MISCELLANEA WC 2012

Titolo nota 27/01/2012

$\boxed{1}$ $$f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Oss: f è biunivoca

$$f(\underbrace{af(y)+b}) = \text{biunivoca} \qquad x \neq 0$$

surgettiva iniettiva

$$y = uf(v)+f(u) \quad \Rightarrow \quad f(y) = 2f(u)+uv$$

$$f(x(2f(u)+uv)+f(x)) = 2f(x)+x(uf(v)+f(u))$$

$$f(xuv+2xf(u)+f(x)) = xuf(v)+2f(x)+xf(u)$$

$x=u$ $$f(x^2v+(2x+1)f(x)) = x^2f(v)+(2+x)f(x)$$

$x=1$ $$f(v+3f(1)) = f(v)+3f(1)$$

$f(x)-x$ è periodica di periodo $T = 3f(1)$

$$f(x+T)-x-T = f(x)-x$$
$$f(x+T)-T = f(x)$$

$$\begin{aligned} f(x^2v+(2x+1)f(x)) &= x^2f(v)+(2+x)f(x) \\ &= x^2f(v+T)+(2+x)f(x)-x^2T \\ &= f(x^2v+x^2T+(2x+1)f(x))-x^2T \end{aligned}$$

quindi $f(x)-x$ è periodica di periodo x^2T

quindi $f(x) = x+a$ sostituisco e trovo $a=1$

Inizio strada 2

$$f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy \qquad x \leftarrow f(z)$$

$$f(f(z)f(y)+f(f(z))) = 2f(f(z)) + yf(z)$$

surg $\Rightarrow \exists \alpha : f(\alpha)=0 \qquad y \leftarrow \alpha \quad : \quad f(f(x)) = 2f(x)+\alpha x$

$$f(f(z)f(y)+2f(z)+\alpha z) = 4f(z)+2\alpha z + yf(z)$$

$\exists \beta : f(\beta) = -2 \qquad y \leftarrow \beta \qquad f(\alpha z) = (4+\beta)f(z)+2\alpha z$

si conclude ...

~~Strada 3 "so" $f(x) = x+1$ $\qquad g(x) := f(x)-x$~~

~~$$f(x) = g(x)+x$$~~

~~$$f(xg(y)+xy+g(x)+x) = 2g(x)+2x+xy$$~~

~~$$g(xg(y)+xy+g(x)+x)+xg(y)+x\cancel{y}+g(x)+x = 2g(x)+2x+x\cancel{y}$$~~

wrong

$\boxed{2}$ $\qquad S_n := x^n + x^{-n}$

a) $\quad (a,b)=1 \qquad S_a, S_b \in \mathbb{Q}$

$$S_n^2 = (x^n+x^{-n})^2 = x^{2n}+2+x^{-2n} = 2+S_{2n}$$

$S_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow S_{2n} \in \mathbb{Q}$

$S_n^3 = S_{3n} + 3S_n \qquad S_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow S_{3n} \in \mathbb{Q}$

per induzione : $S_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow S_{mn} \in \mathbb{Q} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

devo dimostrare che $S_1 \in \mathbb{Q}$

$\exists\, h, k : ah + bk = 1$

Cosa posso dire di S_{a+b} ?

$$S_a S_b = (x^a + x^{-a})(x^b + x^{-b}) = x^{a+b} + x^{-a-b} + x^{a-b} + x^{b-a}$$

$$\mathbb{Q} \ni S_a S_b = \underset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{S_{a+b}}} + \underset{\beta}{\overset{\shortparallel}{S_{a-b}}} \qquad \underset{r}{\underset{\shortparallel}{\alpha+\beta}}, \ \underset{p}{\underset{\shortparallel}{\alpha\beta}} \in \mathbb{Q}$$

$$S_{a+b} S_{a-b} = S_{2a} + S_{2b} \in \mathbb{Q}$$

$x^2 - rx + p$ ha radici α e β

con i conti volendo si chiude

oppure scelgo c, d : $c + d = a + b$ e $c - d \neq \pm(a-b)$
definisco r_1 e p_1

$x^2 - r_1 x + p_1$ ha radici α e $S_{c-d} =: \gamma$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - rx + p &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ x^2 - r_1 x + p_1 &= (x-\alpha)(x-\gamma) \end{aligned}\right\} \quad x(r_1 - r) + p - p_1 = (x-\alpha)(\gamma - \beta)$$

$$\alpha = \frac{p_1 - p}{r_1 - r} \in \mathbb{Q}$$

(devo verificare che r_1 e r sono diversi)
si mostra che $n \neq \pm m \Rightarrow S_n \neq S_m$

$S_n S_1 = S_{n+1} + S_{n-1}$ osservo che $x \neq 1 \Rightarrow S_1 > 2$

$2 S_n < S_n S_1 = S_{n+1} + S_{n-1}$ $x + \frac{1}{x} > 2$

$S_{n+1} - S_n > S_n - S_{n-1}$

b) e strada 2 (by Peter Scholze)

$S_a = h$ $S_b = k$

$x^a + x^{-a} = h$ $x^b + x^{-b} = k$

$x^{2a} - h x^a + 1 = 0$ $x^{2b} - k x^b + 1 = 0$

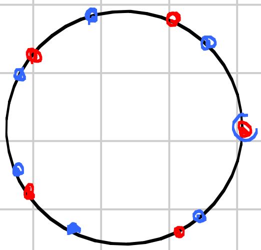
Sono due polinomi che hanno almeno ~~una~~ due radice reale in comune

Hanno almeno un fattore $t x^2 + m x + t$ in comune

$x + x^{-1} = h$ ha due radici reali z e $\frac{1}{z}$

$x^a + x^{-a} = h$ $x^a = z$ o $x^a = \frac{1}{z}$

tutte le radici sono $\sqrt[a]{z}\, \xi^n$ dove ξ è radice a-esima dell'unità e $n = 0, 1, \dots, a-1$



Siccome $(a, b) = 1$, certamente tutte le radici non reali sono diverse

Per il fatto che i polinomi erano monici e per il Lemma di Gauss ho che $t = \pm 1$ e $m \in \mathbb{Z}$ per cui $x + x^{-1} = \pm m \in \mathbb{Z}$

$$(t-x)\left(t-\frac{1}{x}\right) = t^2 - \left(x+\frac{1}{x}\right)t + 1$$

radici $x, \frac{1}{x}$

$A = s_1 \qquad B = -1$

a, b

$$t^2 - At - B$$

$$a^2 = Aa + B \qquad a^{n+1} = Aa^n + Ba^{n-1}$$

$$b^2 = Ab + B \qquad b^{n+1} = Ab^n + Bb^{n-1}$$

$$a^{n+1} + b^{n+1} = A(a^n + b^n) + B(a^{n-1} + b^{n-1})$$

$$s_{n+1} = s_1 s_n - s_{n-1}$$

$$s_0 = 2 \qquad s_1 = \frac{p}{q} = x + \frac{1}{x}$$

$$s_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{p}{q} = \frac{c_2}{q^2}$$

$$s_3 = \frac{p}{q}\,\frac{c_2}{q^2} - s_2 \qquad \text{den } q^3$$

$$s_k = \frac{c_k}{q^k}$$

$A = \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$

$a_1, a_2, \dots, a_k \qquad \sum a_i = 2010 \qquad a_i \geq 2$

Trovare $A_1, \dots, A_k \quad |A_j| = a_j \quad \cup A_i = A$

tali che $\sum_{n_i \in A_j} n_i \equiv 0 \mod 2011 \quad \forall j = 1, \dots, k.$

Stessa domanda con $\{1, \dots, 2011\}$ e mod 2012

Se $a_i = 2 \quad \forall i \qquad k = 1005$

$A_1 = \{1, 2010\} \qquad A_2 = \{2, 2009\} \dots$

[Allora per 2012 non si può fare: se $a_i = 2$

$A_i = \{k, n-k\} \qquad 2011 = \overbrace{2+2+2+2+\dots+2}^{1004}+3$

Allora A_i $i = 1, \dots, 1004$ è della forma $\{k_i, n-k_i\}$

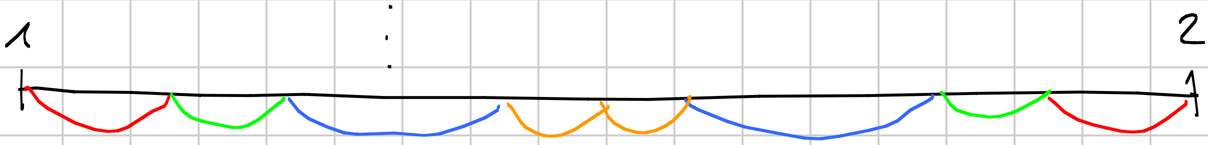
$A_{1005} = \{k_{1005}, n-k_{1005}, 1006\} \qquad n = 2012$]

Se a_i sono pari $\forall i$

$A_1 = \{1, 2, \dots \frac{a_1}{2}, 2011 - \frac{a_1}{2}, 2011 - \frac{a_1}{2} + 1, \dots 2010\}$

$A_2 = \{\frac{a_1}{2} + 1, \dots \frac{a_1 + a_2}{2}, 2011 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} - \quad 2011 - \frac{a_1}{2} - 1\}$

$\vdots$



Oss. 1 2010 è pari, quindi il numero di a_i dispari deve essere pari

Oss. 2 Posso aggregare alcuni "2" e un "3" per fare gli a_i dispari, se riesco a mettere le terne simmetriche rispetto a 1005.5, cioè

$$\bigcup_{|A_i|=3} A_i = 2011 - \bigcup_{|A_i|=3} A_i$$

$a, b, 2011-(a+b)$

$2011-a, 2011-b, a+b$

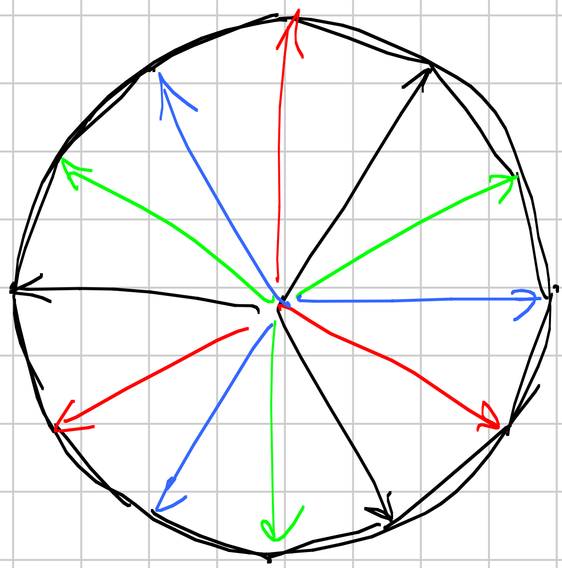
$a \not\equiv 2011-a \mod 2011$

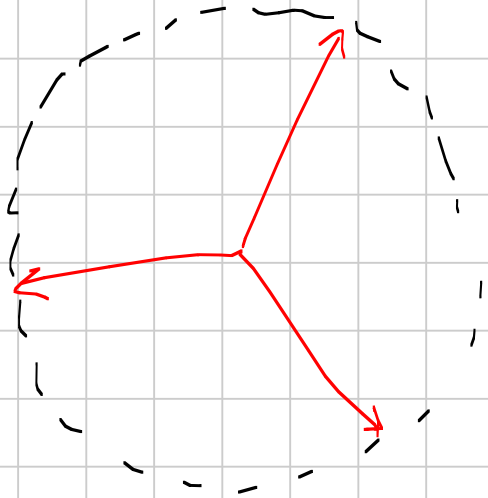
$a \not\equiv 2011-b$ "

$a \not\equiv a+b$ "

se $a, b \leq 1005$

Il caso difficile sarà $a_i = 3 \ \forall i$. (gli altri seguono per disgregazione di 2 terne simmetriche)





2010-agono

Ma 2011 è primo, quindi $\mathbb{Z}/_{2011\mathbb{Z}}^{*} = \mathbb{F}_{2011}^{*}$ ha 2010 elementi ed è ciclico

Chiamiamo α un generatore $\qquad \alpha^{670} + \alpha^{1340} + \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\alpha^{2010}}} \equiv 0 \mod 2011$

$$x^3 = 1 \qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \leftarrow x = \alpha^{670}$$

$$\alpha^{671} + \alpha^{1341} + \alpha \qquad \forall k \quad \alpha^{\frac{p-1}{3}+k} + \alpha^{2\frac{p-1}{3}+k} + \alpha^{k} \equiv 0 \mod 2011$$

$$k = 0, \dots, 669$$

$-\alpha - \alpha^{671} - \alpha^{1341}$ sarà una delle terne sopra per $k = 335, 336$ quindi le terne sono simmetriche.