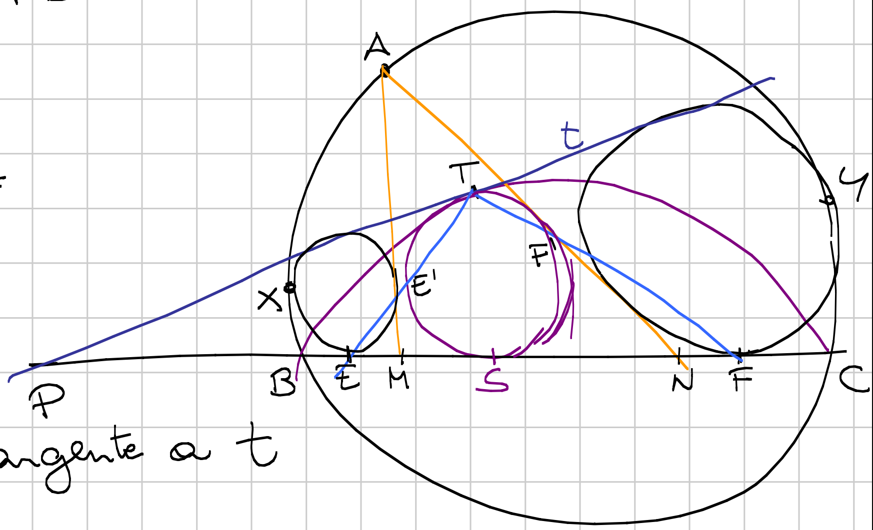
(2) $X\hat{E}P \overset{?}{=} X\hat{Y}F$

$X\hat{E}P = Y'\hat{F}P = Y'\hat{Y}F$

(3) Inversione di centro P, rapporto $PT^2 = PB \cdot PC$

$\Gamma \longrightarrow \Gamma$

$PE \cdot PF = PB \cdot PC = PX \cdot PY$.



Sol:

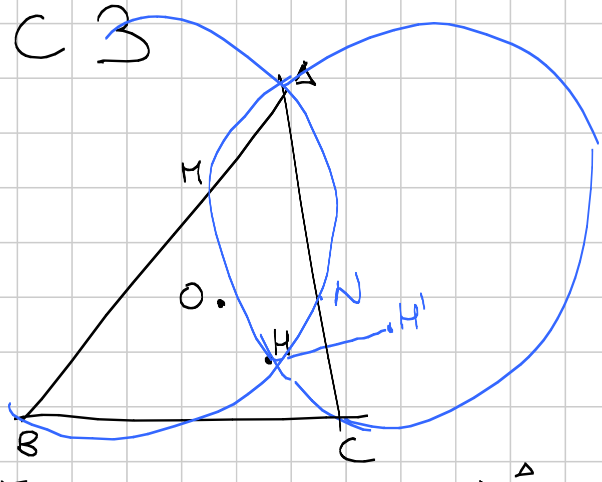
$PX \cdot PY = PE \cdot PF$

$\overset{\|}{PB \cdot PC} = PT^2$

⊙EFT è tangente a t in T.

Omotetia di centro T e rapporto giusto (che manda ⊙EFT ⇝ circo per T e S)

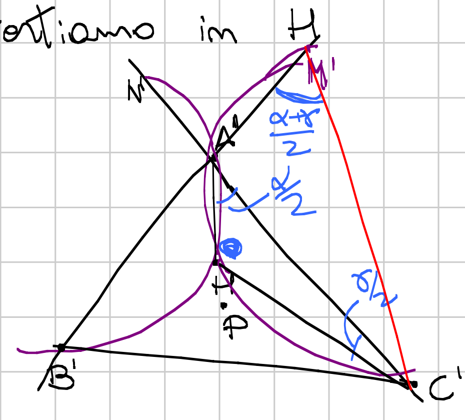
WC 3



I cerchi blu hanno lo stesso raggio (sono $= \Gamma_{ABC}$, segue da $H' \in \Gamma_{ABC}$)

Tesi: circocentro di $\hat{MNH}$ sta sulla retta OH.

Invertiamo in H



Oss: H è incentro di $A'B'C'$

$$B'\hat{M}'C' = 180 - A'\hat{H}C' = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$180 - B - \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

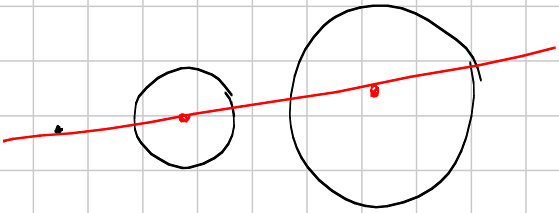
Tesi $\iff$ OH è asse di simm per Γ_{MNH}.

$OH \perp \Gamma_{MNH}$

$\iff O'H \perp M'N'$

O' NON è circocentro di $A'B'C'$

O', P, H sono allineati.

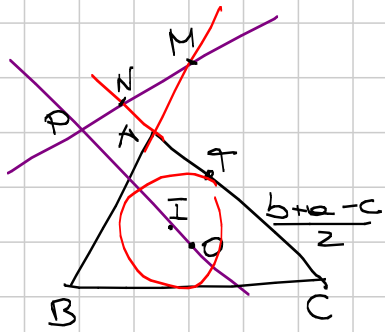


Tesi $\iff HP \perp M'N'$.

Vale $M'B' = B'C'$ (angoli)

$BM = CN = BC$

Tesi $OI \perp MN$



1° modo: complessi

$M = B + (A-B)\frac{a}{c}$ $N = C + (A-C)\cdot\frac{a}{b}$

$I = \frac{aA + bB + cC}{a+b+c}$

$(M-N)\cdot I = 0$

2° modo $MN \perp OI \iff$

$ON^2 + IM^2 = OM^2 + IN^2$

$\iff$ sottraggo $r^2 + R^2$

$\mathrm{pow}_{\Gamma_{ABC}} N + \mathrm{pow}_{\gamma_{ABC}} M = \mathrm{pow}_{\Gamma_{ABC}} M + \mathrm{pow}_{\gamma_{ABC}} N$

circonf iscritta

$\mathrm{pow}_{\Gamma_{ABC}} N - \mathrm{pow}_{\gamma_{ABC}} N \overset{?}{=}$ espressione simmetrica in b e c

$= NA \cdot NC - NT^2$

$= a(a-b) - \left(a - \frac{b+a-c}{2}\right)^2$

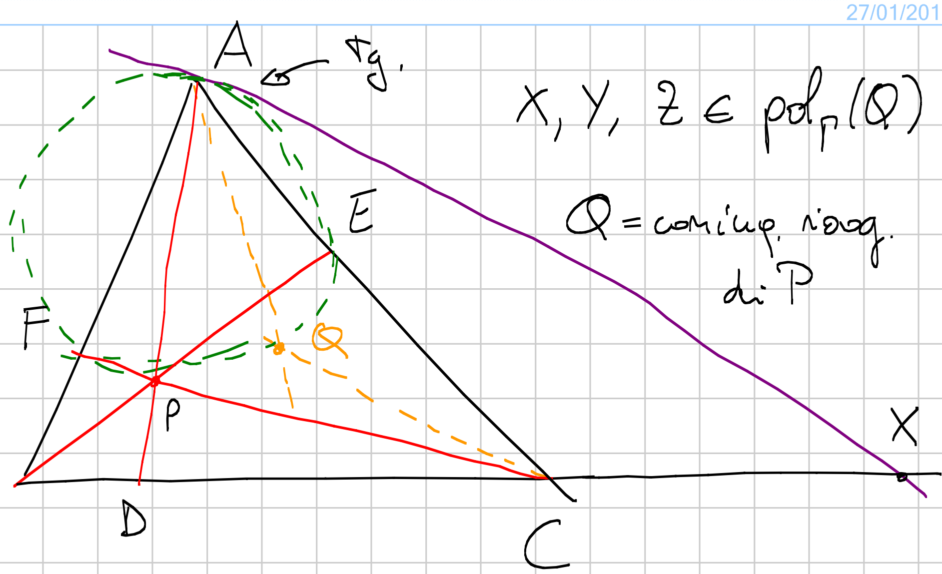
$= a(a-b) - \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}\left(-3a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac - 2bc\right)$

WC 2011 – Geometria contosa

Titolo nota 27/01/2011

7)



$X, Y, Z \in pol_P(Q)$

Q = coniug. isog. di P

Possibilità I : • caratterizzare X in altro modo
= senza circonferenze
• pol = retta per l'inverso $\perp$ alla retta per O
• fare qualche conto

Ricordate! : se $P = [x : y : z]$ baricentriche

$$x = \frac{[BPC]}{[BAC]} \qquad y = \frac{[CPA]}{[CBA]} \qquad z = \frac{[APB]}{[ACB]}$$

$$\vec{P} = \frac{x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}}{x+y+z} \quad \Leftarrow$$

Conto: $P_1 = [x_1 : y_1 : z_1]$ $\qquad P_2 = [x_2 : y_2 : z_2]$

$x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$

$\vec{P_1} = x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C} \qquad \vec{P_2} = x_2\vec{A} + y_2\vec{B} + z_2\vec{C}$

$$\|\vec{P_1}-\vec{P_2}\|^2 = \|\vec{A}(x_1-x_2)+\vec{B}(y_1-y_2)+\vec{C}(z_1-z_2)\|^2 =$$

$$= 2S\left[S_\alpha(x_1-x_2)^2+S_\beta(y_1-y_2)^2+S_\gamma(z_1-z_2)^2\right]$$

dove $S = \text{area}(ABC)$

$S_\alpha = \cot\hat{A} \quad S_\beta = \cot\hat{B} \quad S_\gamma = \cot\hat{C}$

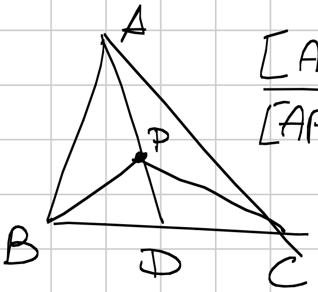
$\{X \mid d(P,X)=r\}$ $\quad \boxed{a^2yz+b^2xz+c^2xy = (x+y+z)(\lambda x+\mu y+\nu z)}$

Oss: λ, μ, ν sono (a meno di un multiplo) le potenze di A, B, C rispetto alla cfr

Possibilità II: • fare i conti.

$A=[1:0:0] \qquad B=[0:1:0] \qquad C=[0:0:1]$

$P=[u:v:w]$



$$\frac{[APB]}{[APC]} = \frac{[ADB]}{[ADC]}$$

$D=[0:v:w]$

$E=[u:0:w]$

$F=[u:v:0]$

cfr. per A, E, F: $c^2xy+b^2xz+a^2yz = (x+y+z)(\lambda x+\mu y+\nu z)$

$A=[1:0:0] \qquad 0 = 1(\lambda) \Rightarrow \lambda = 0$

$E=[u:0:w] \qquad b^2uw = (u+w)(\cancel{\lambda u}+\nu w)$

$$\nu = \frac{b^2u}{u+w}$$

$F = [u : v : 0] \qquad c^2 uv = (u+v)(\cancel{\lambda w} + \mu v)$

$$\mu = \frac{c^2 u}{u+v}$$

Γ_{4EF}

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = (x+y+z)\left(\frac{c^2 u}{u+v}\,y + \frac{b^2 u}{u+w}\,z\right)$$

<u>Incaico scolastico</u> : $x^2 + 2y^2 - 3xy + 2y - 2x + 1 = 0$

T_g in (x_0, y_0) $\quad x \cdot x + 2y \cdot y - \frac{3}{2}xy - \frac{3}{2}xy + y + y - x - x + 1 = 0$

$(x_0, y_0) \quad x_0 \cdot x + 2y_0 y - \frac{3}{2}x_0 y - \frac{3}{2}xy_0 + y + y_0 - x - x_0 + 1 = 0$

$A = [1:0:0]$

T_g in A

BC

$$\begin{cases} \frac{c^2}{\cancel{2}}y + \frac{b^2}{\cancel{2}}z = \frac{c^2 u}{\cancel{2}(u+v)}\,y + \frac{b^2 u}{\cancel{2}(u+w)}\,z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y\, c^2\left(\frac{\cancel{u} + v - \cancel{u}}{u+v}\right) + z\, b^2\left(\frac{\cancel{u} + w - \cancel{u}}{u+w}\right) = 0$$

$$y\,\frac{c^2 v}{u+v} = -z\,\frac{b^2 w}{u+w}.$$

$$\left[0 : -\frac{b^2 w}{u+w} : \frac{c^2 v}{u+v}\right] = X$$

Q = coniug. isog. di $P = \left[\frac{a^2}{u} : \frac{b^2}{v} : \frac{c^2}{w}\right]$

$\Gamma_{ABC} = \{ a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy = 0 \}$

$$\frac{a^2}{\cancel{2}}\left(\frac{b^2}{v}z+\frac{c^2}{w}y\right)+\frac{b^2}{\cancel{2}}\left(\frac{a^2}{u}z+\frac{c^2}{w}x\right)+\frac{c^2}{\cancel{2}}\left(\frac{a^2}{u}y+\frac{b^2}{v}x\right)=0$$

pdp Q con lo sdoppiamento

$$x\left(\frac{b^2c^2}{w}+\frac{b^2c^2}{v}\right)+y\left(\frac{a^2c^2}{w}+\frac{a^2c^2}{u}\right)+z\left(\frac{a^2b^2}{u}+\frac{a^2b^2}{v}\right)=0$$

$$\underbrace{x\,b^2c^2\left(\frac{w+v}{wv}\right)}_{0}+y\,a^2c^2\left(\frac{w+u}{wu}\right)+z\,a^2b^2\left(\frac{u+v}{uv}\right)=0$$

$$\left[0:-\frac{b^2w}{u+w}:\frac{c^2v}{u+v}\right]=X$$

$$-\frac{b^2a^2c^2}{u}+\frac{a^2b^2c^2}{u}=0$$

8) $\bullet\ f(M)=x\,MA^2+y\,MB^2+z\,MC^2$

$$(x+y+z)\,f(M)\geq(yz\,a^2+xz\,b^2+xy\,c^2)$$

1° $x+y+z\neq 0$ $\qquad P=x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}$

WLOG: $x+y+z=1$

$$f(P)=x\,PA^2+y\,PB^2+z\,PC^2=$$

$$=x\|P-A\|^2+y\|P-B\|^2+z\|P-C\|^2=$$

$$=x\|(x-1)A+yB+zC\|^2+\dots=$$

$$=x\|(-y-z)A+yB+zC\|^2+\dots=$$

$$= x\,\|y(B-A)+z(C-A)\|^2+\dots =$$

$$= x\left(y^2c^2+z^2b^2+2yz(B-A,\,C-A)\right)+\dots =$$

$$= x\left(y^2c^2+z^2b^2+yz(c^2+b^2-a^2)\right)+\dots =$$

$$= xy^2c^2+xz^2b^2+xyz(c^2+b^2-a^2)+yx^2c^2+yz^2a^2+$$

$$+xyz(a^2+c^2-b^2)+zx^2b^2+zy^2a^2+xyz(a^2+b^2-c^2)=\dots$$

$$\dots = (xyc^2+yza^2+xzb^2)\underbrace{(x+y+z)}_{=1}$$

$$f(\Pi) = x\,\Pi A^2+y\,\Pi B^2+z\,\Pi C^2 =$$

$$x\|\vec{PA}-\vec{P\Pi}\|^2+y\|\vec{PB}-\vec{P\Pi}\|^2+z\|\vec{PC}-\vec{P\Pi}\|^2=$$

$$= xPA^2+yPB^2+zPC^2+(x+y+z)P\Pi^2-2\cancel{\left(\vec{P\Pi},\,\underbrace{x\vec{PA}+y\vec{PB}+z\vec{PC}}_{=0}\right)}=$$

$$= f(P)+\underbrace{(x+y+z)}_{=1}P\Pi^2$$

$$P\Pi^2+f(P)\geq f(P)$$ vero!

(I) $f(P) = (yza^2+xzb^2+xyc^2)/(x+y+z)$

$$f(\Pi) = f(P)+P\Pi^2(x+y+z)$$

$x+y+z=0 \qquad 0 \geq yza^2+xzb^2+xyc^2$ è facile.

(a) Π generico $\quad x=y=z=1$

$$\Pi A^2+\Pi B^2+\Pi C^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = AG^2+BG^2+CG^2$$

(b) $\Pi = O \qquad x=y=z=1$

$$(3)(3R^2) \geq a^2+b^2+c^2$$

(c) $\Pi = O \qquad x=a,\ y=b,\ z=c$

$$(a+b+c)(a+b+c)R^2 \geq bca^2+acb^2+abc^2$$

$$(a+b+c)^2 R^2 \geq \cancel{(a+b+c)}\, abc$$

$$R \geq \frac{abc}{R}\,\frac{1}{(a+b+c)} = 2r$$

(d) $x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2 \qquad \Pi = O$

$$(a^2+b^2+c^2)^2 R^2 \geq 3a^2b^2c^2$$

$$\left(\sum a^2\right)^2 \geq 3\,\frac{a^2b^2c^2}{R^2} \longrightarrow \sum a^2 \geq \sqrt{3}\,4S$$

$$\frac{a^2b^2c^2}{R^2} = 16S^2$$

(e) $a m_a^2 + b m_b^2 + c m_c^2 =$

$$= a\left(\frac{-a^2+2b^2+2c^2}{4}\right) + b\left(\frac{-b^2+2a^2+2c^2}{4}\right) + c \ \text{----} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-a^3+2ab^2+2ac^2-b^3+2ba^2+2bc^2-c^3+2ca^2+2cb^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 3(a^3+b^3+c^3)\right)$$

$\Pi = G \qquad x=a \qquad y=b \qquad z=c$

$$\cancel{(a+b+c)}\left(a\,AG^2 + b\,BG^2 + c\,CG^2\right) \geq abc\,\cancel{(a+b+c)}$$

$$\|$$

$$\frac{4}{9}\left(\frac{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{\cancel{4}} - \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{\cancel{4}}\right) \geq abc$$

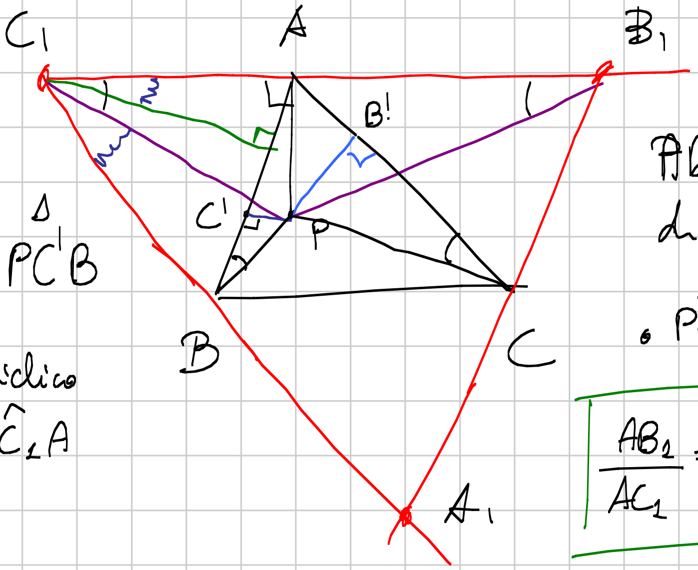
(f) $\frac{(p-a)bc}{p} = AI^2$

$x=\frac{1}{b^2}, \quad y=\frac{1}{c^2}, \quad z=\frac{1}{a^2} \qquad \Pi = I$

$$\left(\frac{AI^2}{b^2}+\frac{BI^2}{c^2}+\frac{CI^2}{a^2}\right)\cancel{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)} \geq \cancelto{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

—— ∘0∘ ——

g)



- $\overset{\triangle}{PAC_1} \sim \overset{\triangle}{PC'B}$

C_1BPA ciclico

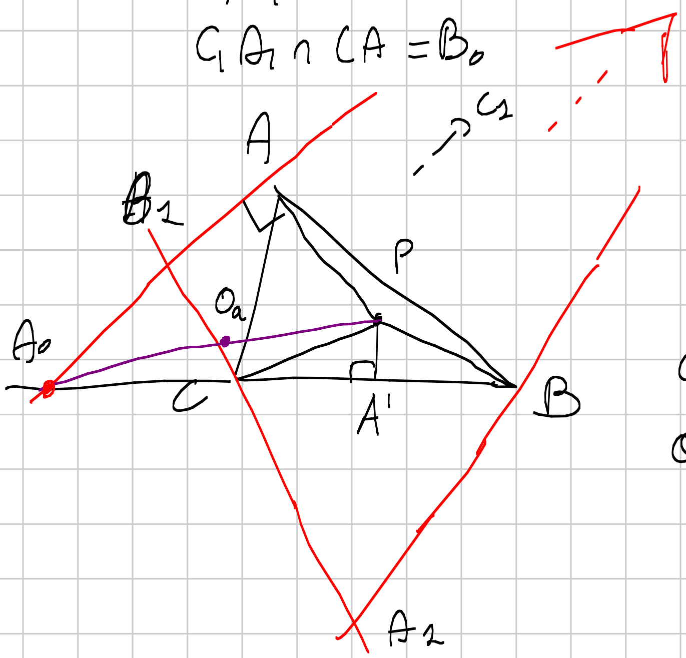
$P\hat{B}C' = P\hat{C_1}A$

ABC = Tri pedale di P in $A_1B_1C_1$

- $\overset{\triangle}{PAB_1} \sim \overset{\triangle}{PB'C}$

$$\boxed{\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{PC'}{PB'}\cdot\frac{CB'}{BC'}}$$

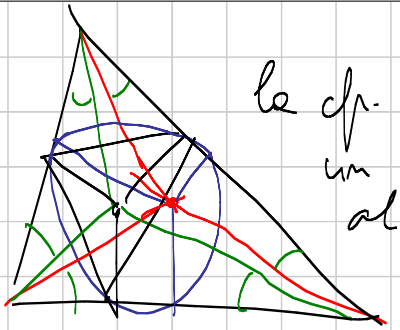
- Con Ceva A_2A, B_1B, C_1C concorrono in R
- $\Rightarrow$ (Desargues) $A_2B_1 \cap AB = C_0$
  $B_1C_1 \cap BC = A_0$
  $C_1A_2 \cap CA = B_0$ sono allineati su r



O_a = centro cf APA' e pt. medio di PA_0
O_b = pt. m. di PB_0
O_c = pt m. di PC_0

$\Rightarrow O_a, O_b, O_c$ allineati. $\Rightarrow$ le cf sono coassiali
$\Rightarrow \exists$ un secondo punto in comune oltre P: sia P'!

- Le $\perp$ da A_2, B_1, C_1 a BC, CA, AB concorrono (Trig-Ceva in $\triangle A_2B_1C_1$) in un punto P_1 che è coniug. isog. di P in $\triangle A_2B_1C_1$



le cf. circo al tr. pedale di un punto è circo. anche al tr. pedale del suo coniug. isogonale

$\Rightarrow$ le cf. circo ad ABC passa per le proiez. di P_1 e il centro O è il pt medio di PP_1

⊙ retta per i centri delle 3 cf. è $/\!/ \overline{A_0B_0C_0}$ = prospettiva tra $\hat{ABC}$ e $A_2\hat{B}_1C_1$

⊙ la corda comune alle 3 cf. è $\perp \overline{A_0B_0C_0}$ e passa per P

⊙ $A_1B_1C_1$ e ABC sono ortologici

Teo Sondat: le congiungente dei centri ortologici di due triangoli ortologici e prospettivi è perpendicolare all'asse perspettico. (prospettico)

ABC e $A_1B_1C_1$ sono
- ortologici con centri P, P_1
- prospettivi con asse $A_0B_0C_0$

$\Rightarrow PP_1 \perp \overline{A_0B_0C_0}$ $\quad O \in PP_1$

anche PR è $\perp \overline{A_0B_0C_0}$ e $PR \ni P$ $\quad \Rightarrow P, P_1, R$ sono all.

$\Rightarrow O, P, R$ sono all.

WC 2011 – Teoria dei Numeri

Titolo nota 28/01/2011

Shift $\longleftrightarrow$ multiplo n

S = somma cifre

$$S\,(\underbrace{111\ldots 11}_{\frac{10^{16}-1}{9}}) = n\cdot(1+2+\ldots+16)$$

$9n$ e' uno shift $\Rightarrow 9 \mid S$

$$n = S/9 \cdot (10^{16}-1)\,\frac{1}{8\cdot 17}$$

$$n = j\cdot\left(\frac{10^{16}-1}{17}\right) \qquad j\geqslant 2 \Rightarrow n \geqslant 10^{15}$$

NO

$10n$ avrebbe 17 cifre

Mod $10^{16}-1$ SHIFT = MOLTIPLICARE PER 10

$$10^{K} n \equiv j\cdot n \pmod{10^{16}-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$10^{K} \equiv j \pmod{17 = \frac{10^{16}-1}{n}}$$

$$\frac{1}{17} = 0,\underbrace{\ldots\ldots}$$

1^a cifra decimale $\left[\frac{10}{17}\right]$

2^a cifra " $\left[\frac{100}{17}\right]$ $100 = 5 \cdot 17 + 15$

$10^i \equiv r$ $\left[\frac{10r}{17}\right]$

$$\frac{1}{17} = 0,\overline{a_1 \ldots a_{16}} \qquad A = a_1 \ldots a_{16}$$

$$A_3 = a_3 a_4 \ldots a_{16} a_1 a_2$$

$$\frac{10^{16}}{17} = A + \frac{1}{17}$$

$$\frac{1}{17} = 0,a_1 a_2 \underbrace{\qquad\qquad}_{A_3}$$

$$a_1 a_2 = \left[\frac{100}{17}\right] \qquad 100 \equiv 15 \pmod{17}$$

$$\frac{15 \cdot 10^{16}}{17} = A_3 + \frac{15}{17}$$

$$A_i = \left[\frac{r_i \cdot 10^{16}}{17}\right]$$

$$A = A_1 \qquad \frac{10^{16}}{17} = A_1 + \frac{1}{17}$$

$$\frac{r\, 10^{16}}{17} = rA_1 + \frac{r}{17}$$

$$\left[\frac{r\, 10^{16}}{17}\right] = rA_1$$

PROBLEMA 2)

IL PIÙ PICCOLO PRIMO!

q IL PIÙ PICCOLO CHE DIVIDE

ALMENO UN n_i PER QUALCHE $i \in \{1, \dots, k\}$

$q \mid n_i \qquad n_i \mid p^{n_{i-1}} - 1$

$q \mid p^{n_{i-1}} - 1$

$\Downarrow$

$ord_q(p) \mid n_{i-1}$

$\mid q-1$

$ord_q(p) \mid (n_{i-1}, q-1)$

FATTORI PRIMI DI $q-1$ SONO $< q$

FATTORI PRIMI DI $n_{i-1} \geq q$

$ord_q(p) = 1 \qquad q \mid p-1 \qquad !$

2 NON È NICE! $\quad p-1 = 1 \quad q \mid p-1$ È IMPOSS

$n_1 = p-1 \qquad n_2 \mid p^{p-1} - 1$

1) $\exists\, q$ TALE CHE $ord_q(p) = \boxed{p-1}$

SE $p \geq 5$

$p^{p-1}-1$ CHE DIVISORI HA?

$p^{d}-1 \mid p^{p-1}-1 \quad \forall d \mid p-1$

CI SONO DEI FATTORI q TALI CHE:

$q \mid p^{p-1}-1$ MA $q \nmid p^{d}-1 \quad \forall d \mid p-1 \quad d < p-1$

$p \geq 5$ È NICE?

$n_1 = p-1 \qquad q: \ \mathrm{ord}_q(p) = p-1$

$q^a \parallel p^{p-1}-1 \qquad n_2 = q^a$

$q \equiv 1 \ (p-1) \Rightarrow n_2 > p-1$

$n_1 \mid p^{n_2}-1 \qquad p \equiv 1 \ (n_1)$

$p^{n_2} \equiv 1 \ (n_1)$

TUTTI I FATTORI PRIMI DI n_2 SONO $> p-1$

PRESO $r \mid p-1 \qquad v_r(p-1) = v_r(p^{n_2}-1)$.

$n-1 \qquad n^k-1 \qquad r \mid n$

se $r \mid k \qquad v_r(n^k-1) > v_r(n-1) \qquad \forall r \mid n-1$

se $r \nmid k \qquad v_r(n^k-1) = v_r(n-1)$

$\left(\frac{p^{n_2}-1}{p-1}, p-1\right) = 1$

$n_1 = p-1$ $\quad n_2 = q^k$ SODDISFANO LE RICHIESTE!

2) $n_1 = p-1$ $\quad r$ IL PIÙ GRANDE FATTORE PRIMO DI $p-1$

$$\left(\frac{p^r-1}{p-1}, p-1\right) \overset{r \text{ DISP}}{=} 1 \text{ O } r \qquad r \mid p-1 \text{ E' } r^1$$

$$\left(\frac{p^r-1}{r(p-1)}, p-1\right) = 1$$

SE $r=2$ $\qquad p = 2^n+1$

$$\left(\frac{p+1}{2}, p-1\right) = 1 \quad \text{TRANNE SE } p \equiv 3 \ (4) \text{ CIOÈ } p=3$$

$$n_2 = \frac{p^r-1}{r(p-1)}$$

$$n_2 \mid p^r - 1 \mid p^{p-1}-1$$

$$n_1 \mid p^{n_2}-1$$

$$(n_2, p-1) = 1$$

COME SOPRA $\left(\dfrac{p^{n_2}-1}{p-1}, p-1\right) = 1$

$$\left(\frac{p^{p-1}-1}{n_2}, n_2\right) = 1$$

$$\left(\frac{p^{p-1}-1}{p^{r}-1}\cdot\frac{p^{r}-1}{n_2},\ n_2\right)=1$$

HOPE

$$\left(\frac{p^{p-1}-1}{p^{r}-1}\cdot r\cdot(p-1),\ n_2\right)=1$$

$(r, n_2) = 1$ $\quad r \nmid n_2 \quad$ $n_2 = \frac{p^r-1}{r(p-1)}$

$p^r - 1$ HA SOLO UN FATTORE r IN PIÙ DI $p-1$!

$(p-1, n_2) = 1$

$\forall\ q \mid p-1 \quad q$ PRIMO $\quad q \neq r$

$v_q(p^r-1) = v_q(p-1) \Rightarrow q \nmid n_2$

$$\left(\frac{p^{p-1}-1}{p^{r}-1},\ n_2\right) = \qquad q \mid \frac{p^{p-1}-1}{p^r-1}$$

e $q \mid n_2$

$q \mid n_2 \Rightarrow q \mid p^r - 1$

$p^r \equiv 1 \pmod q$

e $v_q\left((p^r)^{\frac{p-1}{r}}-1\right) > v_q(p^r-1) \Rightarrow q \mid \frac{p-1}{r}$

ΠA $(p-1, n_2) = 1 \Rightarrow q \mid \frac{p-1}{2} \Rightarrow q \nmid n_2$ 1

$$\left(\frac{p^{p-1}-1}{n_2}, n_2\right) = 1$$

$$p-1 \geq \frac{p+1}{2}$$

$$\frac{p^r-1}{2(p-1)} \geq \frac{p+1}{2} \quad ?$$

$r = 2$ $\qquad \frac{p^2-1}{2(p-1)} = \frac{p+1}{2}$

$r > 2$

$$\frac{p^r-1}{p-1} \geq (p+1) \cdot \frac{r}{2}$$

$$1 + \ldots + p^{r-1} \geq (p+1)\frac{r}{2}$$

$$\simeq$$

$$p + \ldots + p^{r-1} \geq p \cdot (r-1) \geq \frac{p+1}{2} \cdot r \qquad \square$$

$p \geq 5$

$p = 3$

$n_1 = 2$ $\qquad n_2 \mid p^2 - 1 = 8$ $\qquad \left(\frac{8}{n_2}, n_2\right) = 1$

$n_2 = 8$

$n_3 \mid 3^8 - 1 = (3^4-1)(3^4+1)$ $\quad 3^4+1 = 82$

$n_3 = 41$ $\quad \left(41, (3^4-1)\frac{(3^4+1)}{41}\right) = 1$

$n_1 \mid 3^{41} - 1$ $\quad 2 \mid 3^{41}-1$

$\left(\frac{3^{41}-1}{2}, 2\right) = 1$ $\quad 3^{41} \equiv (-1)^{41} \equiv -1 \ (4)$

$3^{41}-1 \equiv 2 \ (4)$

$\frac{3^{41}-1}{2}$ é DISPARI

PROBLEMA 3)

(CINAMO n° 6)

$$(n+1)a_1^n + n a_2^n + (n-1)a_3^n \mid (n+1)b_1^n + n b_2^n + (n-1)b_3^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (b_1, b_2, b_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$$p \mid (n+1)a_1^n + n a_2^n + (n-1)a_3^n \Rightarrow$$

$$p \mid (n+1)b_1^n + n b_2^n + (n-1)b_3^n$$

VOGLIO IMPORRE LA PRIMA DIVISIBILITÀ!

$n = kp$

$$\Rightarrow \equiv a_1^{kp} - a_3^{kp} \equiv a_1^k - a_3^k$$

$$a_1^k \equiv a_3^k \ (p) \Rightarrow b_1^k \equiv b_3^k \ (p)$$

$b_1 = a_1^2 \quad b_3 = a_3^2$ è RISP. MA NON VALE LA TESI!

$(n+1)\, a_1^n \mod p$

$(n+1) \mod p$ DIPENDE SOLO DA $n \mod p$

LA CONGRUENZA DI $a_1^n \mod p$
DIPENDE DA $n \pmod{p-1}$

AL POSTO DI n, SCRIVIAMO LA CONDIZIONE CON $n+K(p-1)$

$$(n+K(p-1)+1)\,a_1^{n+K(p-1)} + (n+K(p-1))\,a_2^{n+K(p-1)} + (n+K(p-1)-1)\,a_3^{n+K(p-1)} \mid \ldots$$

LA SUA CONGRUENZA MOD p ?

$$p > \max\left(a_1^n+a_2^n+a_3^n,\ b_1^n+b_2^n+b_3^n\right)$$

MA $a_1^{K(p-1)} \equiv 1 \ (p)$

$$(n+1-K)\,a_1^n + (n-K)\,a_2^n + (n-K-1)\,a_3^n \pmod p$$

$p \mid \ldots$ VUOL DIRE $\exists\, K \in \mathbb{N}$ T.C.

$$\boxed{(n+1)a_1^n + n\cdot a_2^n + (n-1)a_3^n \equiv K(a_1^n+a_2^n+a_3^n)\ (p)}$$

$p > a_1^n+a_2^n+a_3^n \implies$

$$K \equiv \frac{(n+1)a_1^n + n a_2^n + (n-1)a_3^n}{a_1^n+a_2^n+a_3^n} \quad (p)$$

$\Downarrow$

$$p \mid (n+K(p-1)+1)\,b_1^{n+K(p-1)} + \ldots$$

$\Downarrow$

$$(n+1)b_1^n + n\cdot b_2^n + (n-1)b_3^n \equiv K(b_1^n+b_2^n+b_3^n)\ (p)$$

$$\cancel{K}\cdot(a_1^n+a_2^n+a_3^n)\left[(n+1)b_1^n+n\,b_2^n+(n-1)b_3^n\right]\equiv$$

$$\cancel{K}(b_1^n+b_2^n+b_3^n)\left[(n+1)a_1^n+n\,a_2^n+(n-1)a_3^n\right]\pmod{p}$$

$$p>(n+1)b_1^n+n\,b_2^n+(n-1)b_3^n \Rightarrow K\not\equiv 0\ (p)$$

LA CONGRUENZA VALE $\forall p>M$

$\Rightarrow$ VALE CON GLI INTERI!

$$(a_1^n+a_2^n+a_3^n)\left[(n+1)b_1^n+n\,b_2^n+(n-1)b_3^n\right]-$$

$$(b_1^n+b_2^n+b_3^n)\left[(n+1)a_1^n+n\,a_2^n+(n-1)a_3^n\right]=0$$

$\forall n\in\mathbb{N}$

$$-a_1^n b_2^n+a_2^n b_1^n+2a_3^n b_1^n-2b_3^n a_1^n+b_2^n a_3^n-b_3^n a_2^n$$

$=0 \quad \forall n$

$$\sum_{i=1}^{\ell}K_i\cdot m_i^n=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad m_i\neq m_j\ \ \forall i\neq j$$

$$\Rightarrow \forall i\quad K_i=0 \qquad\qquad m_i\in\mathbb{R}^+$$

$$m_1<m_2<\dots<m_\ell$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} k_i \left(\frac{m_i}{m_\ell}\right)^n = 0$$

$$k_\ell + \boxed{\sum_{i=1}^{\ell-1} k_i \left(\frac{m_i}{m_\ell}\right)^n} = 0 \qquad \frac{m_i}{m_\ell} < 1$$

DIVENTA PICCOLA A PIACERE PER n ABB. GRANDE

QUINDI $k_\ell = 0$ QUINDI SON TUTTI 0

$$(b_2 a_1)^n + 2(b_3 a_1)^n + (b_3 a_2)^n - (a_2 b_1)^n - 2(a_3 b_1)^n - (a_3 b_2)^n = 0$$

$b_3 a_1$ A CHI PUÒ ESSERE ACCOPPIATO?

PRIMA POSS.) LO ABBINO A $-2\cdot(a_3 b_1)^n$

$$b_3 a_1 = a_3 b_1 \qquad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3}$$

$$b_2 a_1 = a_2 b_1 \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3} \qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}}$$

$$(b_1, b_2, b_3) = k(a_1, a_2, a_3)$$

$k \in \mathbb{Q}$

$k \in \mathbb{N}^*$

$b_2 a_1 = a_3 b_2$ IMPOSSIBILE! GLI a_i SIANO DISTINTI!!

$$(b_2 a_1)^n + 2(b_3 a_1)^n + (b_3 a_2)^n - (a_2 b_1)^n - 2(a_3 b_1)^n - (a_3 b_2)^n = 0$$

$$b_3 a_1 = a_2 b_1 \qquad \boxed{b_3 a_1 = a_3 b_2}$$

$$b_2 a_1 = b_3 a_2 = a_3 b_1$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_3} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_3}{b_2} \qquad \frac{b_1}{b_3} = \frac{b_3}{b_2}$$

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} \qquad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \frac{b_2}{b_3} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$b_1 b_2 = b_3^2 \qquad b_2^2 = b_1 b_3$$

$$b_2 a_1 = b_3 a_2 = b_1 a_3$$

$$b_2 a_3 = b_3 a_1 = b_1 a_2$$

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \qquad \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} = 1.$$

$$(a_2 b_1)^n + 2(a_3 b_1)^n + (a_3 b_2)^n = (a_1 b_2)^n + 2(a_1 b_3)^n + (a_2 b_3)^n$$

$$(a_3 b_1)^n + (a_3 b_2)^n \qquad\qquad (a_2 b_3)^n + (a_1 b_3)^n$$

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = y_1^n + y_2^n + y_3^n + y_4^n$$

$\Rightarrow \quad \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$s_0, s_1, \ldots, s_n$ funzioni simmetriche elementari

$p_0, p_1, \ldots, p_n$ "power sums"

(su n elementi)

$s_0 = 1 \qquad p_0 = n$

$$\boxed{s_0 p_n - s_1 p_{n-1} + s_2 p_{n-2} \qquad \pm s_n p_0 = 0}$$

WC 2011 — MISCELLANEA

Titolo nota 28/01/2011

Problema 9 $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y)$$

$\boxed{y=0 \quad f(0)=a}$ $\quad \cancel{f(x)} + a f(x) = a + \cancel{f(x)} + ax + a$

$$a f(x) = a(x+2)$$

$\boxed{x=0}$ $\quad a^2 = 2a \quad \Rightarrow \quad a=0$ oppure $\boxed{a=2}$

$\downarrow f(x) = x+2$

sostituendo non va bene

D'ora in poi $f(0)=0$

$\boxed{y=1}$ $\boxed{f(1)=b}$ $\quad f(x+1) + b f(x) = f(x) + 2f(x) + b(x+1)$

$$\boxed{f(x+1) = (3-b)f(x) + b(x+1)} \quad A$$

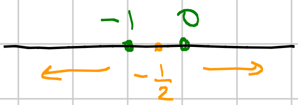
$\boxed{x=-1}$ $\quad 0 = (3-b)f(-1) \quad \Rightarrow \quad b=3$ opp. $f(-1)=0$

Se $b=3$ $\quad f(x+1) = 3(x+1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x)=3x}$ VERIFICA OK!

sostituire

D'ora in poi $f(-1)=0$

$\boxed{y=-1}$ $\quad \overset{B}{\boxed{f(x-1) = f(-x)}} \quad \overset{C}{\boxed{f(x) = f(-1-x)}}$



$$f(x) \overset{C}{\rightsquigarrow} f(-1-x) \overset{A}{\rightsquigarrow} f(-x) \overset{B}{\rightsquigarrow} f(x-1) \overset{A}{\rightsquigarrow} f(x)$$

$$f(-1-x) = f(x)$$

$$f(-x) = f((-1-x)+1) = (3-b)f(-1-x) + b(-1-x+1)$$
$$= (3-b)f(x) - bx = f(x-1)$$

$$f(x) = f((x-1)+1) = (3-b)f(x-1) + b(x-1+1)$$
$$= (3-b)[(3-b)f(x) - bx] + bx$$
$$= (3-b)^2 f(x) - b(3-b)x + bx$$

$$\boxed{f(x) = (3-b)^2 f(x) + b(b-2)x}$$

Due casi: se $(3-b)^2 \neq 1$, cioè $b \neq 2, 4$ ottengo $f(x) = \lambda x$

Sostituisco nell' eq. funz. e trovo che $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$

$\boxed{f(x) \equiv 0 \quad 2^a \text{ soluzione}}$

Se $b = 4$ $\quad \cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + 8x$ impossibile

Resta $b=2$ in cui A diventa: $\boxed{f(x+1) = f(x) + 2x + 2}$

da cui $f(x) = f(x-1) + 2x$

$\boxed{f(x-1) = f(x) - 2x}$

(x, x) $\qquad (x-1, x+1)$

$$f(2x) + [f(x)]^2 = f(x^2) + 2(x+1)f(x)$$

$$f(2x) + [f(x)]^2 = f(x^2) + 2x f(x) + 2f(x) \qquad \boxed{x, x}$$

$$f(2x) + f(x-1)f(x+1) = f(x^2-1) + (x+2)f(x-1) + x f(x+1)$$

$$f(2x) + (f(x) - 2x)(f(x) + 2x + 2) = f(x^2) - 2x^2 + (x+2)(f(x) - 2x) + x(f(x) + 2x + 2)$$

$$f(2x) + [f(x)]^2 + \cancel{2x f(x)} + \cancel{2f(x)} - \cancel{2x f(x)} - \cancel{4x^2} - \cancel{4x} = f(x^2) - \cancel{2x^2} + x f(x) - \cancel{2x^2} + \cancel{2f(x)} - \cancel{4x} + x f(x) + 2x^2 + 2x$$

$$f(2x) + [f(x)]^2 = f(x^2) + 2x f(x) + 2x^2 + 2x \qquad \boxed{x-1, x+1}$$

Sottraendo le 2 segnate: $\boxed{f(x) = x^2 + x}$ $\quad$ 3^a soluzione! fare verifica

— o — o —

Problema 8   Fissato k intero positivo. Trovare minimo d t.c.

$\forall$ scelta di $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ a 3 a 3 non all.
$\forall$ scelta di $c_1, \dots, c_k$
$\exists\, p(x,y)$ di grado $\leq d$ tale che $P(x_i, y_i) = c_i \quad \forall i = 1, \dots, k$.

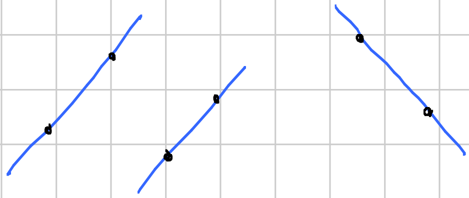
In dimensione 1, dati $(k+1)$ valori $x_1, \dots, x_{k+1}$ e dati $c_1, \dots, c_{k+1}$ esiste polinomio $p(x)$ di grado $\leq k$ che li prende. Con grado minore in generale non si fa.

Oss. dalla dimensione 1   Se so risolvere con

$$(c_1, \dots, c_k) = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \, i\text{-esimo}}{1}, 0, \dots, 0)$$

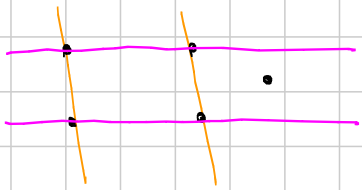
so risolvere sempre. Vale anche in dim. 2.

Obiettivo: trovare $p(x,y)$ che si annulla in $k-1$ p.ti, ma non nel restante.



Basta accoppiare a 2 a 2 e scrivere e moltiplicare le eq. delle rette
Così ci riesco con $d \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$

Oss. Per 5 p.ti passa sempre una conica



$a\, p_1(x,y) + b\, p_2(x,y)$
scegliendo bene a e b riesco a passare per l'altro.

Se i p.ti originari fossero a 6 a 6 non su una conica, allora riuscirei con $d \leq \frac{2}{5}k$ (opportunamente corretto)

(In realtà non serve per questa disuguaglianza il "6 a 6").

Retta $\rightsquigarrow$ 3 coeff. a meno di multipli $\rightsquigarrow$ 2 p.ti
Conica $\rightsquigarrow$ 6 " " $\rightsquigarrow$ 5 p.ti
Cubica $\rightsquigarrow$ 10 coeff -- $\rightsquigarrow$ 9 p.ti
grado H $\rightsquigarrow$ $\binom{H+2}{2}$ coeff. :

— o — o —

Idea: mostrare che $d \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ prendendo k p.ti su una conica.

Prendo (i, i^2) con $i = 1, \dots, k$
So che esiste un polinomio $p(x,y)$ che si annulla in $k-1$ di questi, ma non nel restante.
$\Rightarrow$ $p(x,x^2)$ ha $k-1$ radici e non è identicamente nullo
" $q(x)$.
Allora grado $(q(x)) \geq k-1$. D'altra parte grado $(q(x)) \leq 2d$
Quindi

$$2d \geq k-1 \quad \Rightarrow \quad d \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

— o — o —

<u>Oss. generale</u> Se $p(x,y)$ si annulla su $y = x^2$, allora

$$p(x,y) = (y - x^2)\, q(x,y)$$

Per concludere questo basta che si annulli in $2d+1$ p.ti della parabola, dove $d = $ grado $(p(x,y))$

Posso vedere $p(x,y)$ come un polinomio in y a coeff. che sono polinomi in x. Essendo $y - x^2$ monico (nella variabile y) posso dividere con resto

$$p(x,y) = (y-x^2)\, Q(x,y) + \underbrace{R(x,y)}_{\text{grado } 0 \text{ in } y}$$ SEMPRE

$R(x)$

Ora $R(x) = P(x,x^2)$, quindi ha grado $\leq 2d$ in x.
Se si annulla in $(2d+1)$ p.ti (che avranno x distinte), allora $R(x) \equiv 0$

— o — o —

Problema 7 $|X| = n$ $\quad \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ t.c. si verifica $A \cap B \not\subseteq C$ $\quad \forall A, B, C \in \ldots$ distinti

(a) Se hanno tutti cardinalità k, allora $|\mathcal{Y}| \leq \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + 1$

Oss. fond. Considero le intersezioni a 2 a 2

$A \cap B$: $A \in \mathcal{Y}$, $B \in \mathcal{Y}$, $A \neq B$.

Allora tra queste intersezioni non vi sono relazioni di $\subseteq$.

Se infatti fosse

$$A \cap B \subseteq C \cap D \begin{array}{l} \subseteq C \\ \subseteq D \end{array}$$ almeno 1 è diverso da A, B.

Fisso ora un elemento $A \in \mathcal{Y}$. Allora $A \cap B$, al variare di B in $\mathcal{Y}$, $B \neq A$, sono $|\mathcal{Y}| - 1$ sottoinsiemi di A senza relazioni di $\subseteq$.

Teorema di Sperner $|Y| = m$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ senza relazioni $\subseteq$.
Allora

$$|\mathcal{Y}| \leq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$$

con uguaglianza quando $\mathcal{Y}$ = sottoinsiemi (tutti) di $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ o $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ elementi

Teorema di Sperner $\Rightarrow$ p.to (a).

— o — o —

$\boxed{\text{p.to (b)}}$ Tutte le intersezioni a 2 a 2 sono sottoinsiemi di X senza relazioni, quindi

$$\underbrace{\binom{|\mathcal{Y}|}{2}}_{\text{tutte le intersezioni}} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Da qui si ottiene stima su $|\mathcal{Y}| = m$. Stima facile

$$m \leq 2\sqrt{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

Il che riduce il problema a

$$4\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \leq \binom{n}{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor}^2$$

1° modo: per inclusione

2° modo:

$$\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = \frac{\boxed{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor+1)}\cdot\boxed{(n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor)\cdot\ldots\cdot(n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)}}{\boxed{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\lfloor\frac{n}{4}\rfloor}\cdot\boxed{(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor+1)\cdot\ldots\cdot\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}$$

$$\binom{n}{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor} \qquad\qquad \leq \binom{n}{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor}$$

Resta solo da guadagnare il fattore 4... e chiarire le parti intere

—o—o—

$\boxed{\text{Sperner 1}}$ Sia $\mathcal{Y}$ famiglia senza $\subseteq$, $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{P}(X)$, $|X|=n$

$\binom{n}{k}\leq\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ per ogni $k=0,1,\ldots,n$

c_k = elementi di $\mathcal{Y}$ con k elementi

$$|\mathcal{Y}| = \binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\sum\frac{c_k}{\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}} \leq \binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\cdot\underbrace{\boxed{\sum\frac{c_k}{\binom{n}{k}}}}_{\leq 1 \ \uparrow \text{Hope}} \leq \binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$

$$\text{Hope} \iff \sum c_k\frac{k!(n-k)!}{n!}\leq 1 \iff \sum c_k\, k!\,(n-k)! \leq n!$$

$X=\{1,\ldots,n\}$ $\quad n!$ = tutte le permutazioni.

Ad ogni elemento $A\in\mathcal{Y}$ associo delle permutazioni

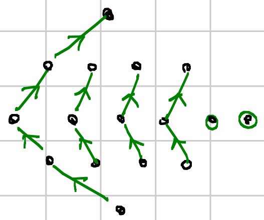
$$\Big(\underbrace{1\ 2\ 3\ 4}_{\text{el. di } A}\ \underbrace{\ldots\ n}_{\text{gli altri}}\Big)$$

se $|A|=k$ lo posso fare in $k!(n-k)!$ modi

Devo solo verificare che A diversi producono permutazioni diverse. Se A ha h elementi e B ha $k+h$ elementi, $k \geq 0$ allora i primi h elementi stanno in A, ma anche in B se la permutazione è la stessa.

—o —o —

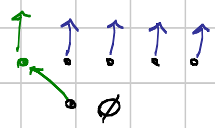
Sperner 2 $\boxed{n=1}$



4 elementi
3 el.
2 "
1 el.
$\emptyset$

Se riesco a suddividere tutto $\mathcal{P}(X)$ in $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ catene ho finito

perché $\mathcal{Y}$ ha al più un elemento in ogni catena.
Si dimostra l'esistenza di questa suddivisione usando il Lemma dei matrimoni. Parto dal basso



Per completare la costruzione serve, $\forall k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ una funzione dai sottoinsiemi di k el. in quelli di $k+1$ el. che sia iniettiva

Per l'esistenza di tale funzione serve lemma matrimoni.

Ho $B = \{\text{boys}\}$ e $G = \{\text{girls}\}$.
$\forall b \in B \ \exists \ g(b) \subseteq G$ = ragazze che piacciono a b.
Obiettivo: trovare $f : B \to G$ t.c. $f(b) \in g(b) \ \forall b \in B$.

Lemma: l'obiettivo è raggiungibile $\iff$

$$\forall B' \subseteq B \quad \underbrace{\left| \bigcup_{b \in B'} g(b) \right|}_{\text{unione ragazze che vanno bene ad almeno uno in } B'} \geq |B'|$$