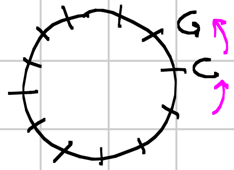
WC 2012 — COMBINATORIA

Titolo nota 03/02/2012



Problema 42 persone tavolo

C → verità

G → risponde a caso

Noto: → risposte di tutti alla domanda "il vicino a dx è C o G?"

→ il numero dei gonzi è $\leq G$.

Tesi: per quali valori di G è possibile, sentite le risposte, individuare con certezza un cavaliere.

Supponiamo $G=1$. Allora o tutti rispondono C → sono tutti C

Oppure c'è una risposta G ⇝ allora chi ha detto G è cavaliere (ed il successivo a dx è G)

Oppure ci sono 2 risposte G ⇝ allora sono consecutive ed il primo è C (ed il successivo è un G che mente)

Altre possibilità non ci sono

Per valori bassi di G (esempio $G=1$) è possibile individuare un caval.

Per valori alti di G (ad esempio $G=30$) non è possibile. Se tutti rispondono cavaliere non si può dire nulla.

Vogliamo dimostrare che è possibile $\iff G \leq 10$.

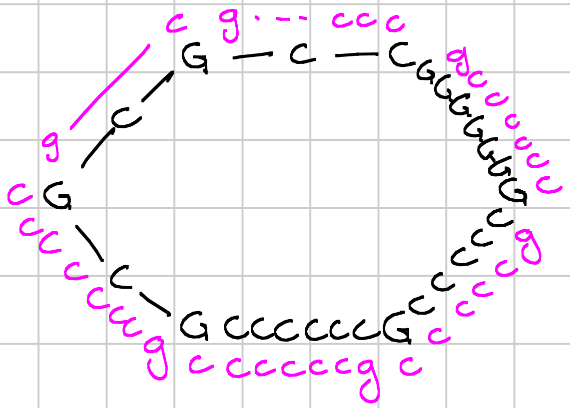
Bisogna dimostrare 2 cose

(1) Per $G=11$ può non essere possibile (quindi non è possibile nemmeno per $G \geq 11$). Bisogna esibire una configurazione di 42 risposte che ammetta varie disposizioni effettive di C/G che la producono. Per ogni persona deve esistere una configurazione in cui lui è G e una in cui lui è C che produce quella configurazione di risposte (e con ≤ 11 G in totale)

(2) Per G = 10 è possibile individuare un C (quindi è possibile anche per $G \leq 10$).

Punto (1) C = cavaliere G = gonzo

c = risposta cav. g = risposta gonzo



gonzi ai vertici : 5

gonzi sui lati : 6

Totale 11 gonzi

La configurazione data può produrre come risposte del tipo

cccccg cccccg ripetuto 6 volte

Anche le configurazioni ottenute ruotando le persone "di 60°" possono produrre le stesse risposte.

D'altra parte ogni persona si ritrova ad essere sia C sia G in qualcuna delle configurazioni ruotate.

Punto (2)

Fatto 1 Se ho una risposta g, allora chi l'ha detta o il vicino a dx sono G

g ?

G ? → ok

C G → ok

Fatto 2 Supponiamo di avere una lunga fila di risposte c:

cccccccc. Allora se l'ultimo è G, vuol dire che tutti

CCC....C nella fila sono G (se ci fosse un C da qualche parte, sarebbero C da lì in poi)

To do: data una qualunque successione di risposte, individuare un cavaliere.

Idea: prendere l'ultimo (a dx) di una lunga fila di risposte c.

<u>Notazione</u>: k = numero di archi massimali con risposta c

= " " " " " " g

$d_1, \dots, d_k$ = lunghezze dei k archi con risposte g

Prendiamo il più lungo arco di cccc (o uno dei più lunghi). Supponiamo che l'ultimo a dx sia G. Allora dico che ci sono almeno 11 G tra le persone. Questo è assurdo se $G \leq 10$.

Quanti sono come minimo i gonzi lungo il tavolo?

$$c\ \underbrace{\boxed{gg}}_{G}\ \underbrace{\boxed{gg}}_{G}\ \underbrace{\boxed{gg}}_{G}\ c \qquad\qquad c\ \underbrace{\boxed{gg}}_{G}\ \underbrace{\boxed{gg}}_{G}\ \underbrace{\boxed{gg}}_{G}\ \underbrace{\boxed{gc}}_{G}$$

Per avere un tratto di g lungo di servono almeno $\left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil$ gonzi, Quindi servono almeno

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil \quad \text{gonzi per avere le risposte g}$$

Inoltre servono tanti G quanta è la lunghezza del + lungo arco di c. Le risposte c sono $42 - \sum d_i$ e sono divise in k archi, quindi almeno un arco ha lunghezza

$$\left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil$$

Quindi i G in tutto sono $\geq$

$$\underbrace{\left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil}_{\text{G nel + lungo arco di c}} + \underbrace{\sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil}_{\text{G nei seguenti di risposte g}}$$

<u>Achtung!</u> Ci può essere un "overlap" di 1 tra i 2 gruppi

$$c\,\underbrace{\boxed{gg}\,\boxed{gg}}_{\substack{G\quad G\\ \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil}}\;\underbrace{c\,c\,c\,c\,c\,c\,c\,c}_{\text{lungh. arco}}\,g$$

$$c\,\underbrace{\boxed{gg}\,\boxed{g\,g}}_{\substack{G\quad G\\ \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil}}\;\overbrace{c\,c\,c\,c\,c\,c\,c\,c\,g}^{\text{lungh. arco}}$$

se il guasto sta qui, l'ho contato 2 volte

Quindi il conto precedente è giusto se il tratto di g che precede l'arco di c di lungh. max è pari. Altrimenti è sbagliato di 1.

<u>Caso 1</u>: il tratto di g precedente è pari. Voglio dim. che

$$\left\lceil \frac{42-\sum d_i}{k}\right\rceil + \sum \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil \geq 11$$

Pongo $\ell := \sum \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil$. Allora $\ell = \sum \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil \geq \frac{1}{2}\sum d_i$, da cui

$$\sum d_i \leq 2\ell$$

Inoltre $\ell = \sum \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil \geq k$

$$\left\lceil \frac{42-\sum d_i}{k}\right\rceil + \underbrace{\sum \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil}_{\ell} \geq \frac{42-\sum d_i}{k} + \ell$$

$$\geq \frac{42-2\ell}{k} + \ell$$

$$\geq \frac{42-2\ell}{\ell} + \ell = \underbrace{\boxed{\frac{42}{\ell} + \ell}}_{\geq 13} - 2 = 11$$

<u>Caso 2</u> Il tratto di g precedente è dispari. Ora il numero dei G è almeno

$$\left\lceil \frac{42-\sum d_i}{k}\right\rceil + \sum \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil - 1$$

Supponiamo WLOG che il tratto precedente sia lungo d_1. Poniamo

$$\ell := \sum \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil \qquad \text{Ora} \quad \ell = \left\lceil \frac{d_1}{2}\right\rceil + \sum_{i=2}^{k} \left\lceil \frac{d_i}{2}\right\rceil$$

$$\geq \frac{d_1+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k} d_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i + \frac{1}{2}$$

Quindi $\sum d_i \leq 2\ell - 1$. Come prima $\ell = \sum \lceil \frac{d_i}{2} \rceil \geq k$

Allora

$$\text{numero gonzi} \geq \left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil + \sum \left\lceil \frac{d_i}{2} \right\rceil - 1$$

$$= \left\lceil \frac{42 - \sum d_i}{k} \right\rceil + \ell - 1$$

$$\geq \left\lceil \frac{42 - 2\ell + 1}{k} \right\rceil + \ell - 1$$

$$\geq \left\lceil \frac{42 - 2\ell + 1}{\ell} \right\rceil + \ell - 1$$

$$= \left\lceil \frac{43 - 2\ell}{\ell} \right\rceil + \ell - 1 = \left\lceil \frac{43}{\ell} - 2 \right\rceil + \ell - 1$$

$$= \underbrace{\left\lceil \frac{43}{\ell} \right\rceil + \ell}_{\geq 14} - 3 \quad = 11.$$

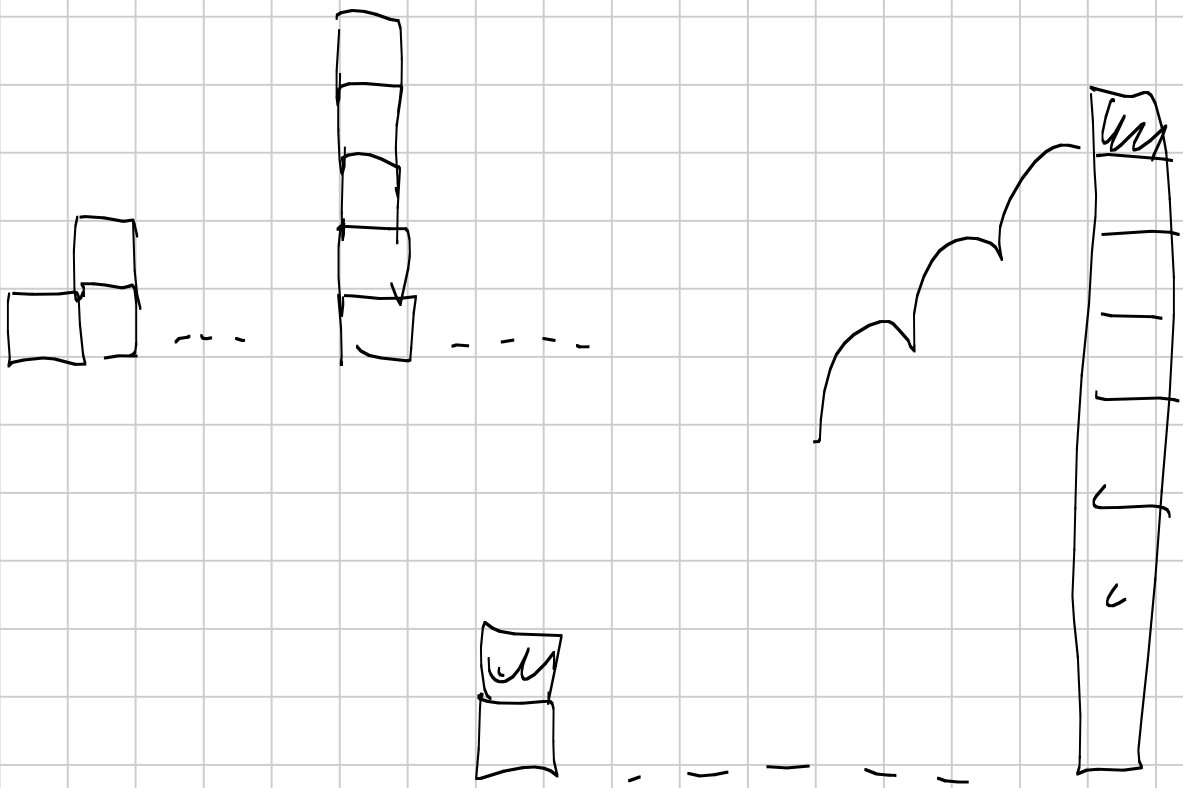
<u>Oss. 1</u> Il controesempio è in un certo senso obbligato (si può scegliere tra esagono ed ettagono)

<u>Oss. 2</u> Se invece di 42 c'è n il numero max di G viene $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 2$ $\rightsquigarrow$ si determina un C, con uno in più no.

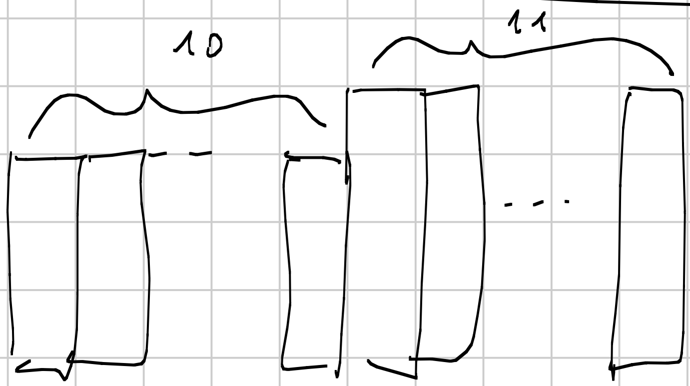
$$1, 2, \dots, 20$$

$$(b, b+k) \qquad k \geq 2$$

$$(b+1, b+k-1)$$

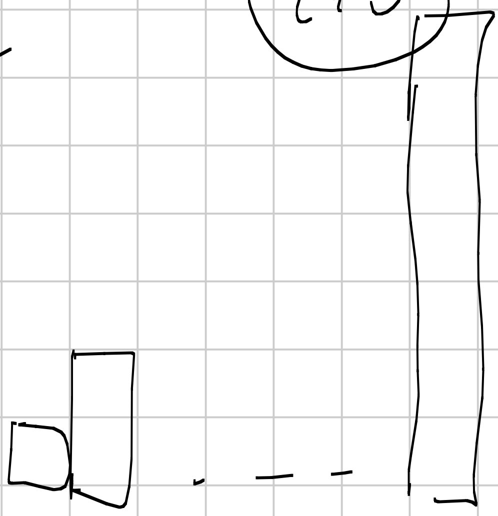


Conf. finale



$$\frac{20 \cdot 21}{2}$$

210



$(N_1, N_2, \dots, N_{20})$

$$\boxed{U = T_{N_1} + T_{N_2} + \dots + T_{N_{20}}} \leftarrow$$

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$k \geq 2$

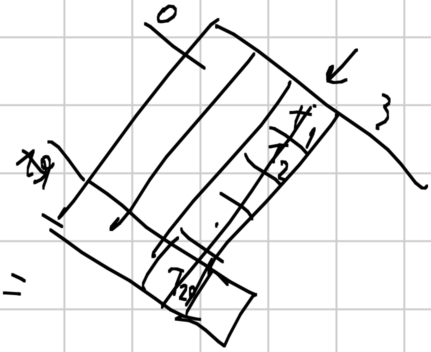
$$T_{m+k} + T_m$$

$$T_{m+k-1} \qquad T_{m+1}$$

$$T_{m+k} + T_m = T_{m+k-1} + (m+k) + T_{m+1} - (m+1) =$$

$$= T_{m+k-1} + T_{m+1} + (k-1)$$

$$U = T_1 + T_2 + \dots + T_{20} =$$

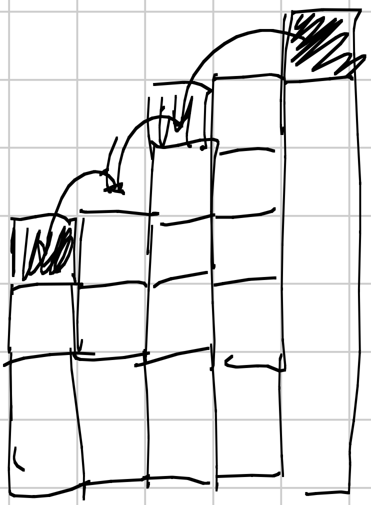


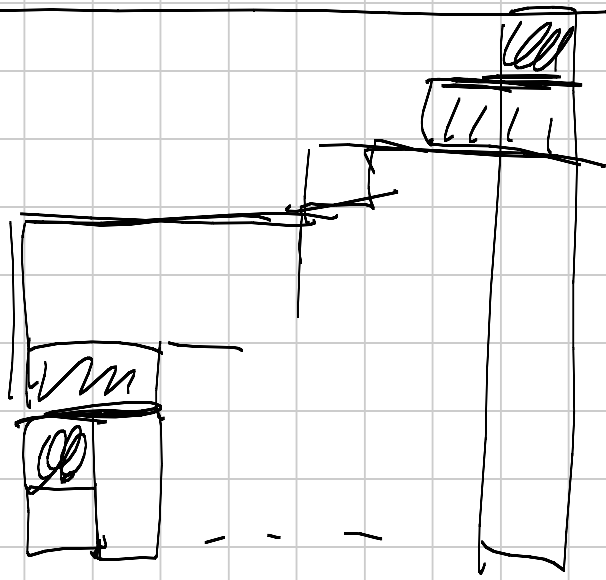
$$= \binom{19+3}{3} = \binom{22}{3} = \frac{22 \cdot \overset{7}{\cancel{21}} \cdot \overset{10}{\cancel{20}}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} =$$

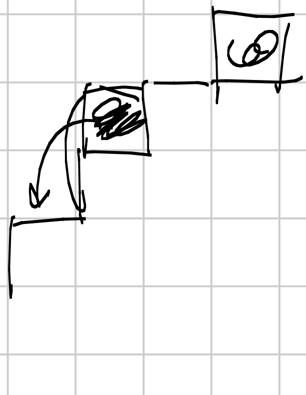
$$= 1540$$

$$U = 10\left(T_{10} + T_{11}\right) = 10 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{11 \cdot 12}{2}\right) = 10 \cdot 11^2 = 1210$$

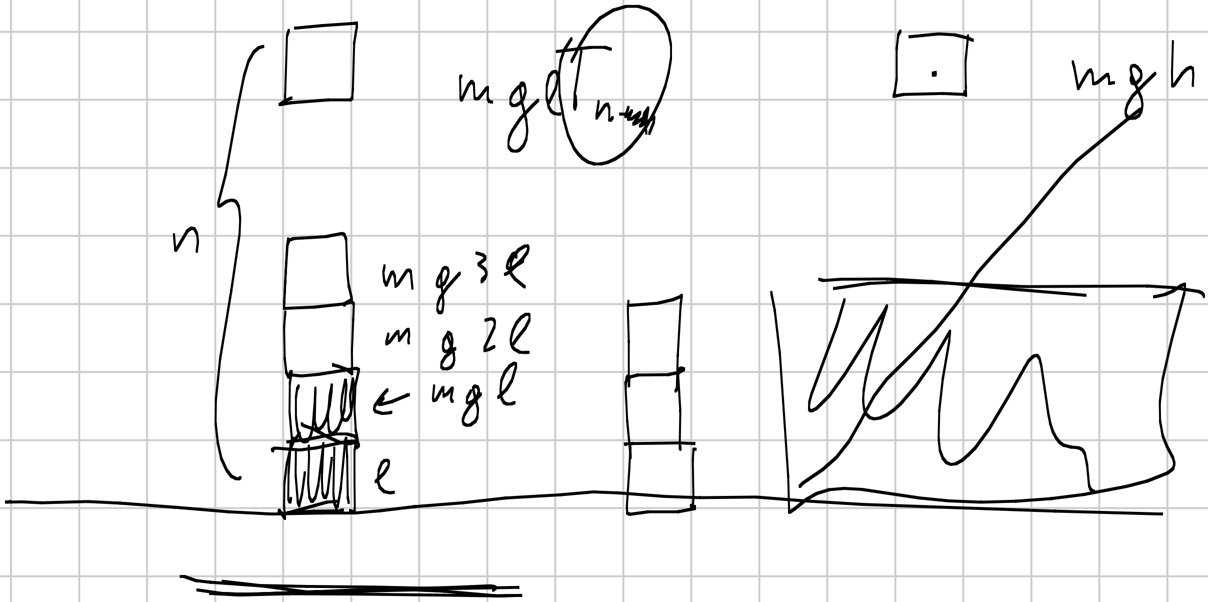
[illegible] $U_{in} - U_f = 330$

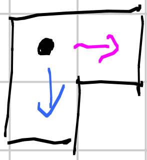






U

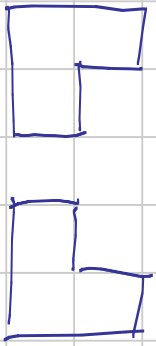

mgl n
n
mg3l
mg2l
mgl
l
mgh



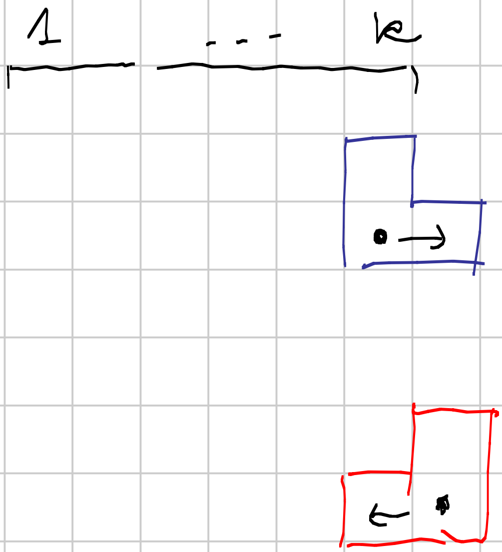
COLONNE

- riesco a ottenere $670k$ •
  nelle prime k colonne

"guardano avanti"



"guardano indietro"

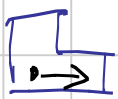


pallini nelle prime k colonne =

$$= \frac{2010k - 2\underbrace{a_k}_{\text{termini della col. } k} - \underbrace{b_k}_{\text{termini da col. } k+1}}{3} + a_k =$$

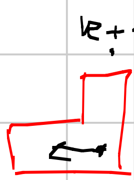
$$= 670k + \frac{a_k - b_k}{3}$$

- $a_k > b_k$
  sposto $s_k = \dfrac{a_k - b_k}{3}$ •



  e ho $a_k \geq 3s_k \geq 2s_k$ candidati

- $a_k < b_k$
  sposto $s_k = \dfrac{b_k - a_k}{3}$ •



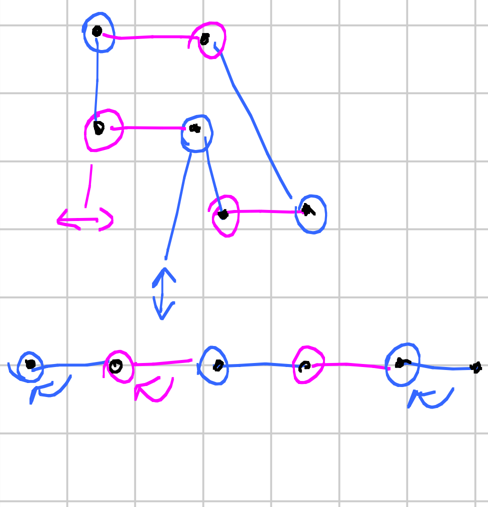
  e ho $b_k \geq 3s_k \geq 2s_k$ candidati

- Scelgo s_k COPPIE (disgiunte) di candidati per la colonna k.

Stessa cosa posso fare per le righe
- Sceglierò r_k COPPIE di candidati per uno spostamento ↕ che aggiusti le prime k righe.

Creo un GRAFO.
I nodi sono i trimini candidati a spostamenti.
due trimini sono collegati se appartengono alla stessa coppia.

- ogni nodo ha grado al + 2.



- il grafo è unione disgiunta di cammini e cicli

- a ogni arco assegno un suo vertice in modo che a 2 archi non tocchi lo stesso.

Alla fine faccio tutti gli spostamenti!