Winter Camp 2012

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

ALGEBRA WINTER CAMP 2012 F.M.

Titolo nota 26/01/2012

$\boxed{4}$ $$\sum_{cyc} \frac{1}{x+y^{20}+z^{12}} \leq 1 \qquad x,y,z>0 \qquad xyz=1$$

$$\frac{1}{x+y^{20}+z^{12}} \leq \frac{x^{2c-1}+y^{2c-20}+z^{2c-12}}{(x^c+y^c+z^c)^2}$$

$$\left(\sum ax\right)^2 \leq \sum a^2 \sum x^2$$

$$\frac{1}{\sum x^2} \leq \frac{\sum a^2}{(\sum ax)^2}$$

$$\sum_c \frac{1}{x+y^{20}+z^{12}} \leq \sum_c \frac{x^{2c-1}+y^{2c-20}+z^{2c-12}}{(x^c+y^c+z^c)^2} = \frac{\sum_c \left(x^{2c-1}+x^{2c-20}+x^{2c-12}\right)}{\left(\sum_c x^c\right)^2} \overset{?}{\leq} 1$$

$$(xyz)^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_s x^{2c-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}} + \boxed{\frac{1}{2}\sum_s x^{2c-\frac{2}{3}20} y^{\frac{1}{3}20} z^{\frac{1}{3}20}} + \boxed{\frac{1}{2}\sum_3 x^{2c-8} y^4 z^4} \overset{?}{\leq}$$

$$(x^c+y^c+z^c)^2 = \boxed{\frac{1}{2}\sum_s x^{2c}} + \boxed{\frac{1}{2}\sum_s x^c y^c} + \boxed{\frac{1}{2}\sum_s x^c y^c}$$

$c \geq 2c - \frac{40}{3}$ $\qquad$ $c \geq \frac{20}{3}$ $\qquad$ $\frac{20}{3} \leq c \leq \frac{40}{3}$

$c \geq 2c - 8$ $\qquad$ $c \geq 4$ $\qquad$ $4 \leq c \leq 8$

Va bene $\qquad$ $c \in \left[\frac{20}{3} ; 8\right]$

$\boxed{5}$ IRAN 1996

$a,b,c>0 \qquad (ab+bc+ca)\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4}$

omogenea ciclica + simmetrica → bunching + Schur

$\text{LHS} = 4\sum_c ab\sum_c (a+b)^2(b+c)^2 - 9\prod_c (a+b)^2 \overset{?}{\geq} 0$

$4\sum_c (a^2+b^2+2ab)(b^2+c^2+2bc)(ab+bc+ca)$

$2\cancel{4}\sum_{\cancel{c}\,s} (a^2c^2+b^4+b^2a^2+b^2c^2+2ab^3+2abc^2+4ab^2c+2a^2bc+2b^3c)(ab+bc+ca)$

$2\sum_s \left(a^3bc^2+a^3c^3+ab^5+b^4ca+a^4b^2+a^2b^2c^2\right)$

26	3	2	5	4	8

a b
b c
c a

$3\prod_c(a+b) = 3\left(2abc+\sum_s a^2b\right) = \sum_s abc + 3\sum_s a^2b$

$9\prod_c(a+b)^2 = 36a^2b^2c^2 + 36\sum_s a^3b^2c + 9\sum_s a^2b\left(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\right)$

$= 6\sum_s a^2b^2c^2 + 36\sum_s a^3b^2c + 9\sum_s\left(a^4b^2+a^4bc+a^3b^3+2a^3b^2c+a^2b^2c^2\right)$

$= \sum_s\left(15a^2b^2c^2+54a^3b^2c+9a^4b^2+9a^4bc+9a^3b^3\right)$

$\text{LHS} = \sum_s\left(-2a^3b^2c-3a^3c^3+4a^5b+a^4bc-a^4b^2+a^2b^2c^2\right) \overset{?}{\geq} 0$

$\underline{4\sum_s a^5b} + \sum_s a^4bc + \sum_s a^2b^2c^2 \overset{?}{\geq} 2\sum_s a^3b^2c + \underline{3\sum_s a^3b^3} + \underline{\sum_s a^4b^2}$

$$\sum_s a^3 + \sum_s abc \overset{?}{\geq} 2\sum_s a^2 b \qquad \text{SCHUR}$$

$$p = ab+bc+ca$$

$$(a+b)(b+c) = b^2 + p$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)p - abc$$

$$4p\left(\sum (b^2+p)^2\right) \geq 9\Big(\underbrace{(a+b+c)p - abc}\Big)^2$$

$$9p\Big((a+b+c)^2 p - 2abc(a+b+c)\Big) + 9a^2b^2c^2$$

$$p\Big(\overbrace{4\sum (b^2+p)^2 - 9(a+b+c)^2 p + 18abc(a+b+c)}\Big) \geq 9a^2b^2c^2$$

Strada 2: metodo SPQ (uvw, ...)

Fatto: ogni polinomio simmetrico in più variabili si scrive in modo unico come polinomio delle funzioni simmetriche elementari

$a,\ b,\ c$

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (\underbrace{a+b+c}_{S})x^2 + (\underbrace{ab+bc+ca}_{Q})x - \underbrace{abc}_{P} = t(x)$$

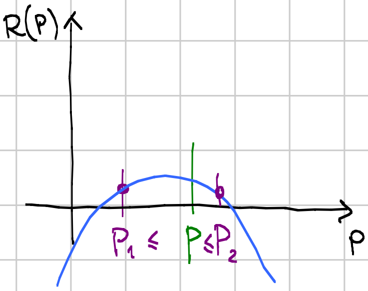
$$4\underbrace{\sum_c ab}_{Q} \sum_c (a+b)^2(b+c)^2 - 9\prod_c (a+b)^2 = R(S,P,Q) = \alpha P^2 + \beta P + \gamma$$

α, β, γ polinomi in S, Q

$$\prod (a+b)^2 = \Big(2abc + \sum_S a^2 b\Big)^2 = (SQ-P)^2$$

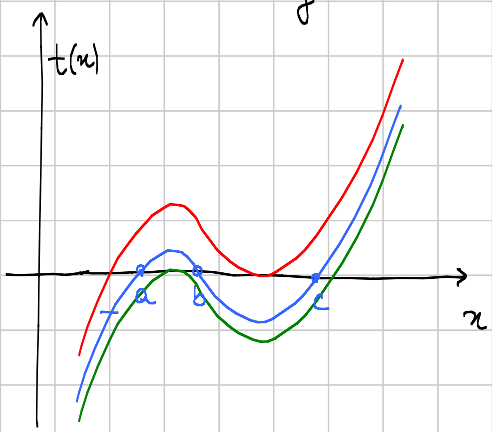
$$SQ = \sum_c a \sum_c ab = 3abc + \sum_S a^2 b$$

deduco che $\alpha = -9$ e $R(P) = -9P^2 + \beta P + \gamma \overset{?}{\geq} 0$



Sono dati $a, b, c \to P, Q, S$

Se trovo a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 tali che $S_1 = S_2 = S$
$Q_1 = Q_2 = Q$ $P_1 \leq P \leq P_2$ e inoltre riesco a dimostrare
che la disug. è vera per a_1, b_1, c_1 e per a_2, b_2, c_2



P_1 corrisponde certamente ad un caso in cui $b_1 = c_1$

P_2 può essere o $b_2 = c_2$ oppure $a_2 = 0$

Devo solo verificare i casi

i. $a = 0$

ii. $b = c = 1$ (facili)

Strada 3

$$0 \le \sum_{cyc} a(a-b)(a-c) - \frac{1}{4}\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = (ab+bc+ca)\sum_{cyc}\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)} - \frac{9}{4}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$a \le b \le c$

$u = b-a \qquad v = c-b$

a, u, v esercizio per casa

$\boxed{6}$ $a,b,c,d>0$

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\Big(1+\overset{\overset{G}{\|}}{\sqrt[4]{abcd}}\Big)^4 \ge 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

$$\frac{\prod_{cyc}(1+a)}{(1+G)^4} \overset{?}{\le} \prod_{cyc}\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \qquad \alpha = \frac{a}{G} \qquad \beta = \frac{b}{G} \quad \dots$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = \frac{abcd}{G^4} = 1$$

$$\frac{\prod_{cyc}(1+G\alpha)}{(1+G)^4} \overset{?}{\le} \prod_{cyc}\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\overbrace{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)(\delta+\alpha)}^{16z}(1+G)^4 \ge 16\,(1+\alpha G)(1+\beta G)(1+\gamma G)(1+\delta G)$$

$$z(1+4G+6G^2+4G^3+G^4) - \Big(1+\sum_{\alpha}\alpha G + \sum_{\alpha<\beta}\alpha\beta G^2 + \sum_{\delta}\alpha\beta\gamma G^3 + G^4\Big) \overset{?}{\ge} 0$$

$$(z-1) + (4z-\Sigma\alpha)G + (6z-\Sigma\alpha\beta)G^2 + (4z-\Sigma\alpha\beta\gamma)G^3 + (z-1)G^4 \overset{?}{\ge} 0$$

$$z \overset{?}{\ge} 1 \qquad 4z \overset{?}{\ge} \Sigma\alpha \qquad 4z \overset{?}{\ge} \Sigma\alpha\beta\gamma \qquad 6z \overset{?}{\ge} \Sigma\alpha\beta$$

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \\ \gamma & \delta \\ \delta & \alpha \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 16z &= 2 + \alpha^2(\gamma^2+\beta\delta+\beta\gamma+\gamma\delta) + \dots \\ &= 2 + \frac{1}{2}\sum_{S}\alpha^2\beta\gamma + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 \end{aligned}$$

$(\sum \alpha\beta)^2 \quad (\alpha\beta\gamma\delta)^{3/4} \sum \alpha$

$\sum \alpha \sum \alpha\beta\gamma = 4 + \frac{1}{2} \sum_{s} \alpha^2\beta\gamma$

$16\eta - \sum \alpha \sum \alpha\beta\gamma = \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\gamma - \beta\delta)^2$

$16\eta \geq \sum \alpha \sum \alpha\beta\gamma \qquad \sum \alpha^m \geq 4 \qquad m \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta} \leq \sqrt[3]{\frac{\sum \alpha\beta\gamma}{4}} \leq \boxed{\sqrt{\frac{\sum \alpha\beta}{6}} \leq \frac{1}{4} \sum \alpha}$$

$16\eta \geq \sum \alpha \sum \alpha\beta\gamma \geq 4 \sum \alpha \geq 16 \qquad \sum \alpha\beta\gamma \geq 4$

$\geq 4 \sum \alpha\beta\gamma$

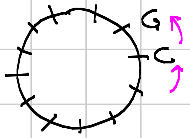
$$\sqrt{\frac{\sum \alpha\beta}{6}} \overset{\text{HOPE}}{\leq} \frac{1}{4} \sum \alpha\beta\gamma$$

$$\frac{1}{4} \sum \alpha\beta\gamma = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{\alpha} \geq \sqrt{\frac{\sum \frac{1}{\alpha\beta}}{6}} = \sqrt{\frac{\sum \alpha\beta}{6}}$$

WC 2012 — COMBINATORIA

Titolo nota 03/02/2012

<u>Problema</u> 42 persone tavolo



C → verità

G → risponde a caso

Noto: → risposte di tutti alla domanda "il vicino a dx è C o G?"

→ il numero dei gonzi è $\leq$ G.

Tesi: per quali valori di G è possibile, sentite le risposte, individuare con certezza un cavaliere.

Supponiamo $G = 1$. Allora o tutti rispondono C → sono tutti C

Oppure c'è una risposta G ⇝ allora chi ha detto G è cavaliere (ed il successivo a dx è G)

Oppure ci sono 2 risposte G ⇝ allora sono consecutive ed il primo è C (ed il successivo è un G che mente)

Altre possibilità non ci sono

Per valori bassi di G (esempio $G=1$) è possibile individuare un caval.

Per valori alti di G (ad esempio $G=30$) <u>non è possibile</u>. Se tutti rispondono cavaliere non si può dire nulla.

Vogliamo dimostrare che è possibile $\iff G \leq 10$.

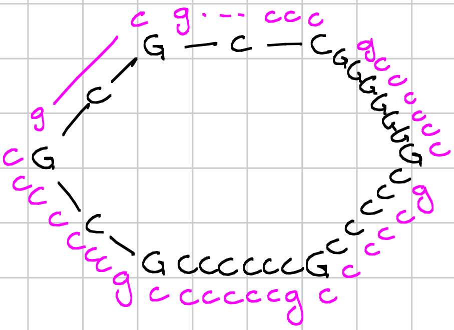
Bisogna dimostrare 2 cose

(1) Per $G = 11$ può non essere possibile (quindi non è possibile nemmeno per $G \geq 11$). Bisogna esibire una configurazione di 42 risposte che ammetta varie disposizioni effettive di C/G che la producono. Per ogni persona deve esistere una configurazione in cui lui è G e una in cui lui è C che produce quella configurazione di risposte (e con ≤ 11 G in totale)

(2) Per $G = 10$ è possibile individuare un C (quindi è possibile anche per $G \leq 10$).

$\boxed{\text{Punto (1)}}$ C = cavaliere   G = gonzo

c = risposta cav.   g = risposta gonzo



gonzi ai vertici : 5
gonzi sui lati : 6
Totale 11 gonzi

La configurazione data può produrre come risposte del tipo

$\underbrace{\text{cccccg}}\ \underbrace{\text{cccccg}}$ ripetuto 6 volte

Anche le configurazioni ottenute ruotando le persone "di 60°" possono produrre le stesse risposte.
D'altra parte ogni persona si ritrova ad essere sia C sia G in qualcuna delle configurazioni ruotate.

$\boxed{\text{Punto (2)}}$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Se ho una risposta g, allora chi l'ha detta o il vicino a dx sono G

g ?
G ? → ok
C G → ok

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Supponiamo di avere una lunga fila di risposte c:

ccccccccc. Allora se l'ultimo è G, vuol dire che tutti
CCC...C nella fila sono G (se ci fosse un C da qualche parte, sarebbero C da lì in poi)

To do: data una qualunque successione di risposte, individuare un cavaliere.

Idea: prendere l'ultimo (a dx) di una lunga fila di risposte c.

<u>Notazione</u>: k = numero di archi massimali con risposta c
$=$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 g
$d_1, \dots, d_k$ = lunghezze dei k archi con risposte g

Prendiamo il più lungo arco di cccc (o uno dei più lunghi). Supponiamo che l'ultimo a dx sia G. Allora dico che ci sono almeno 11 G tra le persone. Questo è assurdo se $G \leq 10$. Quanti sono come minimo i gonzi lungo il tavolo?

$$c\,\underset{G}{\boxed{gg}}\,\underset{G}{\boxed{gg}}\,\underset{G}{\boxed{gg}}\,c \qquad\qquad c\,\underset{G}{\boxed{gg}}\,\underset{G}{\boxed{gg}}\,\underset{G}{\boxed{gg}}\,\underset{G}{\boxed{gc}}$$

Per avere un tratto di g lungo d_i servono almeno $\lceil \frac{d_i}{2} \rceil$ gonzi. Quindi servono almeno

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil \quad \text{gonzi per avere le risposte g}$$

Inoltre servono tanti G quanta è la lunghezza del + lungo arco di c. Le risposte c sono $42 - \sum d_i$ e sono divise in k archi, quindi almeno un arco ha lunghezza

$$\left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil$$

Quindi i G in tutto sono $\geq \underbrace{\left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil}_{\text{G nel + lungo arco di c}} + \underbrace{\sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil}_{\text{G nei seguenti di risposte g}}$

<u>Achtung!</u> Ci può essere un "overlap" di 1 tra i 2 gruppi

$$\underbrace{c\,\boxed{gg}\boxed{gg}}_{\substack{G\ \ G \\ \lceil \frac{d_i}{2} \rceil}}\ \underbrace{c\,c\,c\,c\,c\,c\,c\,c}_{\text{lungh. arco}}\ g \qquad\qquad \underbrace{c\,\boxed{gg}\boxed{g\,g}}_{\substack{G\ \ G \\ \lceil \frac{d_i}{2} \rceil}}\underbrace{c\,c\,c\,c\,c\,c\,c\,c}_{\text{lungh. arco}}\ g$$

se il gruppo sta qui, l'ho contato 2 volte

Quindi il conto precedente è giusto se il tratto di g che precede l'arco di c di lungh. max è pari. Altrimenti è sbagliato di 1.

<u>Caso 1</u>: il tratto di g precedente è pari. Voglio dim. che

$$\left\lceil \frac{42-\sum d_i}{k} \right\rceil + \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil \geq 11$$

Pongo $\ell := \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil$. Allora $\ell = \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil \geq \frac{1}{2} \sum d_i$, da cui

$$\sum d_i \leq 2\ell$$

Inoltre $\ell = \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil \geq k$

$$\left\lceil \frac{42-\sum d_i}{k} \right\rceil + \underbrace{\sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil}_{\ell} \geq \frac{42-\sum d_i}{k} + \ell$$

$$\geq \frac{42-2\ell}{k} + \ell$$

$$\geq \frac{42-2\ell}{\ell} + \ell = \underbrace{\boxed{\frac{42}{\ell} + \ell}}_{\geq 13} - 2 = 11$$

<u>Caso 2</u> Il tratto di g precedente è dispari. Ora il numero dei G è almeno

$$\left\lceil \frac{42-\sum d_i}{k} \right\rceil + \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil - 1$$

Supponiamo WLOG che il tratto precedente sia lungo d_1. Poniamo

$$\ell := \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil \qquad \text{Ora} \quad \ell = \left\lceil \frac{d_1}{2} \right\rceil + \sum_{i\geq 2}^{k} \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil$$

$$\geq \frac{d_1+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 2}^{k} d_i = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}^{k} d_i + \frac{1}{2}$$

Quindi $\sum d_i \leq 2\ell - 1$. Come prima $\ell = \sum \lceil \frac{d_i}{2} \rceil \geq k$

Allora

$$\text{numero gonzi} \geq \left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil + \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil - 1$$

$$= \left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil + \ell - 1$$

$$\geq \left\lceil \frac{42 - 2\ell + 1}{k} \right\rceil + \ell - 1$$

$$\geq \left\lceil \frac{42 - 2\ell + 1}{\ell} \right\rceil + \ell - 1$$

$$= \left\lceil \frac{43 - 2\ell}{\ell} \right\rceil + \ell - 1 = \left\lceil \frac{43}{\ell} - 2 \right\rceil + \ell - 1$$

$$= \underbrace{\left\lceil \frac{43}{\ell} \right\rceil + \ell}_{\geq 14} - 3 \quad = 11.$$

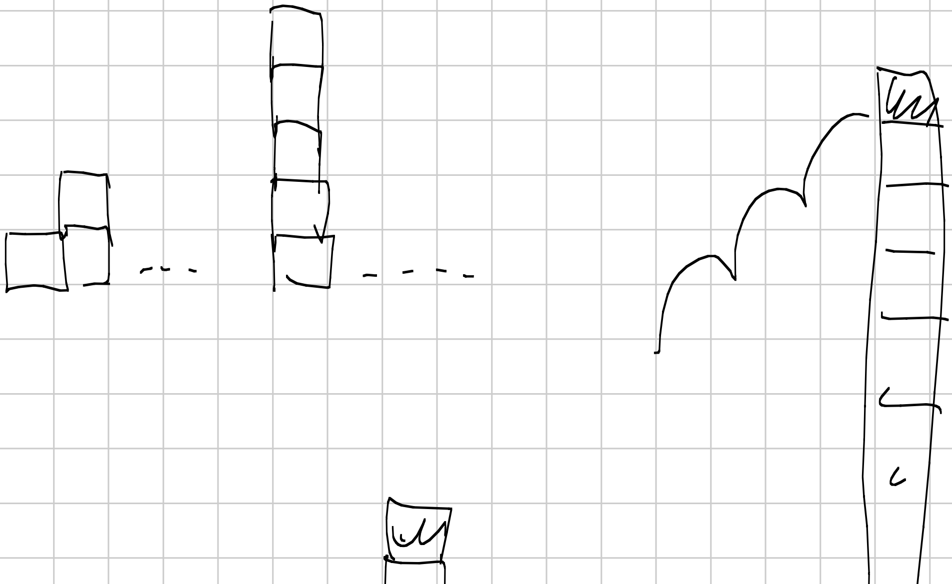
Oss. 1 Il controesempio è in un certo senso obbligato (si può scegliere tra esagono ed ettagono)

Oss. 2 Se invece di 42 c'è n il numero max di G viene $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 2$ $\rightsquigarrow$ si determina un C, con uno in più no.

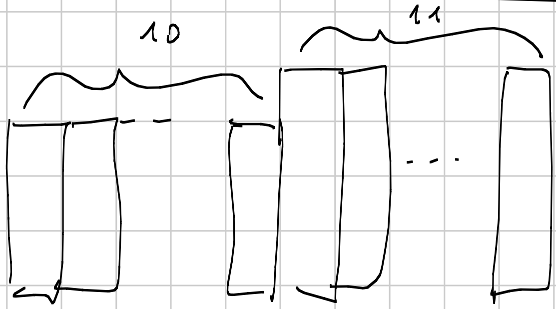
$1, 2, \dots, 20$

$(b, b+k) \quad k \geq 2$

$(b+1, b+k-1)$

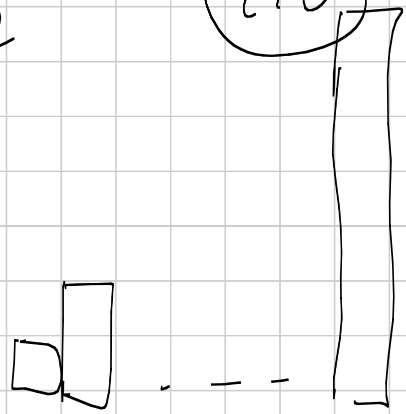


Conf. finale



$$\frac{20\cdot 21}{2}$$

210



$(N_1, N_2, \dots, N_{20})$

$$\boxed{U = T_{N_1}+T_{N_2}+\dots+T_{N_{20}}}$$

$$T_n = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$k \geq 2$

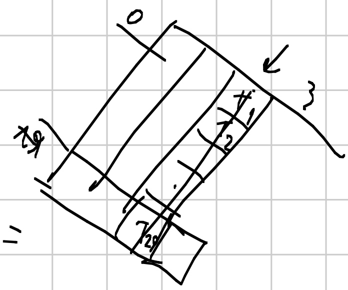
$$T_{m+k} + T_m$$

$$T_{m+k-1} \qquad T_{m+1}$$

$$T_{m+k}+T_m = T_{m+k-1}+(m+k)+T_{m+1}-(m+1) =$$

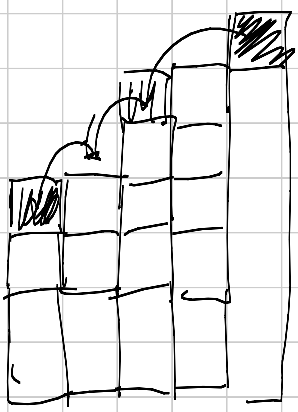
$$= T_{m+k-1}+T_{m+1}+(k-1)$$

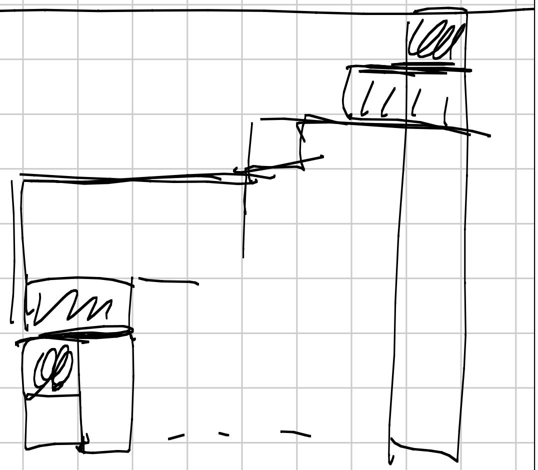
$$U = T_1 + T_2 + \dots + T_{20} = \binom{19+3}{3} = \binom{22}{3} = \frac{22 \cdot \overset{7}{\cancel{21}} \cdot \overset{10}{\cancel{20}}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 1540$$



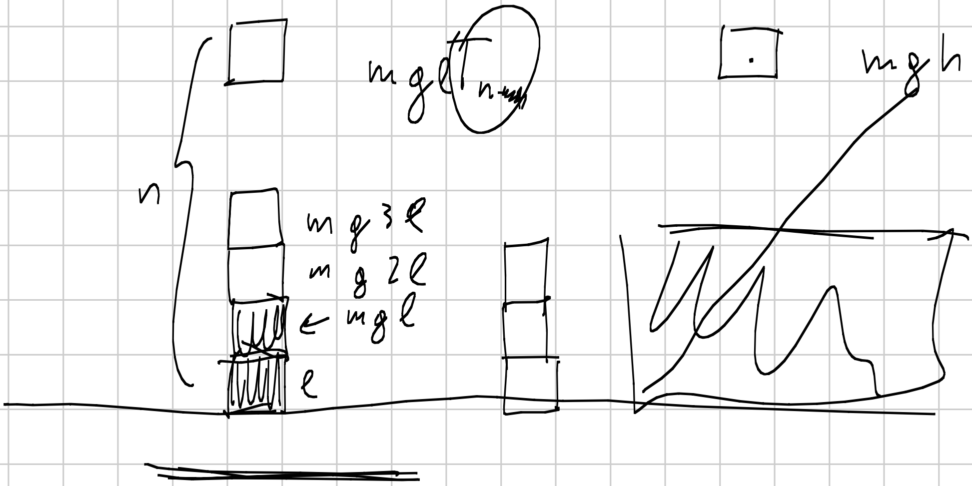
$$U = 10 \cdot (T_{10} + T_{11}) = 10 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{11 \cdot 12}{2}\right) = 10 \cdot 11^2 = 1210$$

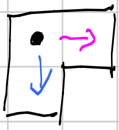
$$U_{in} - U_f = 330$$





U

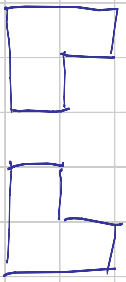

n
mg3l
mg2l
mgl
l
mgh



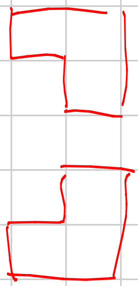
COLONNE

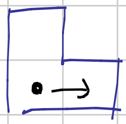
- riesco a ottenere $670k$ • nelle prime k colonne

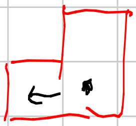
"guardano avanti"



"guardano indietro"





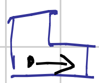


pallini nelle prime k colonne =

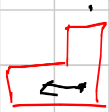
$$= \frac{2010k - 2\overset{\swarrow \text{ trimini della col. } k}{a_k} - \underset{\nwarrow \text{ trimini da col. } k+1}{b_k}}{3} + a_k =$$

$$= 670k + \frac{a_k - b_k}{3}$$

- $a_k > b_k$
  sposto $s_k = \dfrac{a_k - b_k}{3}$ •
  e ho $a_k \geq 3s_k \geq 2s_k$ candidati



- $a_k < b_k$
  sposto $s_k = \dfrac{b_k - a_k}{3}$ •
  e ho $b_k \geq 3s_k \geq 2s_k$ candidati

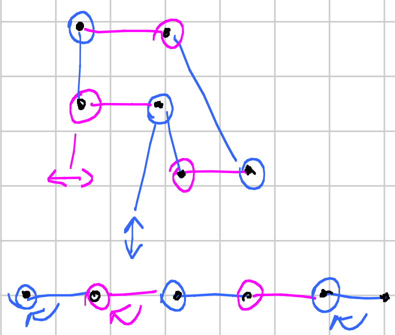


- Scelgo s_k COPPIE (disgiunte) di candidati per la colonna k.

Stessa cosa posso fare per le righe
- Sceglierò r_k COPPIE di candidati per uno spostamento ↕ che aggiusti le prime k righe.

Creo un GRAFO.
I nodi sono i trimini candidati a spostamenti.
due trimini sono collegati se appartengono alla stessa coppia.

- ogni nodo ha grado al + 2.



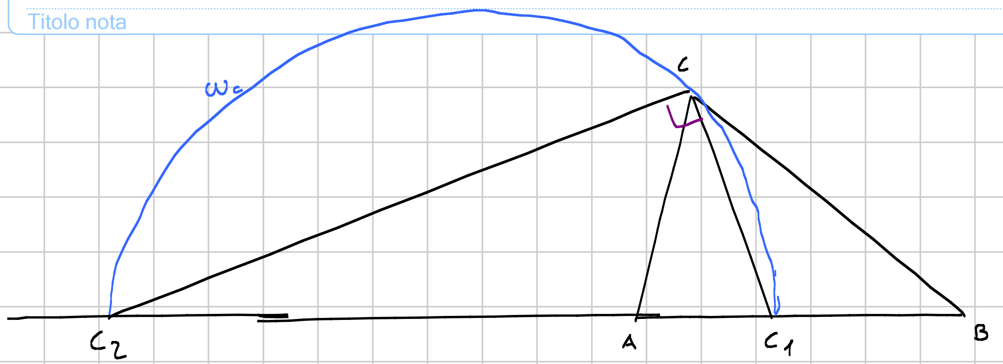
- il grafo è unione disgiunta di cammini e cicli

- a ogni arco assegno un suo vertice in modo che a 2 archi non tocchi lo stesso.

Alla fine faccio tutti gli spostamenti!

WC 2012 – GEOMETRIA SINTETICA

Titolo nota 25/01/2012



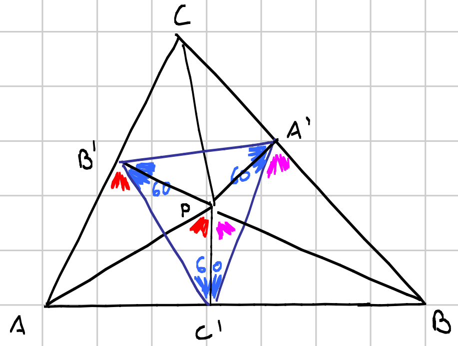
ω_C = circ con diam. C_1C_2

$C \in \omega_C$ $\qquad \dfrac{AC_1}{BC_1} = \dfrac{AC_2}{BC_2} = \dfrac{b}{a}$

ω_C = luogo punti X t.c. $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{b}{a} \rightarrow \boxed{AX \cdot a = BX \cdot b}$

$P, Q = \omega_B \cap \omega_C$ $\qquad AP \cdot a = BP \cdot b = CP \cdot c$

[ω_A passa per P e Q]



idea da casa

A'B'C' triangolo pedale di P

$\dfrac{B'C'}{\sin\alpha} = AP$ (ciclicità $AC'PB'$)

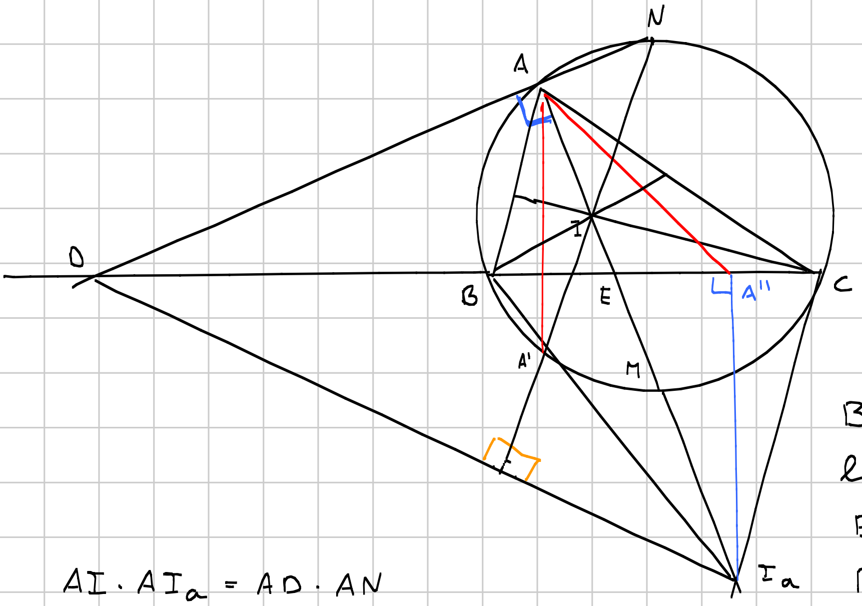
$B'C' = AP \cdot \sin\alpha = AP \cdot \dfrac{a}{2R}$

$A'B' = B'C' = C'A'$

$A\hat{P}B = A\hat{P}C' + C'\hat{P}B =$

$= A\hat{B'}C' + B\hat{A'}C' = (120 - C\hat{B'}A') +$

$(120 - C\hat{A'}B') = 60 + \gamma$



inversione
centro A
raggio $\sqrt{bc}$
+
simmetria rispetto
a AI

$B \leftrightarrow C$
$\ell(BC) \leftrightarrow \Gamma(ABC)$
$E \leftrightarrow M$
$D \leftrightarrow N$ [pt medi $\overset{\frown}{BC}$]
$I \leftrightarrow I_a$
(similitudine $A\hat{I}B \sim A\hat{C}I_a$)

$AI \cdot AI_a = AD \cdot AN$

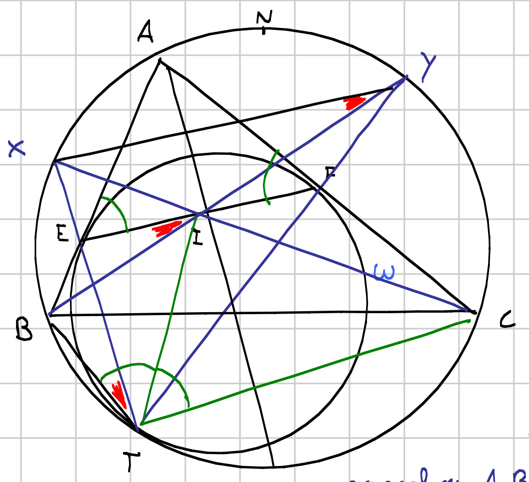
$$\frac{AI}{AN} = \frac{AD}{AI_a}$$

$A\hat{I_a}D \sim A\hat{N}I$

rotomotetia $I_a \to N$ e $D \to I$
$\Downarrow$
$NI \perp DI_a$

$\ell(NI) \leftrightarrow \Gamma(ADI_a)$
$A' = NI \cap \Gamma(ABC)$
$\updownarrow$
$A'' = \Gamma(ADI_a) \cap BC$

AA'' BB'' CC'' $\to$ concorrono in Nagel



ω = circonf. mistilinea

$DI_a \perp NI$

$A' = NI \cap \Gamma(ABC)$

idea da casa $\to$ N, I, T allineati

pascal su $ABYTXC$ $\to$ $AB \cap TX = E$
$BY \cap CX = I$
$YT \cap AC = F$

BTIE ciclico CFIT ciclico

$B\hat{T}I = A\hat{E}Z = A\hat{F}Z = C\hat{T}Z$

$A' \equiv T$ (pt. tangenza)

teorema di Monge

γ = circonf. inscritta

Γ = circ. circoscritta

$\gamma \to \omega$ (omotetia di centro A)

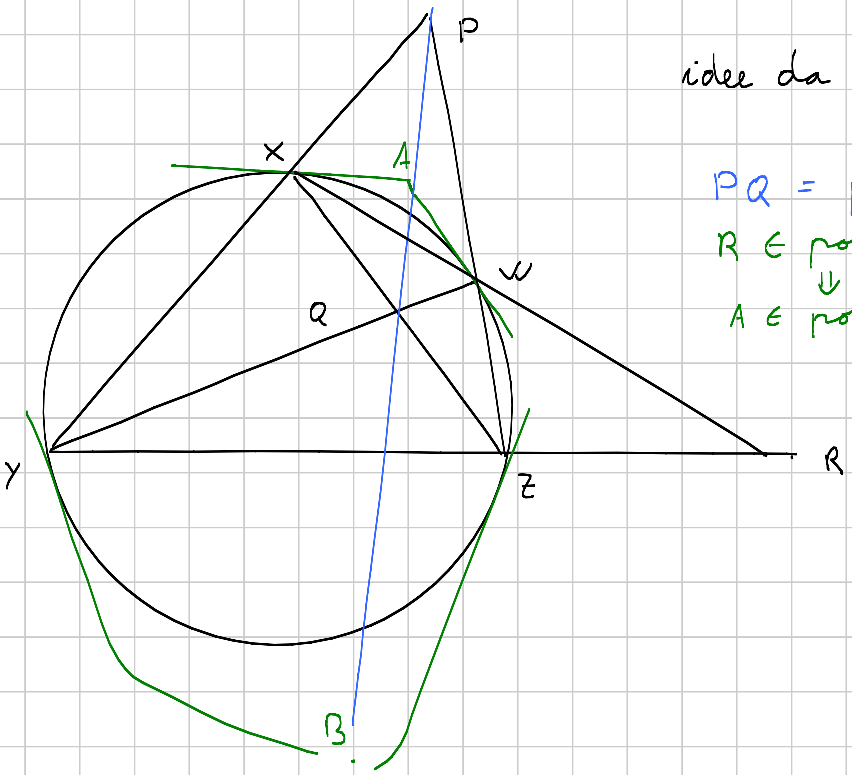
$\omega \to \Gamma$ (" " " A')

A = centro est. di sim. tra γ e ω

A' = " " " " " ω e Γ

X = " " " " " γ e Γ

allineati!



idee da casa

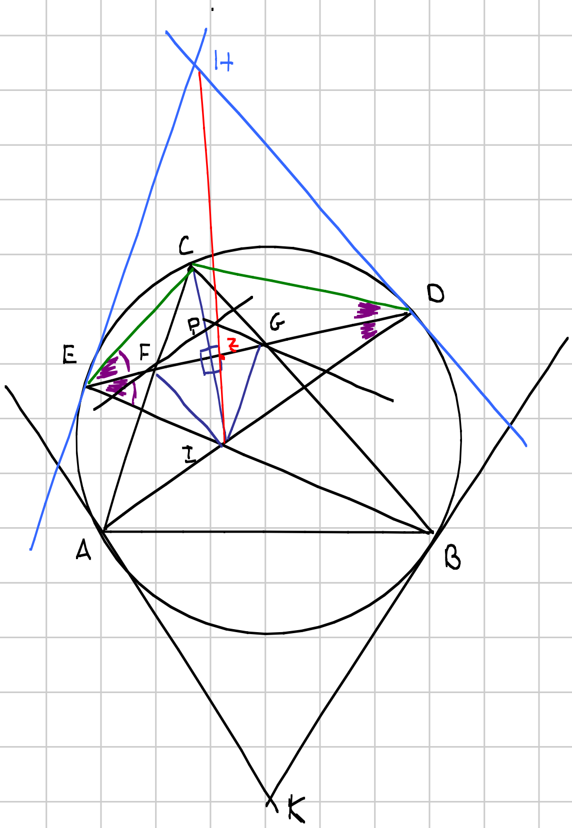
$PQ = \text{pol}(R)$

$R \in \text{pol}(A)$

$\Downarrow$

$A \in \text{pol}(R)$

PQAB allineati



$X = AE \cap BD$

Th $\leftrightarrow$ KPX allineati

H = intersez. tangenti in D e E

$KIHX$ allineati

Th $\leftrightarrow$ HIP allineati

$DH \parallel BC$

$EH \parallel AC$

$I\hat{D}E = E\hat{D}C$

$I\hat{E}D = D\hat{E}C$

$\Downarrow$

I = simm(C) rispetto a DE

$\Downarrow$

$CFIG$ rombo

$FI \parallel BC \parallel DH$

$GI \parallel AC \parallel EH$

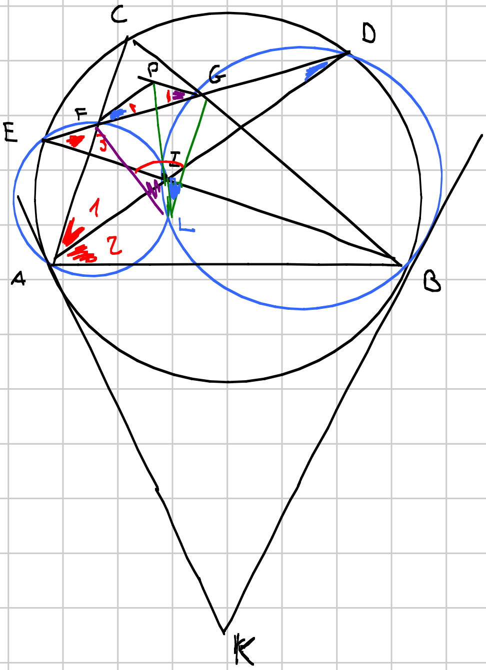
$Z = ED \cap HI$

omotetia centro Z che manda H in I

$D \to F$ $\Rightarrow$ retta DI $\to$ retta FP

$E \to G$ $\Rightarrow$ retta EI $\to$ retta GP

QUINDI $\to$ I va in P! $\to$ FINE!



$X = AE \cap BD$

Th $\Leftrightarrow$ $P \in IX$

$AIFE$ ciclico (ω_1)

$I\hat{A}F = D\hat{A}C = B\hat{A}D =$

$= B\hat{E}D = I\hat{E}F$

analog. $\rightarrow$ $BDGI$ ciclico (ω_2)

$\omega_1, \omega_2, \Gamma(ABC)$

AE = asse radicale di Γ e ω_1

BD = " " " Γ e ω_2

$X \rightarrow$ centro radicale

$I = \omega_1 \cap \omega_2 \Rightarrow IX$ = asse radicale

$L = \omega_1 \cap \omega_2 \quad (L \neq I)$

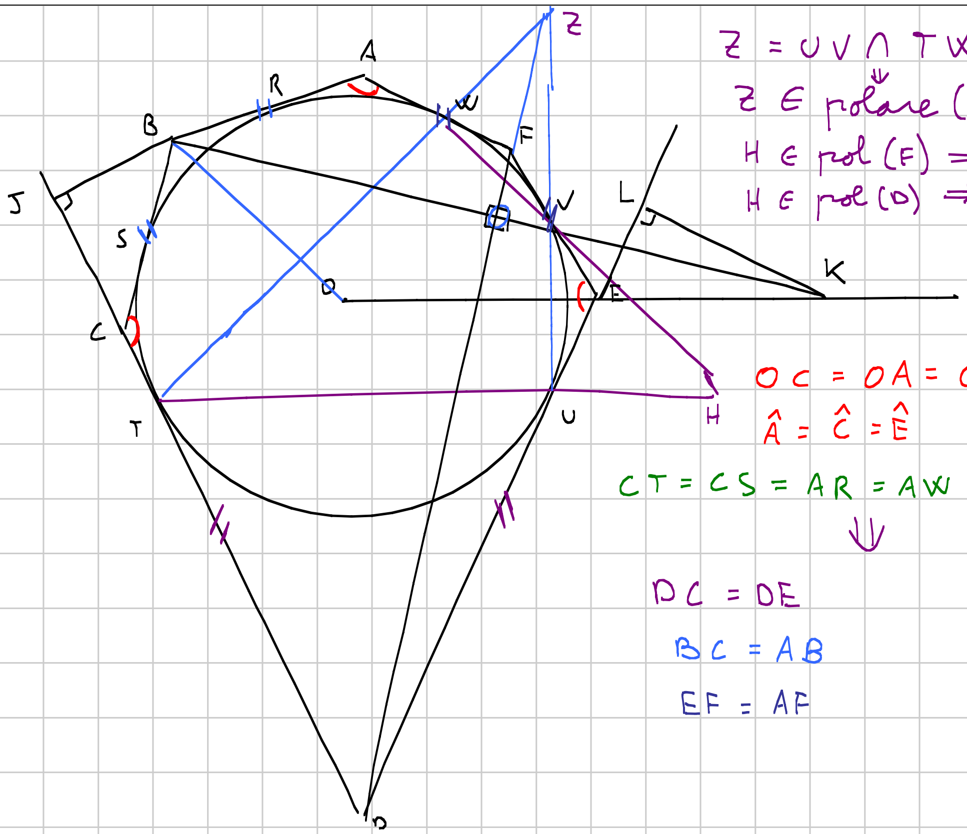
Th $\rightarrow$ PIL allineati $\rightsquigarrow$ $G\hat{L}I = G\hat{L}P$

$I\hat{L}G = I\hat{D}G = A\hat{D}E = P\hat{F}G$

Th $\Leftrightarrow$ $P\hat{F}G = P\hat{L}G$ $\Leftrightarrow$ $FLGP$ ciclico

dall'altra parte $\rightarrow$ $F\hat{G}P = F\hat{L}I$

QUINDI $F\hat{L}G = F\hat{L}I + I\hat{L}G = F\hat{G}P + P\hat{F}G = 180 - F\hat{P}G$



$Z = UV \cap TW$

$Z \in$ polare (H)

$H \in$ pol $(F) \Rightarrow F \in$ pol(H)

$H \in$ pol $(D) \Rightarrow D \in$ pol(H)

$OC = OA = OE$

$\hat{A} = \hat{C} = \hat{E}$

$CT = CS = AR = AW = EV = EU$

$\Downarrow$

$DC = DE$

$BC = AB$

$EF = AF$

$DL = DJ$ $\qquad DL \cdot DU = DJ \cdot DT$ $\qquad \vec{DK} \cdot \vec{DU} = \vec{DB} \cdot \vec{DT}$

origine in O $\qquad (K-D)(U-D) = (B-D)(T-D)$

so che $D(U-D) = D(T-D)$

mi serve $K(U-D) = B(T-D)$

X pt qualsiasi del piano

$$K(U-X) + K(X-D) = B(T-X) + B(X-D)$$

$$\underset{①}{K(U-X)} = \underset{②}{B(T-X)} + \underset{③}{(B-K)(X-D)}$$

HOPE → posso scegliere X in modo che ①, ②, ③ si annullino?

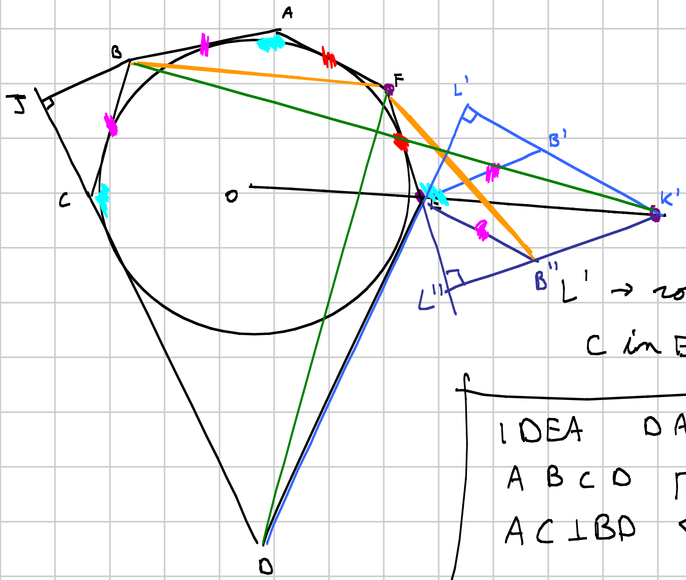
① $= 0 \iff UX \perp OK \iff X \in UV$

② $= 0 \iff TX \perp OB \iff X \in TW$

③ $= 0 \iff BK \perp DX \iff X \in DF$

se UV, TW e DF concorrono, ho finito!

$F\hat{A}D = \underbrace{B\hat{C}D = D\hat{E}B'}_{\text{(rotazione)}} = \underbrace{}_{\text{(simmetria)}} F\hat{E}B''$



L' t.c. $L' \in DE$ e $DL' = DJ$

K' t.c. $K' \in OE$ e $K'L' \perp DE$

$Th \Leftrightarrow K'B \perp DF$

L' → rotazione centro D che manda C in E, J in L' e B in B'

IDEA DA CASA

$A\ B\ C\ D$ punti del piano

$AC \perp BD \iff AB^2 - CB^2 = AD^2 - CD^2$

$BK' \perp DF \iff BD^2 - K'D^2 = BF^2 - K'F^2$

so che $B'K' \perp DE \implies B'D^2 - K'D^2 = B'E^2 - K'E^2$

$B'D^2 = BD^2$

$Th \iff BF^2 - K'F^2 = B'E^2 - K'E^2 \iff K'E^2 - K'F^2 = B'E^2 - BF^2$

LHS

$K'E^2 - K'F^2 = \underbrace{XE^2 - XF^2}$ $\forall X \in$ perpendicolare da K' a EF $=$ simmetrica di $K'L'$

$\downarrow$

$X \to B''$

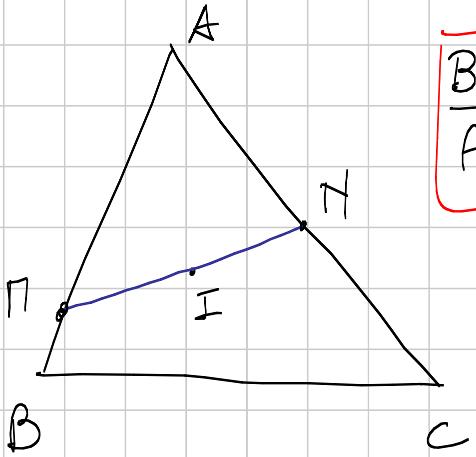
$Th \Leftrightarrow B''E^2 - B''F^2 = B'E^2 - BF^2$

$B'E = B''E$ per simmetria

$Th \Leftrightarrow BF = B''F$ (HOPE)

$Th \Leftarrow F\hat{E}B'' = F\hat{A}B$ → vedi sopra!

(G3)

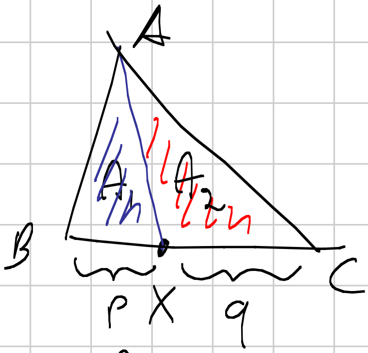


$$\frac{\boxed{B\Pi}\cdot \boxed{CN}}{\boxed{A\Pi}\cdot \boxed{AN}} \le \frac{a^2}{4cb}$$

Coord. baricentriche di $P = [x : y : z]$

$$x : y : z = S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}$$

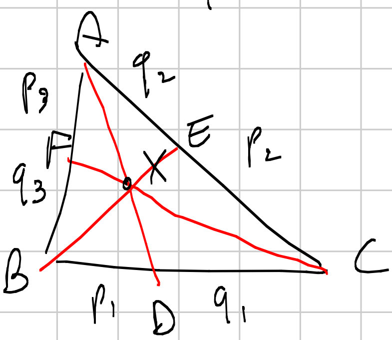
•)



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{p}{q}$$

$$X = [0 : q : p]$$

•)



$$X = [x : y : z]$$

$$S_{ABD} : S_{ADC} = p_1 : q_1$$

$$S_{XBD} : S_{XDC} = p_1 : q_1$$

$$\underbrace{\underset{\displaystyle S_{AXB}}{\overset{\displaystyle S_{ABD} - S_{XBD}}{\parallel}} : \underset{\displaystyle S_{AXC}}{\overset{\displaystyle S_{ADC} - S_{XDC}}{\parallel}}}_{\displaystyle z \; : \; y} = p_1 : q_2$$

$$z : y = p_1 : q_1$$

$\circ)$ $I = [a : b : c]$ $\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

retta

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

$\circ)$ $\Pi = [\underset{k}{\ } : \underset{(1-k)}{\ } : 0] \qquad k \in (0,1)$

$$\begin{cases} \alpha k + \beta (1-k) = 0 \\ \alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ k & 1-k & 0 \end{pmatrix} = i\,\underbrace{(k-1)c} + j\,\underbrace{ck} + k\,\underbrace{[a(1-k) - kb]}$$

$$\begin{cases} (k-1)cx + ck\,y + (a(1-k) - kb)\,z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(k-1)c\,x + (a(1-k) - kb)\,z = 0$$

$$[kb - a(1-k) : 0 : (k-1)c] = N$$

$$[k : (1-k) : 0] = M$$

$$\frac{B\Pi}{A\Pi} \cdot \frac{CN}{AN} = \frac{k}{1-k} \cdot \frac{kb - a(1-k)}{(k-1)c} =$$

$$= (k^2 b + k^2 a - ak) \cdot \frac{1}{(-c)(1-k)^2} =$$

$$= \frac{ak - k^2(a+b)}{c(1-k)^2} \le \frac{a^2}{4bc}$$

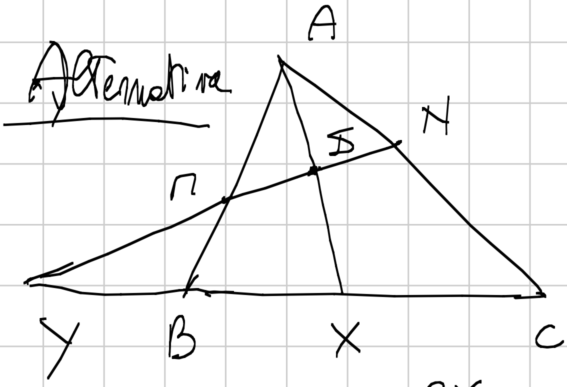
$$4ab\cancel{c}k - 4k^2 b\cancel{c}(a+b) \le a^2\cancel{c}(1-k)^2$$

$$4k^2 b(a+b) + a^2(1-k)^2 - 4abk \ge 0$$

$$k^2(4ab + 4b^2 + a^2) - 2k(2ab + a^2) + a^2 \ge 0$$

$$(k(a+2b))^2 - 2ak(a+2b) + a^2 \ge 0$$

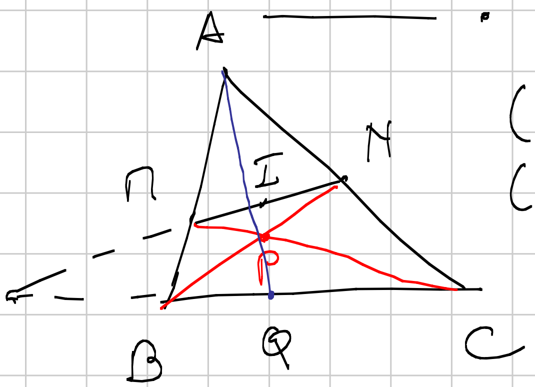
Alternativa



$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CY}{YX} \cdot \frac{XI}{IA} = +1$$

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BY}{YX} \cdot \frac{XI}{IA} = 1$$

$\frac{BX}{XC} = \frac{\text{molto}}{}$. $BX = \dots$ $CX = \dots$



$$(NB, NC, NQ, NM) = -1$$

$$(NP, NA, NQ, NM) = -1$$

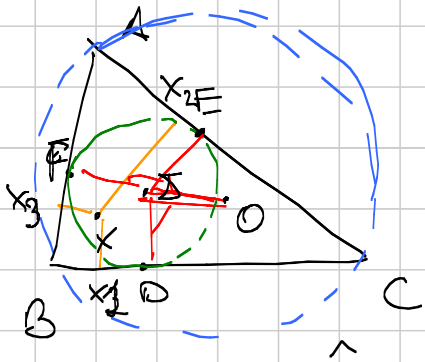
$\mathcal{C}$ = conica per A, B, C e tangente a BI, CI

$$\Rightarrow P \in \mathcal{C} \quad \left[\Leftarrow MI = MN = \mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(Q)\right]$$

$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right\}.$$

↳ Trilineari.

G9) 1. Trigonometria

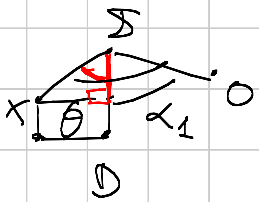


$\widehat{OIF} = \alpha_3$

$\widehat{OIE} = \alpha_2$

$\widehat{OID} = \alpha_1$

$\widehat{OIX} = \theta$



$\widehat{XID} = \theta - \alpha_1$

$$ID - XX_1 = IX \cdot \cos(\theta - \alpha_1)$$
$$IE - XX_2 = IX \cdot \cos(\theta - \alpha_2)$$
$$IF - XX_3 = IX \cdot \cos(\theta - \alpha_3)$$

IO retta di Eulero di DEF

$r \cdot \sin\alpha_j$ = dist. con segno di D da IO

$$\sum_i (\quad) = IX \sum_{j=1}^{3} \cos(\theta - \alpha_j)$$

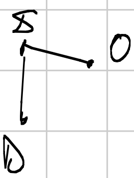
$$3r - S' = IX \sum_{j=1}^{3} \cos(\theta - \alpha_j)$$

$\Rightarrow \sum r \sin\alpha_j = 0$

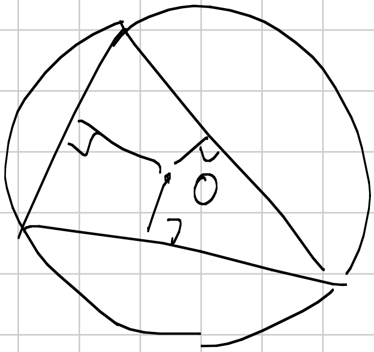
perché il baricentro sta su IO (di DEF)

$$S' = 3r - IX \cdot \sum_{j=1}^{3} \cos(\theta - \alpha_j)$$

$$\cos\theta \sum \cos\alpha_j + \sin\theta \underbrace{\sum \sin\alpha_j}_{= 0}$$

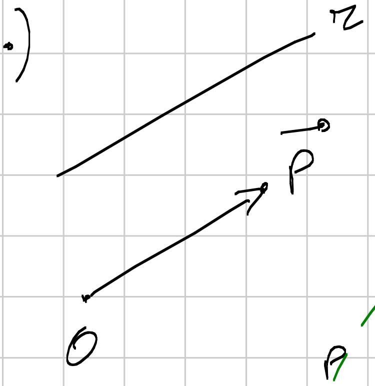


$OI \sum \cos\alpha_j$

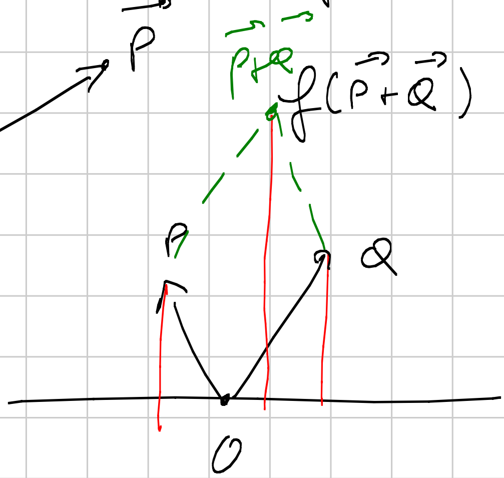


$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}$$

•)



$$f(P) = \mathrm{dist}(P, r)$$



$$f(\vec{P}+\vec{Q}) = f(\vec{P}) + f(\vec{Q})$$

$$f(x,y) = ax + by$$

$$f(x,y) = ax + by + c$$

$$f(\vec{P}+\vec{Q}) = f(\vec{P}) + f(\vec{Q}) - f(\vec{0})$$

$f, g \qquad h = f + g$

$$h(P+Q) = f(P) + f(Q) - f(0) + g(P) + g(Q) - g(0) = h(P) + h(Q) - h(0).$$

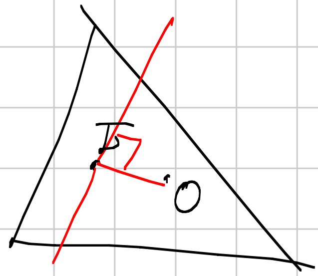
$$F(X) = d(X, AB) + d(X, BC) + d(X, CA)$$

$$F(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

$$F(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma = k$$

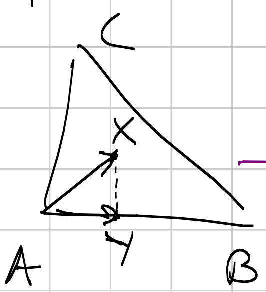
$$(\alpha, \beta)$$

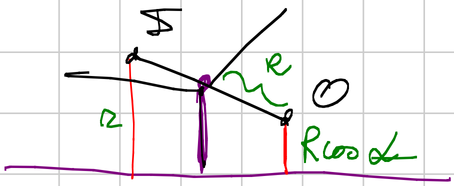
$$F(X) = 3r$$



$X \longrightarrow X'$ proiez. di X su IO

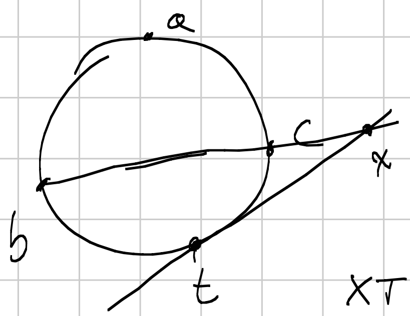
O

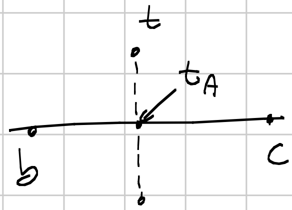




G10)

- num complessi





$$(|t| = |b| = |c| = 1)$$

$$t_A = b + c - \frac{bc}{t}$$

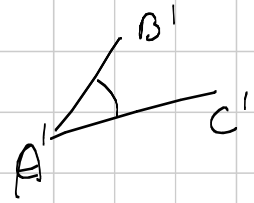
$$XT^2 = XC \cdot XB$$

$$x = \frac{bc - t t_A}{b + c - t - t_A}$$

$$a' = (A') = a + \frac{bc(t-a)^2}{t^2(b+c)}$$

$$\frac{a'-b'}{a'-c'} = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$$

$\nearrow$



cfr. per A, B, C $\{|z|=1\}$ è tg. alla cfr. per A', B', C'

$\bar{z} = \frac{1}{z}$

$\cup$
P

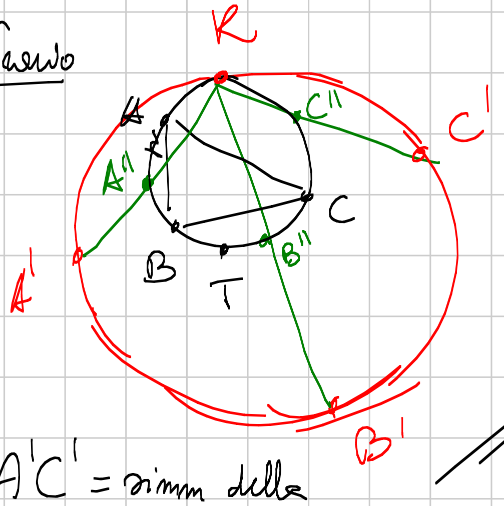
$$\frac{p-b'}{p-c'} \Big/ \frac{a'-b'}{a'-c'} \in \mathbb{R}.$$

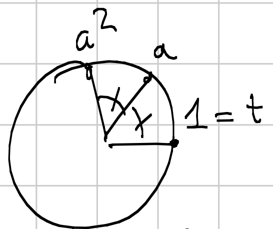
$$\frac{p-b'}{p-c'} \cdot \underbrace{\frac{a'-c'}{a'-b'}}_{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}} = \frac{\frac{1}{p}-\bar{b}'}{\frac{1}{p}-\bar{c}'} \cdot \underbrace{\frac{\bar{a}'-\bar{c}'}{\bar{a}'-\bar{b}'}}_{\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}}$$

$\Downarrow$

$$\alpha p^2 + \beta p + \gamma = 0 \qquad \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

- all'incontrario





$\boxed{\widehat{TA} = \widehat{AA''}}$ (*)

$A''C'' \parallel A'C'$ = simm. della tang. t risp. ad AC.

Costruisco A'', B'', C'' che soddisfano (*). $\Rightarrow$ $A''B''C''$, $A'B'C'$ hanno i lati paralleli.

- $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ concorrono in K
- $K \in \omega$.

AA', BB', CC' bisett. di A', B', C' concorrono in I (inc. di $A'B'C'$).

- $I \in \omega$

$k = B'B'' \cap \omega$ $\qquad$ $KB''CIBC''$

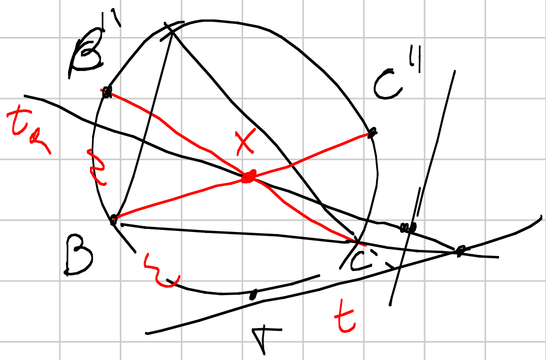
$\swarrow$

$B' = KB'' \cap IB$, $B''C \cap BC''$, $CI \cap C''K$

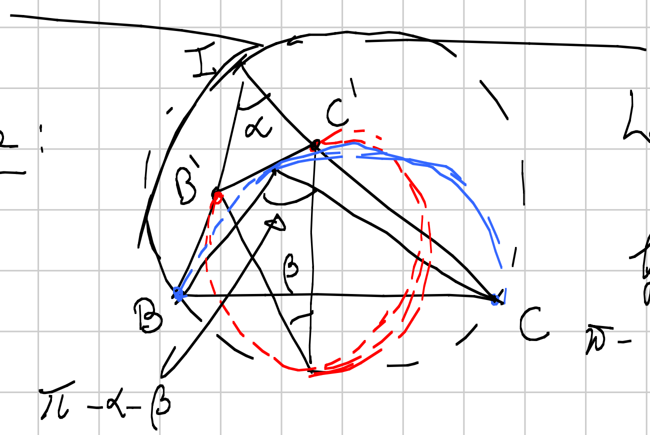
$X \in t_a$ $\qquad$ C'

$\swarrow$

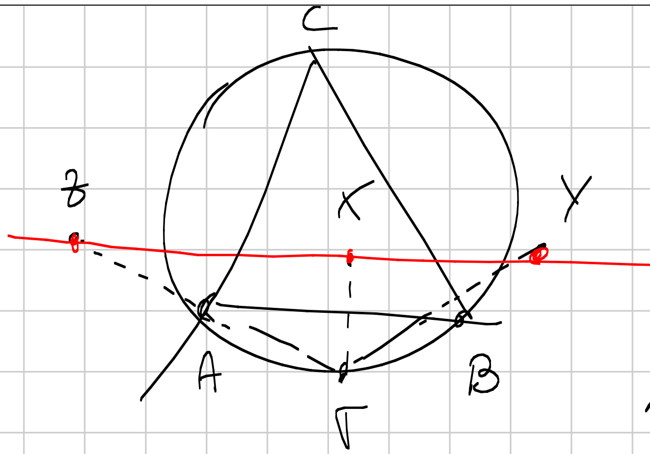
C', C'', K allineati.



Lemma:



La circ. per B e C che tange $B'C'$ fa un angolo di $\pi - (\beta + \alpha)$



X, Y, C, C'
conciclici

X, Z, B, B'

Y, Z, A, A'

WC 2012 – Teoria dei Numeri

Titolo nota 25/01/2012

4) $a^2+1 \equiv 0 \ (p)$

$0 < a_1, a_2 < p \qquad a_1 = p - a_2$

$(p-1)^2+1 \geq a^2+1 = p \cdot \underset{\substack{\vee \\ p^2}}{q} \cdot b \qquad q > p$

$c \qquad P(c^2+1) = p, \qquad c > p$

$c^2+1 = 2y^2 \geq 2q^2 \implies c > q$

$q \mid c^2+1 \implies q^2 \mid y^2$

$P(c^2+1) = p \qquad a = c \bmod p$

$b = p - a$

$$X^2+1=2Y^2 \qquad X^2-2Y^2=-1$$

$$X^2-2Y^2=1 \qquad (3,2)$$

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$$

$$(1+\sqrt{2})^2 \qquad 1^2-2\cdot 1^2=-1$$

$$(1+\sqrt{2})^{2k+1}(1-\sqrt{2})^{2k+1}=-1$$

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1}-(1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2\sqrt{2}}=Y_k$$

$$p\equiv 5 \pmod 8$$

$$(1+\sqrt{2})^{2k+1}\equiv(1-\sqrt{2})^{2k+1} \quad (p)$$

$$(1+\sqrt{2})^{4k+2}\equiv(-1)^{2k+1}\equiv -1 \quad (p)$$

$$4k+2=p+1$$

$$(1+\sqrt{2})^{p+1}\equiv(1+\sqrt{2})^p(1+\sqrt{2})$$

$$\equiv\left(1+(\sqrt{2})^p\right)(1+\sqrt{2})$$

$$\equiv\left(1+(\sqrt{2})^{p+1}\right)+\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}^{\,p-1}\right)$$

$$\equiv\left(1+2^{\frac{p+1}{2}}\right)+\sqrt{2}\left(1+2^{\frac{p-1}{2}}\right)\equiv \star$$

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ e' quadr. mod } p \\ -1 & \text{'' '' non '' '' ''} \end{cases}$$

$$\cancel{A} \equiv \left(1 + 2^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2\right) \equiv -1 \pmod{p}$$

4) $(n^2+1)\left((n-1)^2+1\right) =$

$$= \left(n^2-n+1\right)^2+1$$

$$\max\left\{P(n),\ P((n-1))\right\} = P\left(n^2-n+1\right)$$

Non è possibile che valga $P(n+1) > P(n)\ \forall n$

$\Rightarrow$ esistono m per cui

$$P(m-1) \le P(m), \quad P(m+1) \le P(m)$$

$$P(m) = \max\left\{P(m),\ P(m-1)\right\} = P\left(m^2-m+1\right)$$

$$\parallel$$

$$P(m) = \max\left\{P(m+1),\ P(m)\right\} = P\left((m+1)^2-(m+1)+1\right)$$

5) $\cdot F_n = 7^n + 117$

Mod 8 : RHS $\equiv 6 \pmod 8$

$4 \pmod 8$

$\underbrace{0, 1,}\ 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, \underbrace{0, 1}$

- $9^m + 18 = F_n$

$$9 \mid F_n \qquad F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$$

$$0 \equiv F_n \pmod{9} \iff$$

$$(1+\sqrt{5})^n \equiv (1-\sqrt{5})^n \pmod{9}$$

$$(1+\sqrt{5})^{2n} \equiv (-4)^n \pmod{9}$$

$$\equiv$$

$$(6+2\sqrt{5})^n \equiv (2\sqrt{5})^n + n \cdot 6 \cdot (2\sqrt{5})^{n-1}$$

$$(-1)^n \equiv (-\sqrt{5})^n \pmod{3} \Rightarrow n \text{ pari}$$

$$\to n \equiv 0 \pmod{3}$$

0, 1, 1, 0, 1, ...

F_{3k} è pari

$$\boxed{F_{n+1} = F_n + F_{n-1}} \qquad x^2 = x+1$$

$$a,\ b,\ a+b$$

$$(a,b) \to (b, a+b)$$

Successione modulo p (p primo)

$$a + bx \qquad b + (a+b)x$$

$$(a+bx)x = ax + bx^2$$

MODULO $x^2 - (x+1)$

$$\equiv ax + bx + b = b + (a+b)x$$

$$x = \frac{1+\sqrt5}{2} \qquad \text{Se } 5 = \square \bmod p^{*}$$

$$\frac{1+\sqrt5}{2} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \equiv 1 \qquad \text{sicuramente per } n = p-1$$

(In generale può venire un divisore)

* $p \equiv \pm 1 \pmod 5$

Caso $5 \neq \square \pmod p$ $\qquad (p \equiv 2, 3 \pmod 5)$

$$\frac{1+\sqrt5}{2} \notin \mathbb{Z}_p$$

$$\downarrow$$

$\in$ campo che ha p^2 elementi

$\neq 0$ $\quad \{a + b\sqrt5 \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$

tra cui $p^2 - 1$ sono $\neq 0$

$(a+b\sqrt{5})^{p^2-1} \equiv 1$

$X^2 - X - 1$

$(X-\alpha)(X-\alpha^p)$

$\alpha^{p+1} = -1$

$\alpha^{2(p+1)} = 1$

$\alpha^{\frac{2(p+1)}{d}} = 1$

d dispari

$X^3 + aX^2 + bX + c$ coeff. in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

IRRIDUCIBILE

non ha radici in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Le radici sono del tipo $h + l\xi + m\xi^2$

p^3

$\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}$

N6) $a+b \mid a\cdot m^a + b\cdot n^b, \quad (a,b)=1$

$a+b=p \qquad m=n=1$ ok

$$a\cdot m^a + (p-a)\cdot n^{p-a} \mod p$$

Trovare $a<p$ con $p \mid a\left(m^a - n^{1-a}\right)$

Cerchiamo $(p, mn)=1$

$$p \mid (mn)^a - n$$

Male se $(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$

$$(mn)^2 - n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$$

$$(mn)^{2+kb} - n \equiv (mn)^2 - n \quad \left(p_1^{f_1} \cdots p_k^{f_k}\right)$$

$$b = \varphi\left(p_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{f_k}\right)$$

$$f_1 > e_1, \ \ldots, \ f_k > e_k$$

Se $p_1^{\beta_1} \mid (mn)^{2+kb} - n$ e $\beta_1 > e_1$

ASSURDO, perché $p_1^{e_1} \parallel$ RHS ma $p_1^{e_1+1} \mid$ LHS

$p \mid n$ per k grande la massima pot. di p che divide $\left((mn)^{2+kb} - n\right)$

$v_p\left((mn)^{2+kb} - n\right) = v_p(n)$

$p \mid (mn)^{\alpha} - n$

Quindi se $p \nmid n \Rightarrow p \nmid m$

(Voglio $\alpha < p$: se $\alpha \geq p$ considero $\alpha - (p-1)$)

MISCELLANEA WC 2012

Titolo nota 27/01/2012

$\boxed{1}$ $f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Oss: f è biunivoca

$$f(\underbrace{af(y)+b}_{\text{iniettiva}}) = \text{biunivoca} \qquad x \neq 0$$

surgettiva

$$y = uf(v)+f(u) \quad \Rightarrow \quad f(y) = 2f(u)+uv$$

$$f(x(2f(u)+uv)+f(x)) = 2f(x)+x(uf(v)+f(u))$$

$$f(xuv+2xf(u)+f(x)) = xuf(v)+2f(x)+xf(u)$$

$x=u$ $$f(x^2v+(2x+1)f(x)) = x^2f(v)+(2+x)f(x)$$

$x=1$ $$f(v+3f(1)) = f(v)+3f(1)$$

$f(x)-x$ è periodica di periodo $T=3f(1)$

$$f(x+T)-x-T = f(x)-x$$
$$f(x+T)-T = f(x)$$

$$\begin{aligned} f(x^2v+(2x+1)f(x)) &= x^2f(v)+(2+x)f(x) \\ &= x^2f(v+T)+(2+x)f(x)-x^2T \\ &= f(x^2v+x^2T+(2x+1)f(x))-x^2T \end{aligned}$$

quindi $f(x)-x$ è periodica di periodo x^2T

quindi $f(x)=x+a$ sostituisco e trovo $a=1$

Inizio strada 2

$$f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy \qquad x \leftarrow f(z)$$

$$f(f(z)f(y)+f(f(z))) = 2f(f(z)) + yf(z)$$

surg $\Rightarrow \exists\, \alpha : f(\alpha)=0 \qquad y \leftarrow \alpha \quad : \quad f(f(x)) = 2f(x)+\alpha x$

$$f(f(z)f(y)+2f(z)+\alpha z) = 4f(z)+2\alpha z + yf(z)$$

$\exists\, \beta : f(\beta) = -2 \qquad y \leftarrow \beta \qquad f(\alpha z) = (4+\beta)f(z) + 2\alpha z$

si conclude ...

Strada 3 "so" $f(x)=x+1 \qquad g(x) := f(x)-x$

$$f(x) = g(x)+x$$

$$f(xg(y)+xy+g(x)+x) = 2g(x)+2x+xy$$

$$g(xg(y)+xy+g(x)+x) + xg(y)+\cancel{xy}+g(x)+x = 2g(x)+2x+\cancel{xy}$$

wrong

$\boxed{2} \qquad S_n := x^n + x^{-n}$

a) $(a,b)=1 \qquad S_a, S_b \in \mathbb{Q}$

$$S_n^2 = (x^n+x^{-n})^2 = x^{2n}+2+x^{-2n} = 2+S_{2n}$$

$S_n \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow S_{2n} \in \mathbb{Q}$

$S_n^3 = S_{3n} + 3S_n \qquad S_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow S_{3n} \in \mathbb{Q}$

per induzione : $S_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow S_{mn} \in \mathbb{Q} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

devo dimostrare che $S_1 \in \mathbb{Q}$

$\exists\, h, k : \; ah + bk = 1$

Cosa posso dire di S_{a+b} ?

$S_a S_b = (x^a + x^{-a})(x^b + x^{-b}) = x^{a+b} + x^{-a-b} + x^{a-b} + x^{b-a}$

$\mathbb{Q} \ni S_a S_b = \underset{\alpha}{S_{a+b}} + \underset{\beta}{S_{a-b}} \qquad \underbrace{\alpha+\beta}_{r}, \; \underbrace{\alpha\beta}_{p} \in \mathbb{Q}$

$S_{a+b} S_{a-b} = S_{2a} + S_{2b} \in \mathbb{Q}$

$x^2 - rx + p$ ha radici α e β

con i conti volendo si chiude

oppure scelgo c, d : $c + d = a + b$ e $c - d \neq \pm(a-b)$

definisco r_1 e p_1

$x^2 - r_1 x + p_1$ ha radici α e $S_{c-d} =: \gamma$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - rx + p &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ x^2 - r_1 x + p_1 &= (x-\alpha)(x-\gamma) \end{aligned}\right\} \quad x(r_1 - r) + p - p_1 = (x-\alpha)(\gamma-\beta)$$

$$\alpha = \frac{p_1 - p}{r_1 - r} \in \mathbb{Q}$$

(devo verificare che r_1 e r sono diversi)

si mostra che $n \neq \pm m \Rightarrow S_n \neq S_m$

$S_n S_1 = S_{n+1} + S_{n-1}$ osservo che $x \neq 1 \Rightarrow S_1 > 2$

$2 S_n < S_n S_1 = S_{n+1} + S_{n-1}$ $x + \frac{1}{x} > 2$

$S_{n+1} - S_n > S_n - S_{n-1}$

b) e strada 2 (by Peter Scholze)

$S_a = h$ $S_b = k$

$x^a + x^{-a} = h$ $x^b + x^{-b} = k$

$x^{2a} - h x^a + 1 = 0$ $x^{2b} - k x^b + 1 = 0$

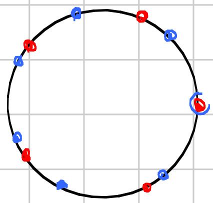
Sono due polinomi che hanno almeno ~~una~~ due radice reale in comune

Hanno almeno un fattore $t x^2 + m x + t$ in comune

$x + x^{-1} = h$ ha due radici reali z e $\frac{1}{z}$

$x^a + x^{-a} = h$ $x^a = z$ o $x^a = \frac{1}{z}$

tutte le radici sono $\sqrt[a]{z}\,\xi^n$ dove ξ è radice a-esima dell'unità e $n = 0, 1, \dots, a-1$



Siccome $(a, b) = 1$, certamente tutte le radici non reali sono diverse

Per il fatto che i polinomi erano monici e per il Lemma di Gauss ho che $t = \pm 1$ e $m \in \mathbb{Z}$

per cui $x + x^{-1} = \pm m \in \mathbb{Z}$

$$(t-x)\left(t-\frac{1}{x}\right) = t^2 - \left(x+\frac{1}{x}\right)t + 1$$

radici x, $\frac{1}{x}$ $\qquad$ $A = s_1 \qquad B = -1$

a, b

$$t^2 - At - B$$

$$a^2 = Aa + B \qquad a^{n+1} = Aa^n + Ba^{n-1}$$

$$b^2 = Ab + B \qquad b^{n+1} = Ab^n + Bb^{n-1}$$

$$a^{n+1} + b^{n+1} = A(a^n + b^n) + B(a^{n-1} + b^{n-1})$$

$$s_{n+1} = s_1 s_n - s_{n-1}$$

$$s_0 = 2 \qquad s_1 = \frac{p}{q} = x + \frac{1}{x}$$

$$s_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} = \frac{c_2}{q^2}$$

$$s_3 - \frac{p}{q}\frac{c_2}{q^2} - s_2 \qquad \text{den } q^3$$

$$s_k = \frac{c_k}{q^k}$$

$A=\{1,2,3,\dots,2010\}$

$a_1, a_2, \dots, a_k$ $\quad \sum a_i = 2010 \quad$ $a_i \geq 2$

Trovare $A_1, \dots, A_k$ $\quad |A_j| = a_i \quad \cup A_i = A$

tali che $\sum_{n_i \in A_j} n_i \equiv 0 \mod 2011 \quad \forall j=1,\dots,k.$

Stessa domanda con $\{1,\dots,2011\}$ e mod 2012

Se $a_i = 2 \quad \forall i \qquad k=1005$

$A_1 = \{1, 2010\} \qquad A_2 = \{2, 2009\} \ \dots$

[Allora per 2012 non si può fare: se $a_i = 2$

$A_i = \{k, n-k\} \qquad 2011 = \overbrace{2+2+2+2+\dots+2}^{1004}+3$

Allora A_i $i=1,\dots,1004$ è della forma $\{k_i, n-k_i\}$

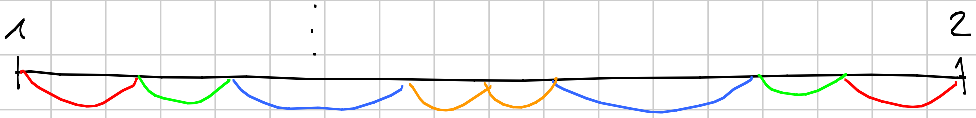
$A_{1005} = \{k_{1005}, n-k_{1005}, 1006\} \qquad n=2012$]

Se a_i sono pari $\forall i$

$A_1 = \{1, 2, \dots \frac{a_1}{2}, 2011-\frac{a_1}{2}, 2011-\frac{a_1}{2}+1, \dots 2010\}$

$A_2 = \{\frac{a_1}{2}+1, \dots \frac{a_1+a_2}{2}, 2011-\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{2} \dots 2011-\frac{a_1}{2}-1\}$

$\vdots$



Oss. 1 2010 è pari, quindi il numero di a_i dispari deve essere pari

Oss. 2 Posso aggregare alcuni "2" e un "3" per fare gli a_i dispari, se riesco a mettere le terne simmetriche rispetto a 1005.5, cioè

$$\bigcup_{|A_i|=3} A_i = 2011 - \bigcup_{|A_i|=3} A_i$$

$a,\ b,\ 2011-(a+b)$

$2011-a,\ 2011-b,\ a+b$

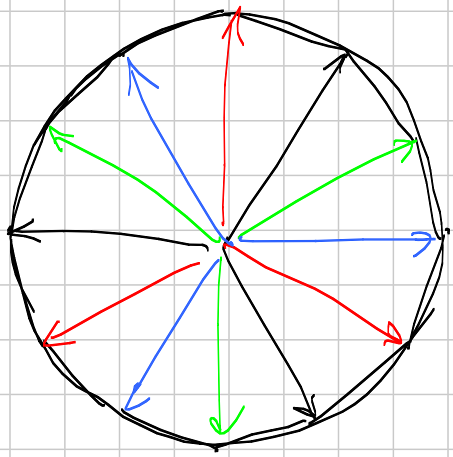
$a \not\equiv 2011-a \mod 2011$

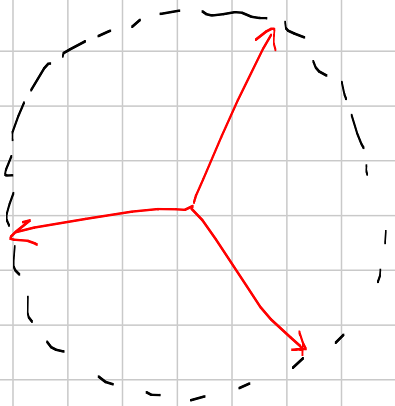
$a \not\equiv 2011-b$ "

$a \not\equiv a+b$ "

se $a, b \leq 1005$

Il caso difficile sarà $a_i = 3\ \forall i$. (gli altri seguono per disgregazione di 2 terne simmetriche)





Ma 2011 è primo, quindi $\mathbb{Z}/_{2011\mathbb{Z}}^{*} = \mathbb{F}_{2011}^{*}$ ha 2010 elementi ed è ciclico

Chiamiamo α un generatore $\quad \alpha^{670} + \alpha^{1340} + \alpha^{2010} \equiv 0 \mod 2011$

$x^3 = 1 \qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \quad x = \alpha^{670}$

$\alpha^{671} + \alpha^{1341} + \alpha \qquad \forall k \quad \alpha^{\frac{p-1}{3}+k} + \alpha^{2\frac{p-1}{3}+k} + \alpha^{k} \equiv 0 \mod 2011$

$k = 0, \ldots, 669$

$-\alpha - \alpha^{671} - \alpha^{1341}$ sarà una delle terne sopra per $k = 335, 336$ quindi le terne sono simmetriche.