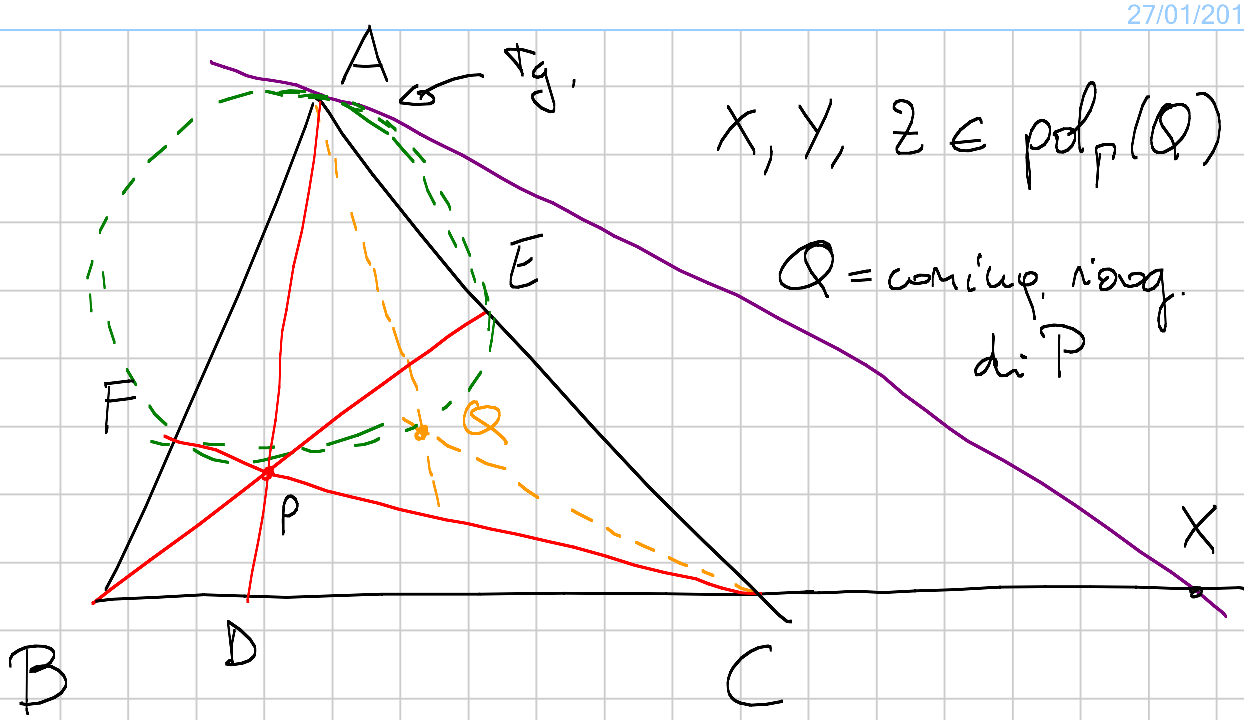
WC 2011 - Geometria contosa

Titolo nota 27/01/2011

7)



$X, Y, Z \in pol_P(Q)$

Q = coniug. isog. di P

Possibilità I: • caratterizzare X in altro modo
= senza circonferenze
• pol = retta per l'inverso $\perp$ alla retta per O
• fare qualche conto

Ricordare!: se $P = [x : y : z]$ baricentriche

$$x = \frac{[BPC]}{[BAC]} \qquad y = \frac{[CPA]}{[CBA]} \qquad z = \frac{[APB]}{[ACB]}$$

$$\vec{P} = \frac{x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}}{x+y+z} \quad \Leftarrow$$

Conto: $P_1 = [x_1 : y_1 : z_1]$ $\qquad P_2 = [x_2 : y_2 : z_2]$

$x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$

$\vec{P_1} = x_1\vec{A} + \cancel{y_2} y_1\vec{B} + z_1\vec{C} \qquad \vec{P_2} = x_2\vec{A} + y_2\vec{B} + z_2\vec{C}$

$$\|\vec{P_1}-\vec{P_2}\|^2 = \|\vec{A}(x_1-x_2)+\vec{B}(y_1-y_2)+\vec{C}(z_1-z_2)\|^2 =$$

$$= 2S\left[S_\alpha (x_1-x_2)^2 + S_\beta (y_1-y_2)^2 + S_\gamma (z_1-z_2)^2\right]$$

dove $S = \text{area}(ABC)$

$S_\alpha = \cot\hat{A} \quad S_\beta = \cot\hat{B} \quad S_\gamma = \cot\hat{C}$

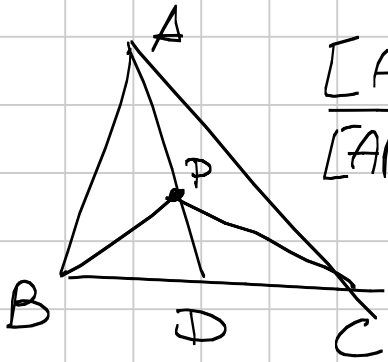
$\{X \mid d(P,X) = r\}$ $\boxed{a^2yz+b^2xz+c^2xy = (x+y+z)(\lambda x+\mu y+\nu z)}$

Oss: λ, μ, ν sono (a meno di un multiplo) le potenze di A, B, C rispetto alla $\mathcal{C}_r$

Possibilità II: ∘ fare i conti.

$A=[1:0:0] \qquad B=[0:1:0] \qquad C=[0:0:1]$

$P=[u:v:w]$



$$\frac{[APB]}{[APC]} = \frac{[ADB]}{[ADC]}$$

$D=[0:v:w]$

$E=[u:0:w]$

$F=[u:v:0]$

$\mathcal{C}_r$ per A, E, F: $c^2xy+b^2xz+a^2yz = (x+y+z)(\lambda x+\mu y+\nu z)$

$A=[1:0:0] \qquad 0 = 1(\lambda) \implies \lambda = 0$

$E=[u:0:w] \qquad b^2uw = (u+w)(\cancel{\lambda u}+\nu w)$

$$\nu = \frac{b^2 u}{u+w}$$

$F = [\cancel{u} : v : 0]$ $\quad c^2 u v = (u+v)(\lambda \cancel{w} + \mu v)$

$$\mu = \frac{c^2 u}{u+v}$$

Γ_{AEF}

$$c^2 xy + b^2 xz + a^2 yz = (x+y+z)\left(\frac{c^2 u}{u+v} y + \frac{b^2 u}{u+w} z\right)$$

<u>Inciso scolastico</u> : $x^2 + 2y^2 - 3xy + 2y - 2x + 1 = 0$

t_g in (x_0, y_0) $\quad x \cdot x + 2y \cdot y - \frac{3}{2} xy - \frac{3}{2} xy + y + y - x - x + 1 = 0$

(x_0, y_0) $\quad x_0 \cdot x + 2 y_0 \cdot y - \frac{3}{2} x_0 y - \frac{3}{2} x y_0 + y + y_0 - x - x_0 + 1 = 0$

$A = [1:0:0]$

t_g in A

BC

$$\begin{cases} \frac{c^2}{\cancel{2}} y + \frac{b^2}{\cancel{2}} z = \frac{c^2 u}{\cancel{2}(u+v)} y + \frac{b^2 u}{\cancel{2}(u+w)} z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y\, c^2 \left(\frac{\cancel{u} + v - \cancel{u}}{u+v}\right) + z\, b^2 \left(\frac{\cancel{u} + w - \cancel{u}}{u+w}\right) = 0$$

$$y \frac{c^2 v}{u+v} = - z \frac{b^2 w}{u+w}.$$

$$\left[0 : -\frac{b^2 w}{u+w} : \frac{c^2 v}{u+v}\right] = X$$

Q = coniug. isog di $P = \left[\frac{a^2}{u} : \frac{b^2}{v} : \frac{c^2}{w}\right]$

$$\Gamma_{ABC} = \{ a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy = 0 \}$$

$$\frac{a^2}{\cancel{2}}\left(\frac{b^2}{v}z+\frac{c^2}{w}y\right)+\frac{b^2}{\cancel{2}}\left(\frac{a^2}{u}z+\frac{c^2}{w}x\right)+\frac{c^2}{\cancel{2}}\left(\frac{a^2}{u}y+\frac{b^2}{v}x\right)=0$$

pol$_P$ Q con lo sdoppiamento

$$x\left(\frac{b^2c^2}{w}+\frac{b^2c^2}{v}\right)+y\left(\frac{a^2c^2}{w}+\frac{a^2c^2}{u}\right)+z\left(\frac{a^2b^2}{u}+\frac{a^2b^2}{v}\right)=0$$

$$\underbrace{x\,b^2c^2\left(\frac{w+v}{wv}\right)}_{0}+y\,a^2c^2\left(\frac{w+u}{uw}\right)+z\,a^2b^2\left(\frac{u+v}{uv}\right)=0$$

$$\left[0:-\frac{b^2w}{u+w}:\frac{c^2v}{u+v}\right]=X$$

$$-\frac{b^2a^2c^2}{u}+\frac{a^2b^2c^2}{u}=0$$

b) • $f(M)=x\,MA^2+y\,MB^2+z\,MC^2$

$$(x+y+z)\,f(M)\geq(yza^2+xzb^2+xyc^2)$$

(1°) $x+y+z\neq 0$ $\quad P=x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}$

WLOG! $x+y+z=1$

$$f(P)=x\,PA^2+y\,PB^2+z\,PC^2=$$

$$=x\,\|P-A\|^2+y\,\|P-B\|^2+z\,\|P-C\|^2=$$

$$=x\,\|(x-1)A+yB+zC\|^2+\ldots=$$

$$=x\,\|(-y-z)A+yB+zC\|^2+\ldots=$$

$$= x \, \| y(B-A) + z(C-A) \|^2 + \dots\dots =$$

$$= x\left(y^2 c^2 + z^2 b^2 + 2yz\,(B-A,\, C-A) \right) + \dots\dots =$$

$$= x\left(y^2 c^2 + z^2 b^2 + yz\,(c^2 + b^2 - a^2) \right) + \dots\dots =$$

$$= x y^2 c^2 + x z^2 b^2 + xyz(c^2 + b^2 - a^2) + y x^2 c^2 + y z^2 a^2 +$$

$$+ xyz(a^2 + c^2 - b^2) + z x^2 b^2 + z y^2 a^2 + xyz(a^2 + b^2 - c^2) = \dots$$

$$\dots = (xy c^2 + yz a^2 + xz b^2)\underbrace{(x+y+z)}_{=1}$$

$$f(\Pi) = x\, \Pi A^2 + y\, \Pi B^2 + z\, \Pi C^2 =$$

$$x \| \vec{PA} - \vec{P\Pi} \|^2 + y \| \vec{PB} - \vec{P\Pi} \|^2 + z \| \vec{PC} - \vec{P\Pi} \|^2 =$$

$$= x PA^2 + y PB^2 + z PC^2 + (x+y+z) P\Pi^2 - \cancel{2(\vec{P\Pi},\, \underbrace{x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC}}_{=0})} =$$

$$= f(P) + \underbrace{(x+y+z)}_{=1} P\Pi^2$$

$$P\Pi^2 + f(P) \geq f(P) \qquad \underline{\text{vera!}}$$

(I) $f(P) = (yz a^2 + xz b^2 + xy c^2)/(x+y+z)$

$$f(\Pi) = f(P) + P\Pi^2 (x+y+z)$$

$x+y+z=0 \qquad 0 \geq yza^2+xzb^2+xyc^2$ è facile.

(a) Π generico $\quad x=y=z=1$

$$\Pi A^2+\Pi B^2+\Pi C^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = AG^2+BG^2+CG^2$$

(b) $\Pi = O \quad x=y=z=1$

$$(3)(3R^2) \geq a^2+b^2+c^2$$

(c) $\Pi = O \quad x=a,\ y=b,\ z=c$

$$(a+b+c)(a+b+c)R^2 \geq bca^2+acb^2+abc^2$$

$$(a+b+c)^{\cancel{2}}R^2 \geq \cancel{(a+b+c)}\,abc$$

$$R \geq \frac{abc}{R}\,\frac{1}{(a+b+c)} = 2r$$

(d) $x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2 \quad \Pi = O$

$$(a^2+b^2+c^2)^2R^2 \geq 3a^2b^2c^2$$

$$\left(\sum a^2\right)^2 \geq 3\,\underbrace{\frac{a^2b^2c^2}{R^2}}_{=16S^2} \longrightarrow \sum a^2 \geq \sqrt{3}\,4S$$

(e) $a m_a^2 + b m_b^2 + c m_c^2 =$

$$= a\left(\frac{-a^2+2b^2+2c^2}{4}\right) + b\left(\frac{-b^2+2a^2+2c^2}{4}\right) + c\ \text{----} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-a^3+2ab^2+2ac^2-b^3+2ba^2+2bc^2-c^3+2ca^2+2cb^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 3(a^3+b^3+c^3)\right)$$

$$\Pi = G \qquad x=a \qquad y=b \qquad z=c$$

$$\cancel{(a+b+c)}\,(a\,AG^2 + b\,BG^2 + c\,CG^2) \geq abc\,\cancel{(a+b+c)}$$

$$\frac{\cancel{4}}{9}\left(\frac{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{\cancel{4}} - \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{\cancel{4}}\right) \geq abc$$

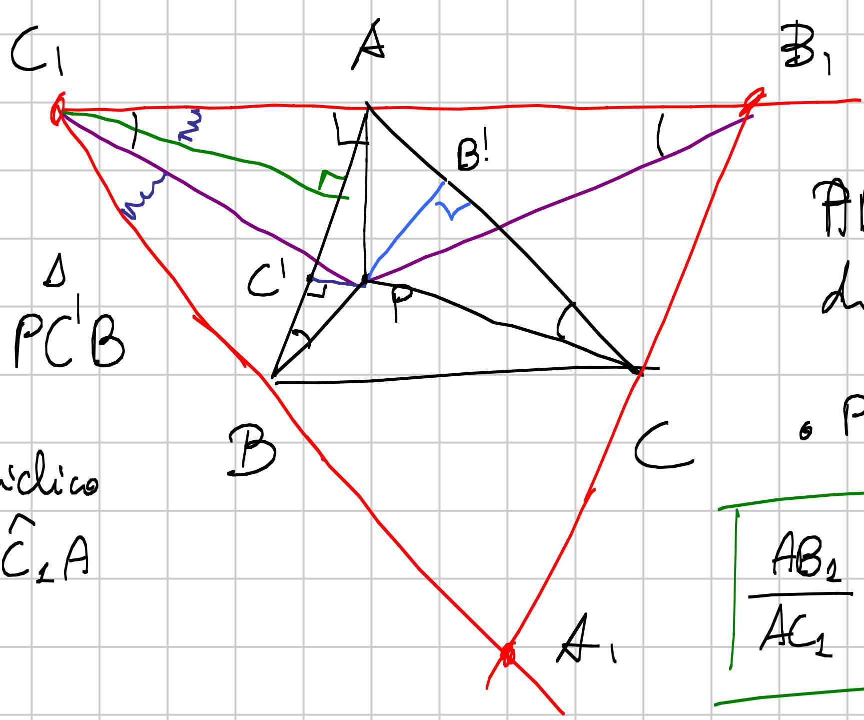
(f) $\dfrac{(p-a)bc}{p} = AI^2$

$$x = \frac{1}{b^2}, \quad y = \frac{1}{c^2}, \quad z = \frac{1}{a^2} \qquad \Pi = I \qquad 1$$

$$\left(\frac{AI^2}{b^2} + \frac{BI^2}{c^2} + \frac{CI^2}{a^2}\right)\cancel{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)} \geq \cancel{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$$

— o0o —

g)



ABC = Tri pedale di P in $A_1B_1C_1$

- $\overset{\Delta}{PAC_1} \sim \overset{\Delta}{PC'B}$

C_1BPA ciclico

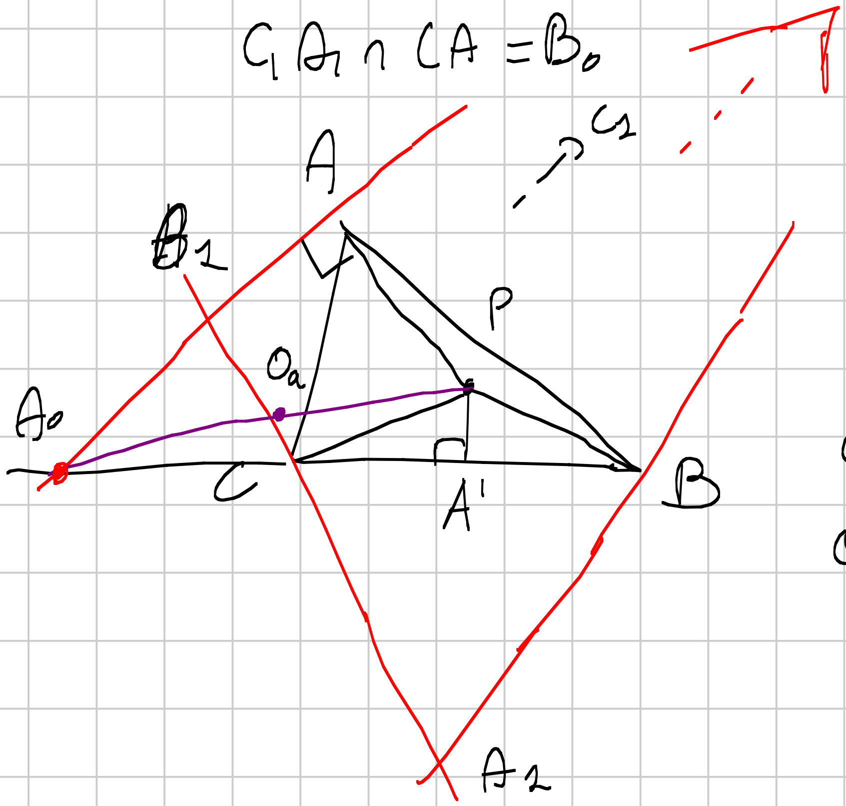
$P\hat{B}C' = P\hat{C_1}A$

- $\overset{\Delta}{PAB_1} \sim \overset{\Delta}{PB'C}$

$$\boxed{\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{PC'}{PB'} \cdot \frac{CB'}{BC'}}$$

- Con Ceva A_1A, B_1B, C_1C concorrono in R

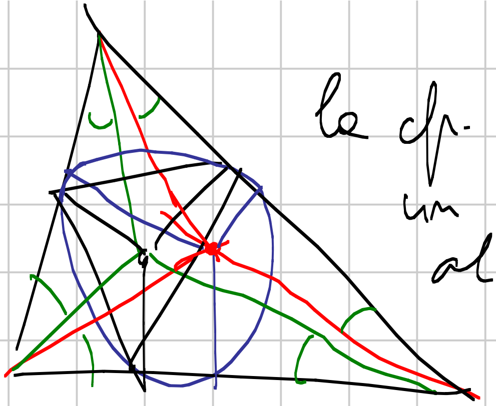
- $\Rightarrow$ (Desargues) $A_1B_1 \cap AB = C_0$
$B_1C_1 \cap BC = A_0$
$C_1A_1 \cap CA = B_0$
sono allineati su r



O_a = centro cfr A, P, A'
e pt. medio di PA_0
O_b = pt. m. di PB_0
O_c = pt m. di PC_0

$\Rightarrow$ O_a, O_b, O_c allineati. $\Rightarrow$ le cfr sono coassiali
$\Rightarrow$ $\exists$ un secondo punto in comune oltre P
sia P'!

- Le $\perp$ da A_1, B_1, C_1 a BC, CA, AB concorrono
(Trig.-Ceva in $\overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$) in un punto P_1
che è coniug. isog. di P in $\overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$



la sf. circo al Tr. pedale di un punto è circo. anche al Tr. pedale del suo coniug. isogonale

$\Rightarrow$ la sf. circo ad ABC passa per le proiez di P_1 e il centro O è il pt medio di PP_1

④ retta per i centri delle 3 sf. è $// \overline{A_0B_0C_0}$ = prospettiva tra $\overset{\triangle}{ABC}$ e $A_1\overset{\triangle}{B_1}C_1$

⑤ la corda comune alle 3 sf. è $\perp \overline{A_0B_0C_0}$ e passa per P

⑥ $A_1B_1C_1$ e ABC sono ortologici

Teo Sondat: la congiungente dei centri ortologici di due triangoli ortologici e prospettivi è perpendicolare all'asse perspettico. (prospettico)

ABC e $A_1B_1C_1$ sono
- ortologici con centri P, P_1
- prospettivi con asse $A_0B_0C_0$

$\Rightarrow PP_1 \perp \overline{A_0B_0C_0}$ $\qquad O \in PP_1$

anche PR è $\perp \overline{A_0B_0C_0}$ e $PR \ni P$

$\Rightarrow P, P_1, R$ sono all.

$\Rightarrow O, P, R$ sono all.