ALGEBRA

wc 2013

Note Title 31/01/2013

A4. I numeri reali positivi x, y e z soddisfano $xyz + xy + yz + zx = x + y + z + 1$. Dimostrare che

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+y^2}{1+y}} + \sqrt{\frac{1+z^2}{1+z}}\right) \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{5/8}.$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \overbrace{xyz}^{P} + \overbrace{xy+yz+zx}^{Q} + \overbrace{x+y+z}^{S} + 1$$

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$$

$$(a+d)(b+d)(c+d) = abc + abd + bcd + acd + ad^2 + bd^2 + cd^2 + d^3$$

$a = 1$

$$= bc + bd + bcd + cd + d^2(1+b+c+d) = Q + P + d^2(1+S)$$

$x \quad y \quad z$

$$= (1+S)(1+d^2)$$

vincolo $P + Q = S + 1$

$$(1+z)(x+z)(y+z) = (1+z^2)(1+x+y+z)$$

$$\frac{1+z^2}{1+z} = \frac{(x+z)(y+z)}{(1+x+y+z)} \quad \text{e cicliche}$$

$$LHS^2 = AM^2 \le QM^2 = \frac{1}{3}\sum \frac{1+x^2}{1+x} \overset{?}{\le} RHS^2$$

$$\sum \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{\sum(z^2+xy+yz+zx)}{1+S} = \frac{\overbrace{S^2-2Q}^{\sum z^2} + 3Q}{1+S} = \frac{S^2+Q}{1+S} \overset{?}{\le} 3\left(\frac{S}{3}\right)^{5/4}$$

$$\sum \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{\sum(1+x^2)(1+y+z+yz)}{(1+x)(1+y)(1+z)} = \frac{\sum(1+y+z+yz+x^2+x^2y+x^2z+x^2yz)}{1+\sum x+\sum xy+xyz}$$

$$= \frac{3+2S+Q+S^2-2Q+\overbrace{QS-3P}+PS}{1+S+Q+P}$$

$$= \frac{\cancel{3}+2\cancel{S}+2Q+S^2-3(\cancel{S}+\cancel{1})+S(S+\cancel{1})}{2(1+S)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_S x^2y = QS - 3P\\ &QS = \sum(x^2y + xy^2 + xyz)\end{aligned}}$$

$$= \frac{S^2+Q}{1+S} \overset{?}{\le} 3\left(\frac{S}{3}\right)^{5/4}$$

$$\sqrt[3]{xyz} \le \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \le \frac{x+y+z}{3}$$

$$Q \le \frac{1}{3}S^2$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{S^2+Q}{1+S} \le \frac{4}{9}\,\frac{S^2}{1+S} \overset{?}{\le} \left(\frac{S}{3}\right)^{5/4} \qquad \alpha = \frac{S}{3}$$

$$4\alpha^{3/4} \overset{?}{\le} 1+3\alpha \qquad \sqrt[4]{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot 1} \overset{!}{\le} \frac{\alpha+\alpha+\alpha+1}{4}$$

[A5.] Dimostrare che se a, b e c sono le lunghezze dei lati di un triangolo acutangolo e R è il raggio della circonferenza circoscritta, allora

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3} \geq \sqrt{3}R$$

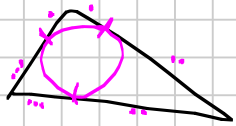
$\boxed{4RS = abc}$ facile da dimostrare

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \dots = \sum(2a^2b^2 - a^4)$$ Erone

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\sum(2a^2b^2-a^4)} \qquad a^2=\alpha \quad b^2=\beta \quad c^2=\gamma$$

$a^2+b^2>c^2$ e cicliche $\qquad a^2, b^2, c^2$ sono i lati di un triangolo

$a^2 = x+y \qquad b^2 = y+z \qquad c^2 = z+x \qquad x,y,z>0$



$$R^2 = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\sum(2(x+y)(y+z)-(x+y)^2)} \overset{?}{\leq} \frac{1}{3}\left(\frac{\sum(x+y)^2}{\sum(x+y)^{3/2}}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sum\alpha^2}{\sum\alpha^{3/2}}\right)^2 \geq \frac{(\sum\alpha^2)^2}{\sum\alpha^2\sum\alpha} = \frac{\sum\alpha^2}{\sum\alpha}$$

$$\boxed{\left(\sum\alpha^{3/2}\right)^2 \leq \sum\alpha^2\sum\alpha}$$

$$\sum(x^2+y^2+2xy)$$

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\sum(2(x+y)(y+z)-(x+y)^2)} \overset{\text{hope}}{\leq} \frac{1}{3}\,\frac{\sum(x+y)^2}{\sum(x+y)}$$

$$3\left(\sum_s x^2y + 2xyz\right)\sum x \overset{?}{\leq} 4\sum(x^2+xy)\sum xy$$

$$3\sum_s(x^3y + x^2y^2 + x^2yz) + 6\sum x^2yz \overset{?}{\leq} 4\sum(x^2+xy)(xy+yz+zx)$$

$$\sum_s(\cancel{3}x^3y + \cancel{3}x^2y^2 + \cancel{6x^2yz}) \overset{?}{\leq} \sum_s(\cancel{4}x^3y + \cancel{2}x^2y^2 + \cancel{6x^2yz})$$

$$\sum_s x^2y^2 \overset{!}{\leq} \sum_s x^3y$$ vera per Muirhead / bunching

A6. Per ogni intero $n \geq 3$, si determini l'insieme dei valori assunti dall'espressione

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}$$

(DAN SCHWARZ)

al variare delle n-uple di reali $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 1$ che soddisfano $|x_k - x_{k+1}| \leq 1$ per ogni $1 \leq k \leq n-1$. Si determini anche quando vengono assunti i valori estremali.

$x_{n+1} := x_1$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq n}$$ AM-GM uguale se $x_i \equiv \text{cost} \geq 1$

Fatto: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato

contiene il bordo delimitato da '$\leq$'

$f(A)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$

ovvero è unione di intervalli chiusi

se A è connesso, allora $f(A)$ è connesso (... un intervallo chiuso)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} \quad \text{è continua}$$

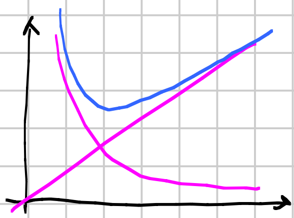
$\min_i x_i = \alpha \geq 1$ se divido le x_i per α trovo una nuova $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ tale che soddisfa i vincoli e $f(x) = f(x')$

posso cercare $\mathrm{Im}(f)$ lavorando solo sull'insieme A dei punti con $\min_i x_i = 1$ che soddisfano il vincolo.

→ si vede che A è chiuso, limitato, connesso (e convesso)

→ il max viene assunto da un punto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e tutti i valori fra min e max vengono assunti

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{array} \qquad \cdots + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \cdots$$



funzione convessa di y → il max è per $y = a$ o $y = b$

$a \leq y \leq b$

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{z} < \frac{x}{b} + \frac{b}{z} \qquad xbz + a^2 b < xaz + ab^2$$

$$(b-a)(xz - ab) < 0$$

$b - a > 0$

$$\begin{cases} xz < ab \to y = b \\ xz > ab \to y = a \\ xz = ab \to \text{posso scegliere} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Caso speciale: } 1 \le i \le n-2 \,,\; x \vee z \ge 2}$

$y \ge 1 \quad y > x-1 \quad y \ge z-1 \qquad y \ge 1 \vee (x \vee z - 1) = x \vee z - 1 =: a$

$y \le x+1 \quad y \le z+1 \qquad y \le x \wedge z + 1 \qquad =: b$

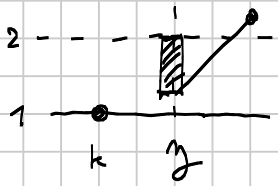
$xz < ab \qquad u = x \wedge z \qquad v = x \vee z$

$uv < (v-1)(u+1) = uv + v - u - 1$

$v - u > 1$

$$\begin{cases} \text{se } |x-z| > 1 & y = x \wedge z + 1 \quad (1) \\ \text{se } |x-z| < 1 & y = x \vee z - 1 < x \wedge z \quad (2) \\ \text{se } |x-z| = 1 & y = a \text{ o } y = b \end{cases}$$

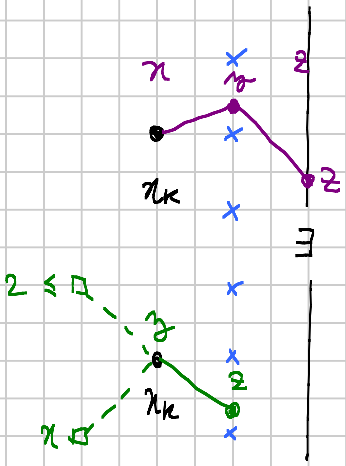
$\longrightarrow$ $x_k = 1$ adiacente sta tra 1 e 2. Se il biadiacente non esiste o è ≤ 2



$a = 1$ e $b = 2$ $\longrightarrow$ adiacente intero

Se biadiac. > 2 (1) adiacente $= 2$ $\longrightarrow$ intero

$\longrightarrow$ $x_k \ge 2$ intero $\Rightarrow$ adiacenti interi

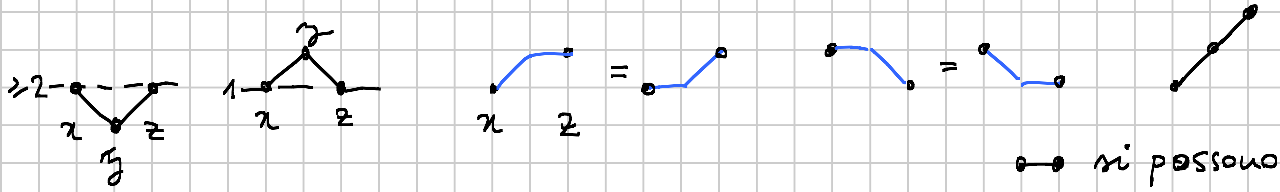


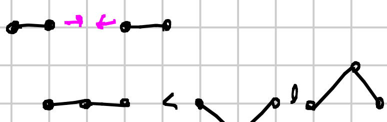
- se biad non ∃ ovvio
- se ∃ RPA $\quad$ y adiac non (2) $\quad |x-z| < 1$ (2) $\quad$ assurdo

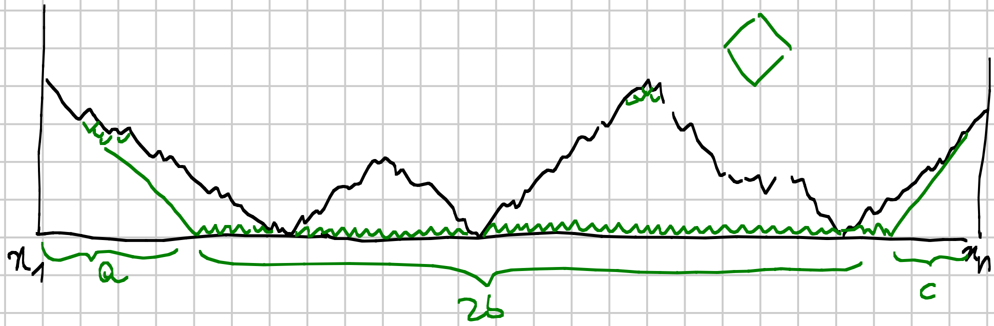
$y = z+1$

z adiac $\Rightarrow$ non (2) ma (2) assurdo

$\boxed{x_k \text{ tutti interi}}$







$n = a + 2b + c + 1$ $\qquad$ $x_1 = a+1 \quad x_a = 1$

$x_2 = a \qquad x_{a+1} = 2$

$x_3 = a - 1 \qquad 1$

$\cdots \qquad \vdots$

$$f(x_1 \dots x_n) = \underbrace{\frac{a+1}{a} + \frac{a}{a-1} + \dots + \frac{2}{1}}_{a} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \dots + \frac{2}{1}}_{2b} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{c}{c+1}}_{c} + \underbrace{\frac{c+1}{a+1}}_{1}$$

$c \to c+1$
$a \to a-1$ ... conti conviene se $c+1>a$, pari $c+1=a$ peggiora $c+1<a$

$a=0$ .... conviene $b=0$ $\boxed{x_k = k \ \forall k}$ $\boxed{f = 2n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

$c=0$ .... conviene $b = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ $f = \dots$ minore ↗

---

per induzione

$n \to n+1$ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ $f = \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1}$

$x_1, \dots x_n, \not{\;}$ $\tilde{f} = \frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \leq 2n + \sum_1^n \frac{1}{k}$

$f - \tilde{f} = \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} - \frac{x_n}{x_1} \overset{\text{hope}}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1}$

x_{n+1} deve essere a o b $x_n - 1$, $x_n + 1$, $x_1 - 1$, $x_1 + 1$, 1

A7. Determinare tutti gli α reali tali che esiste una e una sola funzione dai reali in sé che soddisfi

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha y$$

per ogni x e y.

$x \leftarrow 0$ $f(y + f(y)) = m^2 + \alpha y$ $m := f(0)$

$\alpha = 0$ $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ sono soluzioni NO

$\alpha \neq 0$ biunivoca f surgettiva $x + f(x)$ iniettiva

$\exists k : f(k) = 0$

$x \leftarrow -x$ $\forall x$ $f(-x) = \pm f(x)$ $x \leftarrow k$ $f(-k) = \pm f(k) = 0$

$x \leftarrow 0$, $y \leftarrow \pm k$ $m^2 \pm \alpha k = f(\pm k + 0) = 0$ $\Rightarrow k = 0$, $m = 0$

$f(0) = 0$ è l'unico punto in cui si annulla

$$\boxed{f(y + f(y)) = \alpha y}$$

$y \leftarrow y + f(y)$ $f(\underbrace{x^2 + y + f(y)}_{u} + \underbrace{\alpha y}_{v}) = f(x)^2 + \alpha y + \alpha f(y) = f(\underbrace{x^2 + y + f(y)}_{u}) + \alpha f(\underbrace{y}_{\frac{v}{\alpha}})$

$\boxed{f(u+v) = f(u) + \alpha f\left(\frac{v}{\alpha}\right)}$ $\forall v \in \mathbb{R}$ $\forall u \geq c(v) = \frac{v}{\alpha} + f\left(\frac{v}{\alpha}\right)$

M molto grande

$$f(M+u+v) = f(M+u) + \alpha f\left(\frac{v}{\alpha}\right) = f(M) + \alpha f\left(\frac{u+v}{\alpha}\right)$$

$$f(M) + \alpha f\left(\frac{u}{\alpha}\right)$$

$$f\left(\frac{u+v}{\alpha}\right) = f\left(\frac{u}{\alpha}\right) + f\left(\frac{v}{\alpha}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} M+u &\geq c(v) \\ M &\geq c(u+v) \\ M &\geq c(u) \end{aligned}\right\} \forall u,v \qquad M \geq \max\left(c(u), c(u+v), c(v)-u\right)$$

$$\boxed{\forall x,y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)} \qquad \text{Cauchy}$$

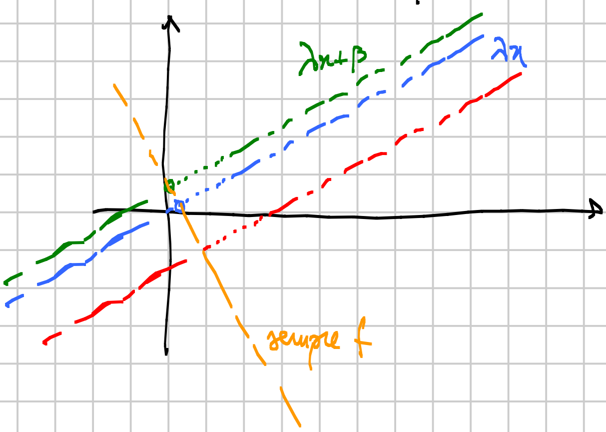
* f continua
* f limitata in un intervallo
* f monotona
* $\exists$ un "quadratino" nel piano non toccato dal grafico di f

$y \leftarrow 0 \qquad f(x^2) = f(x)^2 \geq 0 \qquad f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

IV quadrante è vuoto

$f(1) = \lambda \quad \Rightarrow \quad f(2) = 2\lambda, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}, \quad \dots \quad f(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad f(\alpha) = \beta \neq \lambda\alpha \qquad f(\alpha+1) = \beta + \lambda \quad \dots \quad f(\alpha + x) = \beta + \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$



$f(x) = \lambda x \qquad$ sostituisco e trovo $\lambda = 1, \alpha = 2$

(che verifica)