WC 2011 – COMBINATORIA

Titolo nota 27/01/2011

__Problema 4__

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$n \times n$. Si può invertire una riga o una colonna a scelta. Determinare il minimo di 0.

$\boxed{n=1}$ $\quad 0$

$\boxed{n=2}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto 0$

$\boxed{n=3}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto 2$

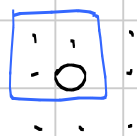
$\boxed{n \geq 4}$ $\quad \min = n.$

__Oss 1__ Per n pari la parità del numero di zeri è invariante

__Oss. 2__ L'oss. 1 vale in ogni sottomatrice $2k \times 2k$.

$\boxed{n=3}$ $\quad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

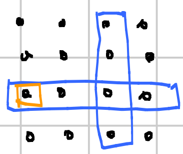
Nelle 2 matrici segnate c'è sempre almeno uno zero. O ci sono 2 zeri, o c'è 0 nella casella comune



Se c'è 0 nella comune, ce ne deve essere altro in alto a sx (blocco 2×2)

$\boxed{n=4}$ Supponiamo di arrivare a ≤ 3 zeri. Allora per parità saranno ≤ 2 zeri. Ne fisso uno, diciamo in (i,j)

Elimino riga i e colonna j.



Resta un blocco 3×3 che verifica le ipotesi (zeri sulla diagonale) in cui resta un solo 0 alla fine.

Ancora più semplice se alla fine non c'erano 0.

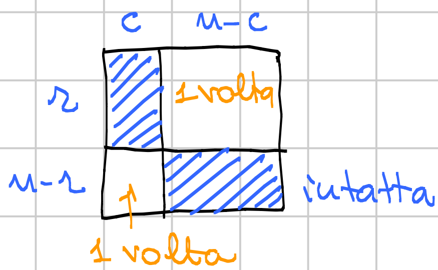
$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Prendiamo una $(n+1)\times(n+1)$ e supponiamo restino $\le n$ zeri. Se ce ne sono, fisso (i,j) e elimino come prima riga e colonna i.
Ottengo blocco $n \times n$ in cui rimango $\le n-1$ zeri

—o—o—

Approccio contoso (descritto per $n \ge 4$)

Oss. 1 Le operazioni sono commutative, cioè il finale non dipende dall'ordine

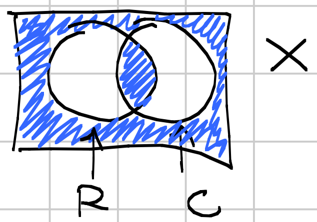
Oss. 2 Le operazioni sono binarie: l'unica cosa che conta è l'insieme delle righe e delle colonne su cui ho agito un # dispari di volte: r righe e c colonne.
Quanti 0 restano alla fine?
Pongo
d = elementi della diagonale in zona intatta.



$$0 \text{ finali} = \underset{\text{zeri blu}}{d} + r(n-c) + c(n-r) - \underbrace{(n-d)}_{\text{zeri in zona 1 volta}}$$
$$= d + rn - rc + cn - cr - n + d$$
$$= 2d + (r+c)n - 2rc - n \underset{\text{Hope}}{\ge} n$$

Devo dimostrare: $2d + (r+c)n \ge 2rc + 2n$ se $n \ge 4$.
Resta da stimare d: R = indici delle righe cambiate
C = " " " cambiate
$X = \{1, \dots, n\}$

$$d = |\underbrace{(R \cap C)}_{2 \text{ cambi}} \cup (X \setminus R) \cup (X \setminus C)|$$



$$= |R \cap C| + |X \setminus (R \cup C)|$$
$$= |R \cap C| + n - |R \cup C|$$

$$d = |R\cap C| + n - |R\cup C|$$

- <u>Caso 1</u> $n \geq r+c$. Voglio dim. che $d \geq n-r-c$.

Infatti

$$\begin{aligned} d &= |R\cap C| + n - |R\cup C| \\ &= |R\cap C| + n - |R| - |C| + |R\cap C| \\ &\geq n - |R| - |C| = n-r-c \end{aligned}$$

$$2d + (r+c)n \geq 2rc + 2n \iff$$

$$\cancel{2n} - 2r - 2c + (r+c)n \geq 2rc + \cancel{2n}$$

$$(r+c)n \geq 2r + 2r + 2rc$$

Uso che $n \geq r+c$ e ho

$$\begin{aligned} (r+c)n &= (r+c)\cdot\frac{n}{2} + (r+c)\cdot\frac{n}{2} \\ &\overset{n\geq 4}{\geq} (r+c)\cdot 2 + \overset{n \geq r+c}{\frac{(r+c)^2}{2}} \\ &\overset{\text{AM-GM}}{=} 2r + 2c + 2rc \end{aligned}$$

<u>2° caso</u> $n \leq r+c$. Dico che $d \geq r+c-n$

$$\begin{aligned} d &= |R\cap C| + n - |R\cup C| \\ &= |R| + |C| + n - 2|R\cup C| \geq r+c+n-2n = r+c-n \end{aligned}$$

Devo dimostrare $2d + (r+c)n \geq 2rc + 2n$, cioè

$2r + 2c - 2n + rn + cn \geq 2rc + 2n$, cioè

$(r+c)(n+2) \geq 2rc + 4n$ so che $n \leq r+c$, cioè

$n = r+c-k$

Basta dimostrare che

$$(r+c)(n+2) \geq \frac{(r+c)^2}{2} + 4n \qquad r+c = n+k$$

$$(n+k)(n+2) \geq \frac{1}{2}(n+k)^2 + 4n$$

$$\cancel{2}n^2 + \cancel{4n} + 2k\cancel{n} + 4k \geq \cancel{n^2} + 2\cancel{n}k + k^2 + \overset{4}{\cancel{8}}n$$

$$n^2 - k^2 + 4k - 4n \geq 0$$

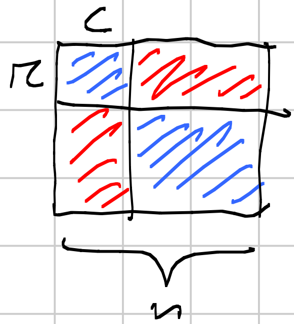
$$(n+k)(n-k) - 4(n-k) \geq 0$$

$$\underbrace{(n-k)}_{\geq 0 \text{ perché } r+c \leq 2}\ \underbrace{(n+k-4)}_{\geq 0 \text{ perché } n \geq 4} \geq 0$$

—o—o—

Altra forse idea: casella 1 volta $\geq 2n$

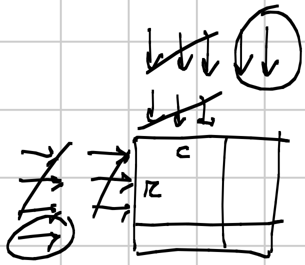
Caselle 1 volta: $n \cdot c + n \cdot r - 2rc \overset{?}{\geq} 2n$



0   1

$\boxed{n}$ $n(n-1)$

$\boxed{n}$



$$\min\{r, c\} \leq \frac{n}{2}$$

w log $r \leq \frac{n}{2}$

$$r \cdot n + c\underbrace{(n-2r)}_{\geq 0} \overset{?}{\geq} 2n$$

$rn \geq 2n$ $r \geq 2$

rimane il caso $r = 1$

$$n \cdot c + \cancel{n} - 2c \overset{?}{\geq} \cancel{2}n$$

$c \geq \frac{n}{n-2}$ $n = 1, 2, 3$

$n \geq 4$

$c \geq 2 \geq \frac{n}{n-2}$

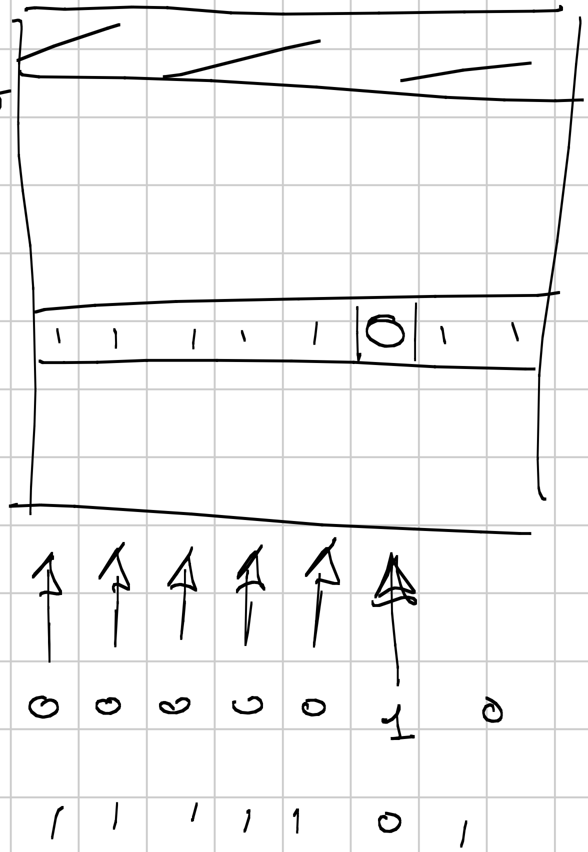
$c = 1$ $r = 1$ $c = 1$

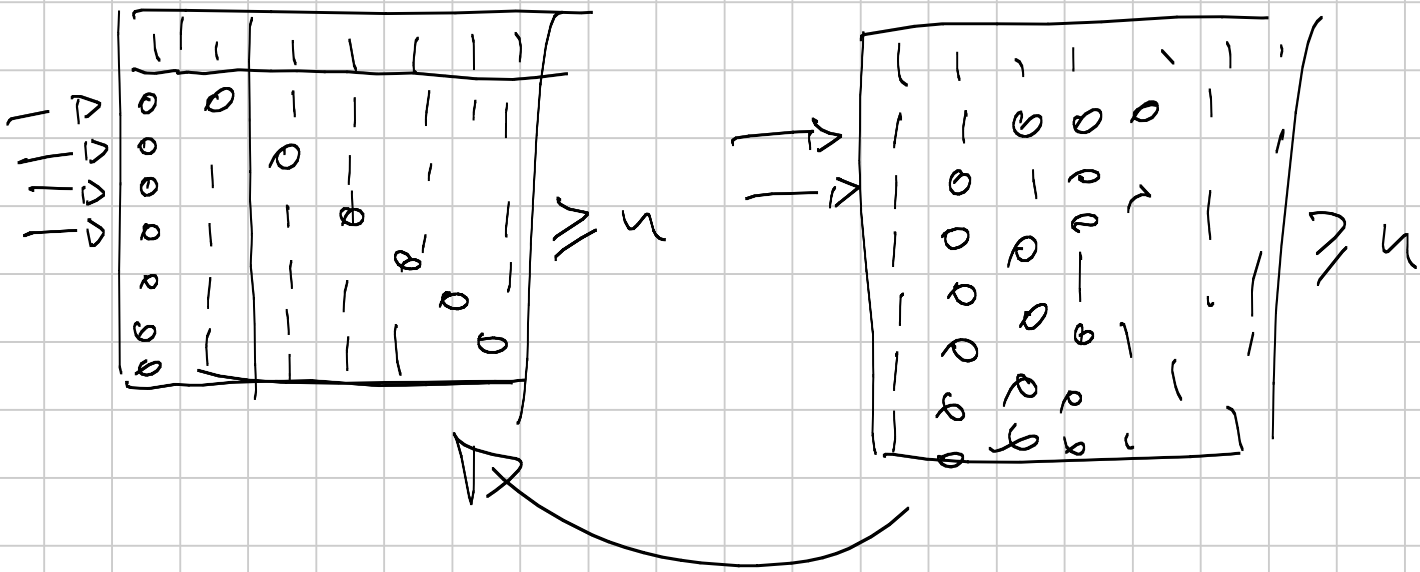
Caso I: alla fine tutte le righe hanno ≥ 1 zero

$\Downarrow$

almeno n zeri

Caso II: Alla fine ho una riga senza zeri



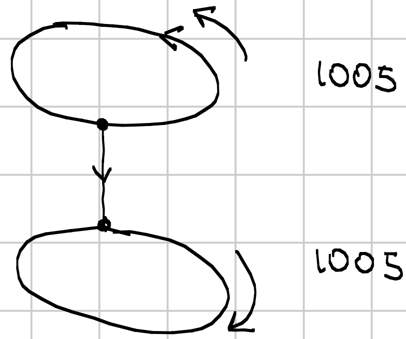


Problema 5 Grafo orientato connesso minimale (connesso nei 2 sensi).

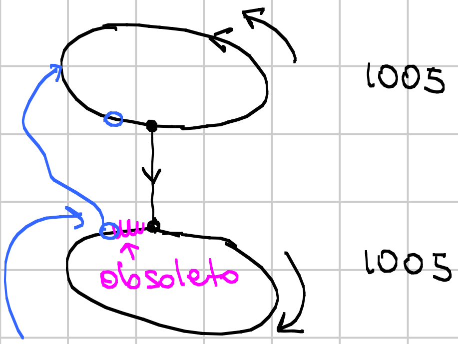
Risposta $= 1004^2$

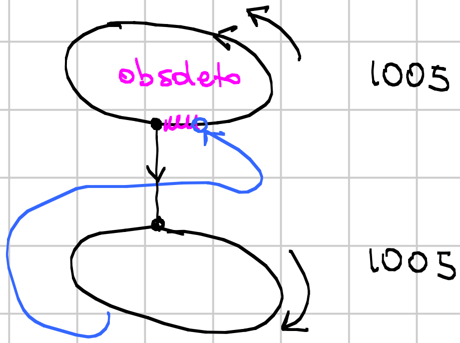
Esempio

Posso aggiungere un arco in 1004^2 rendendolo connesso minimale.



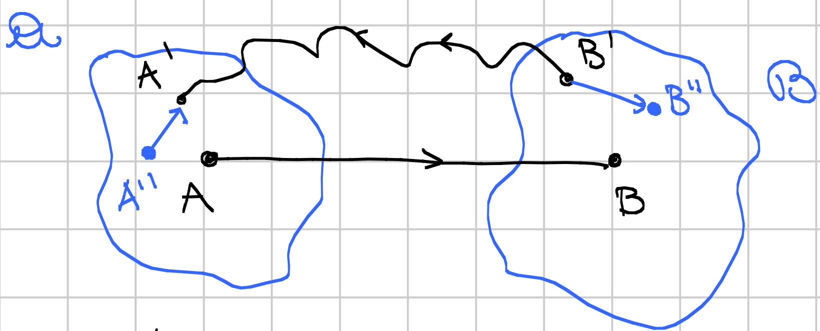
Deve essere da giù a su





Nessun arco da qui

Si verifica che ogni altro arco sotto → sopra va bene



Cancelliamo $A \to B$

$\mathcal{A}$ = p.ti raggiunti da A $\qquad$ $\mathcal{B}$ = p.ti che vanno in B

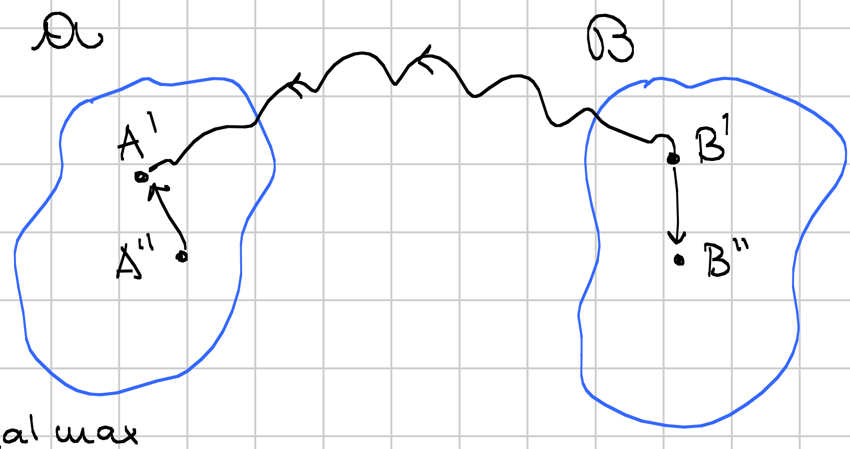
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ perchè altrimenti potevo cancellare $A \to B$ senza problemi

$a = |\mathcal{A}| \qquad b = |\mathcal{B}|$

Oss. 2 Non ci sono collegamenti $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

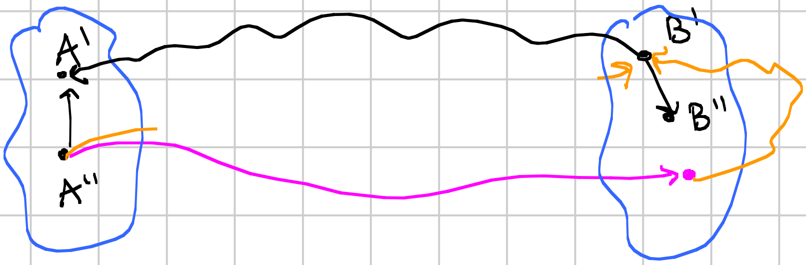
Oss. Esiste un collegamento, anche multiplo, tra un elemento $B' \in \mathcal{B}$ ed uno $A' \in \mathcal{A}$.

O siamo nel caso banale in cui $\mathcal{A} = \{A\}$ o $\mathcal{B} = \{B\}$
e allora ci sono pochi voli possibili (≤ 2008).
Altrimenti $B' \neq B$, $A' \neq A$.
Quindi esistono A'' = penultima tappa del percorso $A \to A'$
B'' = prima tappa del percorso $B' \to B$



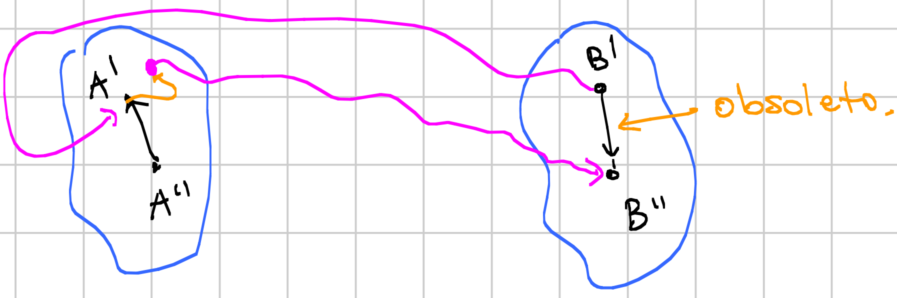
Posso fare al max ogni collegamento possibile tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ purché non parta da A'' e non arrivi in B'' $\Rightarrow$ sono al più

$(a-1)(b-1) \leq 1004^2$



Oss. 3 $\mathcal{B}$ in qualche modo è connesso

Se c'è un volo da A'', il tratto $A'' \to A'$ è obsoleto



Problema 6

$m_1 \le m_2 \le \dots \le m_n$ $\qquad m_1 \ge 25$

- $m_1 \le 75$

$\boxed{m_1}$ - - - - m_k $\qquad$ -1 persona

$\boxed{100 - m_1}$ $\qquad$ -1 mela

$m_k + m_1 - 100$

Controllare $\quad 100 - m_1 \ge 25 \quad m_1 \le 75$

$m_k + m_1 - 100 \ge 25 \quad m_k + m_1 \ge 125$

$\ge 100 \quad \ge 25$

90	90	90	101	101	101	101
$\boxed{25}$	35	$\boxed{45}$				$\boxed{30}$
65	$\boxed{55}$	$\boxed{45}$				71

-3 persone

-3 mele

Bisogna dim. che funziona

m_1	m_2	m_3
25	$\boxed{125 - m_1}$	$\boxed{225 - m_1 - m_2}$
$\boxed{m_1 - 25}$	$\boxed{m_2 + m_1 - 125}$	$m_1 + m_2 + m_3 - 225$

Devo controllare al passo k

$$100k + 25 - (m_1 + \dots + m_k) \ge 25$$

$$\Longleftrightarrow \quad m_1 + \dots + m_k \le 100k \qquad \text{gratis}$$

$$m_1 + \dots + m_k - 100k + 75 \ge 25$$

$$m_1 + \dots + m_k \ge 100k - 50$$

Fino al passaggio precedente

$$m_1 + \dots + m_{k-1} \ge 100(k-1) - 25 = 100k - 125$$

$$m_k \ge 75 \qquad \text{e sommo.}$$

Chiamo n-buono un insieme di k mele t.c.

- $m_1 + \dots + m_k = 100n$
- $m_1 \geq 25$
- $k = n$ oppure $k = n+1$

$m_1 = 25$

$m_2 \leq 75$

$m_3 > 75$

<u>Teorema</u> Un insieme n-buono è n-divisibile nel senso di Ludovico.