WC 2011 — MISCELLANEA

Titolo nota 28/01/2011

Problema 9 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y)$$

$\boxed{y=0 \quad f(0)=a}$ $\quad \cancel{f(x)} + a f(x) = a + \cancel{f(x)} + ax + a$

$$a f(x) = a(x+2)$$

$\boxed{x=0}$ $\quad a^2 = 2a \Rightarrow a=0$ oppure $\boxed{a=2}$

$\downarrow f(x) = x+2$

sostituendo non va bene

D'ora in poi $f(0)=0$

$\boxed{y=1}$ $\boxed{f(1)=b}$ $\quad f(x+1) + b f(x) = f(x) + 2f(x) + b(x+1)$

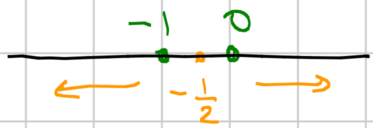
$$\boxed{f(x+1) = (3-b)f(x) + b(x+1)} \quad A$$

$\boxed{x=-1}$ $\quad 0 = (3-b)f(-1) \Rightarrow b=3$ opp. $f(-1)=0$

Se $b=3$ $\quad f(x+1) = 3(x+1) \Rightarrow \boxed{f(x)=3x}$ VERIFICA OK! sostituire

D'ora in poi $f(-1)=0$

$\boxed{y=-1}$ $\quad \overset{B}{\boxed{f(x-1) = f(-x)}} \quad \overset{C}{\boxed{f(x) = f(-1-x)}}$



$f(x) \overset{C}{\rightsquigarrow} f(-1-x) \overset{A}{\rightsquigarrow} f(-x) \overset{B}{\rightsquigarrow} f(x-1) \overset{A}{\rightsquigarrow} f(x)$

$f(-1-x) = f(x)$

$$f(-x) = f((-1-x)+1) = (3-b)f(-1-x) + b(-1-x+1)$$
$$= (3-b)f(x) - bx = f(x-1)$$

$$f(x) = f((x-1)+1) = (3-b)f(x-1) + b(x-1+1)$$
$$= (3-b)[(3-b)f(x) - bx] + bx$$
$$= (3-b)^2 f(x) - b(3-b)x + bx$$

$$\boxed{f(x) = (3-b)^2 f(x) + b(b-2)x}$$

Due casi: se $(3-b)^2 \neq 1$, cioè $b \neq 2, 4$ ottengo $f(x) = \lambda x$

Sostituisco nell' eq. funz. e trovo che $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$

$\boxed{f(x) \equiv 0 \quad 2^a \text{ soluzione}}$

Se $b = 4$ $\qquad \cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + 8x$ $\quad$ impossibile

Resta $b=2$ in cui A diventa: $\boxed{f(x+1) = f(x) + 2x + 2}$

da cui $\quad f(x) = f(x-1) + 2x$

$$\boxed{f(x-1) = f(x) - 2x}$$

$(x, x) \qquad (x-1, x+1)$

$$f(2x) + [f(x)]^2 = f(x^2) + 2(x+1) f(x)$$

$$f(2x) + [f(x)]^2 = f(x^2) + 2x f(x) + 2 f(x) \qquad \boxed{x, x}$$

$$f(2x) + f(x-1) f(x+1) = f(x^2-1) + (x+2) f(x-1) + x f(x+1)$$

$$f(2x) + (f(x) - 2x)(f(x) + 2x + 2) = f(x^2) - 2x^2 + (x+2)(f(x) - 2x) + x(f(x) + 2x + 2)$$

$$f(2x) + [f(x)]^2 + \cancel{2x f(x)} + 2 f(x) - \cancel{2x f(x)} - \cancel{4}x^2 - \cancel{4x} =$$

$$= f(x^2) - \cancel{2x^2} + x f(x) - \cancel{2x^2} + \cancel{2 f(x)} - \cancel{4x} + x f(x) + 2x^2 + 2x$$

$$f(2x) + [f(x)]^2 = f(x^2) + 2x f(x) + 2x^2 + 2x \qquad \boxed{x-1, x+1}$$

Sottraendo le 2 segnate: $\boxed{f(x) = x^2 + x}$ $\quad 3^a$ soluzione! fare verifica

— o — o —

Problema 8 Fissato k intero positivo. Trovare minimo d t.c.

$\forall$ scelta di $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ a 3 a 3 non all.
$\forall$ scelta di $c_1, \dots, c_k$
$\exists$ $p(x,y)$ di grado $\leq d$ tale che $P(x_i, y_i) = c_i$ $\forall i = 1, \dots, k$.

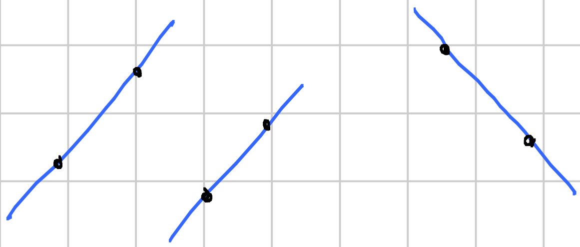
In dimensione 1, dati $(k+1)$ valori $x_1, \dots, x_{k+1}$ e dati $c_1, \dots, c_{k+1}$ esiste polinomio $p(x)$ di grado $\leq k$ che li prende. Con grado minore in generale non si fa.

Oss. dalla dimensione 1 Se so risolvere con

$$(c_1, \dots, c_k) = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-esimo}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots, 0)$$

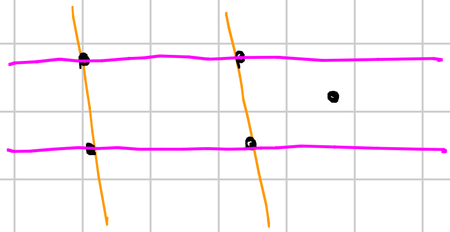
so risolvere sempre. Vale anche in dim. 2.

Obiettivo: trovare $p(x,y)$ che si annulla in $k-1$ p.ti, ma non nel restante.



Basta accoppiare a 2 a 2 e scrivere e moltiplicare le eq. delle rette.
Così ci riesco con $d \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$

Oss. Per 5 p.ti passa sempre una conica



$a\, p_1(x,y) + b\, p_2(x,y)$
scegliendo bene a e b riesco a passare per l'altro.

Se i p.ti originari fossero a 6 a 6 non su una conica, allora riuscirei con $d \leq \frac{2}{5} k$ (opportunamente corretto)

(In realtà non serve per questa disuguaglianza il "6 a 6").

Retta $\rightsquigarrow$ 3 coeff. a meno di multipli $\rightsquigarrow$ 2 p.ti
Conica $\rightsquigarrow$ 6 " " $\rightsquigarrow$ 5 p.ti
Cubica $\rightsquigarrow$ 10 coeff -- $\rightsquigarrow$ 9 p.ti
grado H $\rightsquigarrow$ $\binom{H+2}{2}$ coeff.

—o—o—

Idea: mostrare che $d \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ prendendo k p.ti su una conica.

Prendo (i, i^2) con $i = 1, \dots, k$
So che esiste un polinomio $p(x,y)$ che si annulla in $k-1$ di questi, ma non nel restante.
$\Rightarrow$ $p(x,x^2)$ ha $k-1$ radici e non è identicamente nullo
" $q(x)$.
Allora grado $(q(x)) \geq k-1$. D'altra parte grado $(q(x)) \leq 2d$
Quindi

$$2d \geq k-1 \quad \Rightarrow \quad d \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

—o—o—

<u>Oss. generale</u> Se $p(x,y)$ si annulla su $y = x^2$, allora
$$p(x,y) = (y-x^2)\, q(x,y)$$
Per concludere questo basta che si annulli in $2d+1$ p.ti della parabola, dove $d = \text{grado}(p(x,y))$

Posso vedere $p(x,y)$ come un polinomio in y a coeff. che sono polinomi in x. Essendo $y-x^2$ monico (nella variabile y) posso dividere con resto

$$p(x,y) = (y-x^2)\, Q(x,y) + \underbrace{R(x,y)}_{\substack{\text{grado } 0 \text{ in } y \\ R(x)}} \qquad \text{SEMPRE}$$

Ora $R(x) = P(x,x^2)$, quindi ha grado $\leq 2d$ in x.
Se si annulla in $(2d+1)$ p.ti (che avranno x distinte), allora $R(x) \equiv 0$

—o—o—

Problema 7 $|X| = n$ $\quad \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$ t.c. si verifica

$$A \cap B \not\subseteq C \qquad \forall A, B, C \in \dots \text{ distinti}$$

(a) Se hanno tutti cardinalità k, allora $|\mathcal{Y}| \leq \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + 1$

Oss. fond. Considero le intersezioni a 2 a 2

$$A \cap B \quad : A \in \mathcal{Y}, B \in \mathcal{Y}, \ A \neq B.$$

Allora tra queste intersezioni non vi sono relazioni di $\subseteq$.
Se infatti fosse

$$A \cap B \subseteq C \cap D \quad \begin{matrix} \subseteq C \\ \subseteq D \end{matrix}$$

almeno 1 è diverso da A, B.

Fisso ora un elemento $A \in \mathcal{Y}$. Allora $A \cap B$, al variare di B in $\mathcal{Y}$, $B \neq A$, sono $|\mathcal{Y}| - 1$ sottoinsiemi di A senza relazioni di $\subseteq$.

Teorema di Sperner $|Y| = n$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ senza relazioni $\subseteq$.
Allora

$$|\mathcal{Y}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

con uguaglianza quando $\mathcal{Y}$ = sottoinsiemi (tutti) di $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elementi

Teorema di Sperner $\Rightarrow$ p.to (a).

— o — o —

$\boxed{\text{p.to (b)}}$ Tutte le intersezioni a 2 a 2 sono sottoinsiemi di X senza relazioni, quindi

$$\underbrace{\binom{|\mathcal{Y}|}{2}}_{\text{tutte le intersezioni}} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Da qui si ottiene stima su $|\mathcal{Y}| = m$. Stima facile

$$m \leq 2 \sqrt{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

Il che riduce il problema a

$$4\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}^2$$

1° modo: per induzione

2° modo:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} = \underbrace{\boxed{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor+1)}{1\cdot 2 \quad \cdot \lfloor \frac{n}{4}\rfloor}}}_{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{(n-\lfloor\frac{n}{4}\rfloor)\cdot\ldots\cdot(n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1)}{(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor+1)\cdot\ldots\cdot\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}}_{\le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{4}\rfloor}}$$

Resta solo da guadagnare il fattore 4 ... e chiarire le parti intere

—o—o—

$\boxed{\text{Sperner 1}}$ Sia $\mathcal{Y}$ famiglia senza $\subseteq$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $|X| = n$

$$\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \quad \text{per ogni } k = 0, 1, \ldots, n$$

c_k = elementi di $\mathcal{Y}$ con k elementi

$$|\mathcal{Y}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \sum \frac{c_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \cdot \underbrace{\boxed{\sum \frac{c_k}{\binom{n}{k}}}}_{\le 1} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$$

↑ Hope

$$\text{Hope} \iff \sum c_k \frac{k!\,(n-k)!}{n!} \le 1 \iff \sum c_k\, k!\,(n-k)! \le n!$$

$X = \{1, \ldots, n\}$ $\quad n!$ = tutte le permutazioni.

Ad ogni elemento $A \in \mathcal{Y}$ associo delle permutazioni

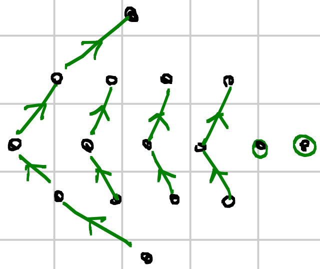
$$\Big(\underbrace{1\ 2\ 3\ 4}_{\text{el. di } A} \ \underbrace{\ldots\ n}_{\text{gli altri}}\Big)$$

se $|A| = k$ lo posso fare in $k!\,(n-k)!$ modi

Devo solo verificare che A diversi producono permutazioni diverse. Se A ha h elementi e B ha $k+h$ elementi, $k \geq 0$
allora i primi h elementi stanno in A,
ma anche in B se la permutazione è la stessa.

—o —o —

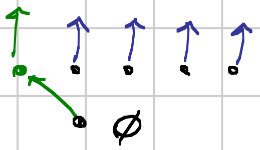
<u>Sperner 2</u> $\boxed{n=4}$



4 elementi
3 el.
2 "
1 el.
$\emptyset$

Se riesco a suddividere tutto $\mathcal{P}(X)$ in $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ catene ho finito

perché $\mathcal{Y}$ ha al più un elemento in ogni catena.
Si dimostra l'esistenza di questa suddivisione usando il Lemma dei matrimoni. Parto dal basso



$\emptyset$

Per completare la costruzione serve, $\forall k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ una funzione dai sottoinsiemi di k el. in quelli di $k+1$ el. che sia iniettiva

Per l'esistenza di tale funzione serve lemma matrimoni.

Ho $B = \{\text{boys}\}$ e $G = \{\text{girls}\}$.
$\forall b \in B \; \exists \; g(b) \subseteq G$ = ragazze che piacciono a b.
Obiettivo: trovare $f: B \to G$ t.c. $f(b) \in g(b) \; \forall b \in B$.

Lemma: l'obiettivo è raggiungibile $\Longleftrightarrow$

$$\forall B' \subseteq B \quad \underbrace{\left| \bigcup_{b \in B'} g(b) \right|}_{\text{unione ragazze che vanno bene ad almeno uno in } B'} \geq |B'|$$