WC 2013 - COMBINATORIA

Titolo nota 31/01/2013

C4

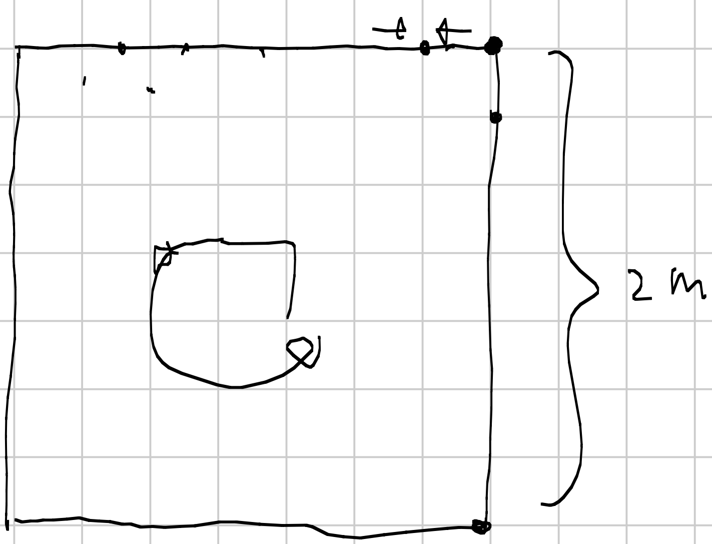
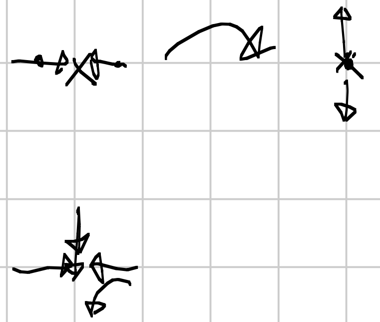
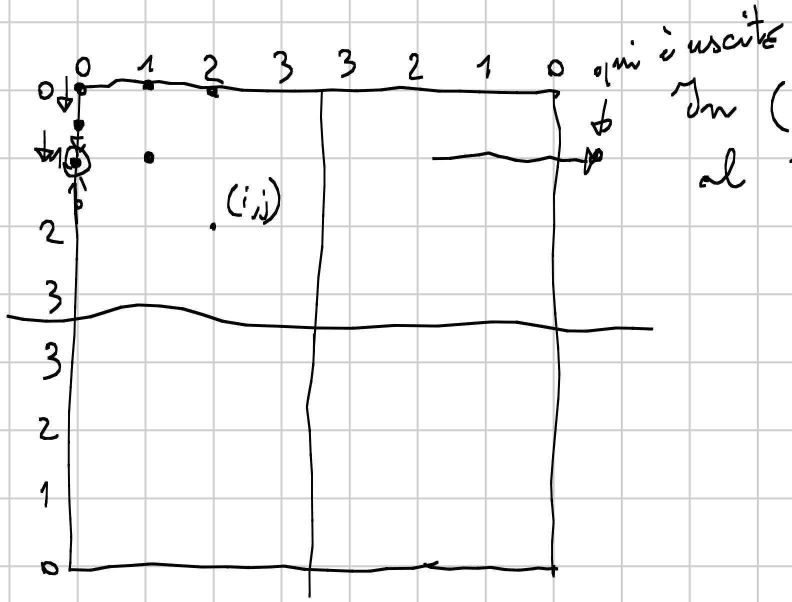


Tabella $2n \times 2n$





In $(1,0)$ ci si può scontrare solo al tempo 1, anche in $(0,1)$

$\forall (i,j)$ esiste una stima $T(i,j)$ tale che dopo $T(i,j)$ secondi non ci sono scontri in (i,j)

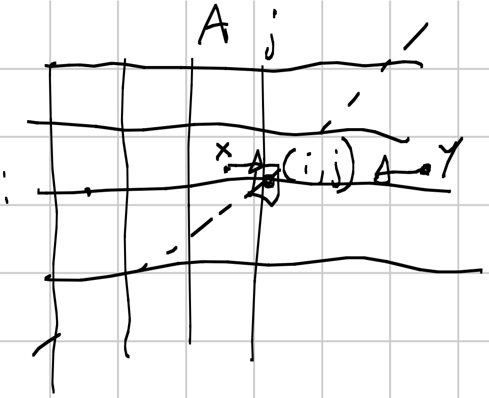
$$\boxed{T(i,j) = 2i + 2j - 1}$$

INDUZIONE SU $i+j \geq 1$

PASSO BASE $i+j=1$ GIÀ VISTO

PASSO INDUTTIVO (i,j)

Al tempo t c'è uno scontro frontale in (i,j)



C'è un automa x che viene dalla regione A.
WLOG lo scontro è in orizzontale

- Se x fa il primo scontro proprio in (i,j), allora x ha camminato solo sulla retta di ordinata i e ha percorso al più una distanza $2j-1$

- Supponiamo che x abbia fatto l'ultimo scontro prima di quello in (i,j) in $(i,j-k)$

Allora tra i due scontri passa un tempo $2k$, e il primo avviene al più dopo un tempo $T(i,j-k) =$
$= 2i+2(j-k)-1$

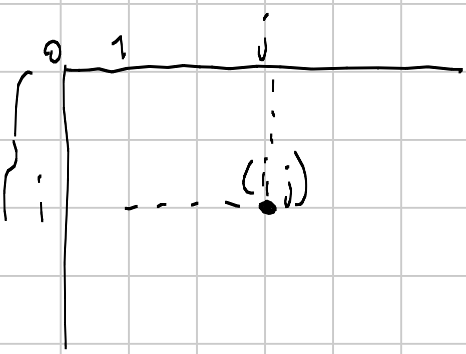
$\Rightarrow$ Anche lo scontro in (i,j) avviene al più al tempo $2k+2i+2(j-k)-1 = 2i+2j-1$.

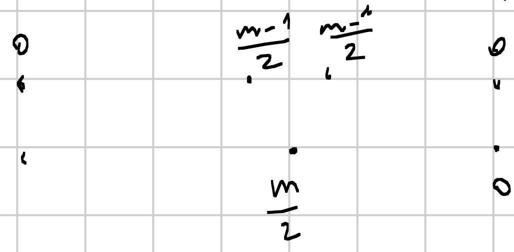
Prendiamo un automa x.

- Se non si scontra mai, impiega al più $2m$ per uscire

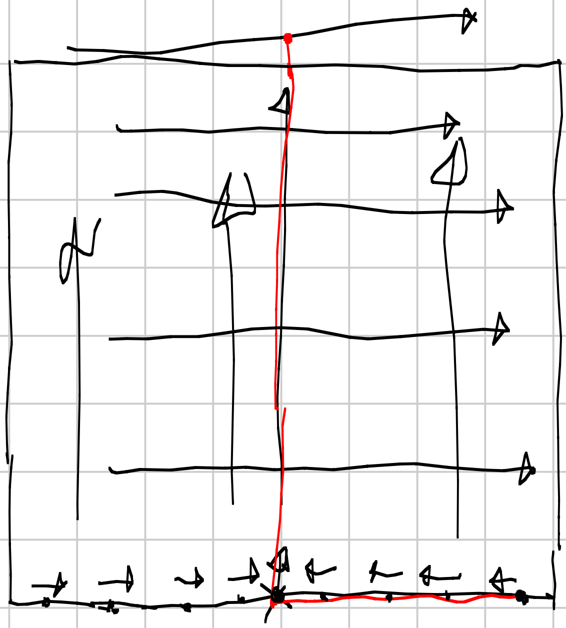
- Se x si scontra qualche volta, sia (i,j) la posizione dell'ultimo scontro. Allora per uscire l'automa impiega al più $T(i,j) + 2m - 2\min\{i,j\} + 1 =$

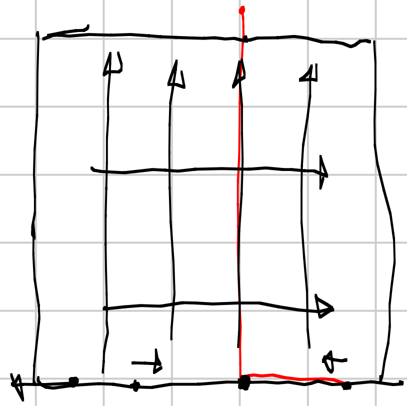
$$= 2\max\{i,j\} + 2m \leq \boxed{2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2m}$$





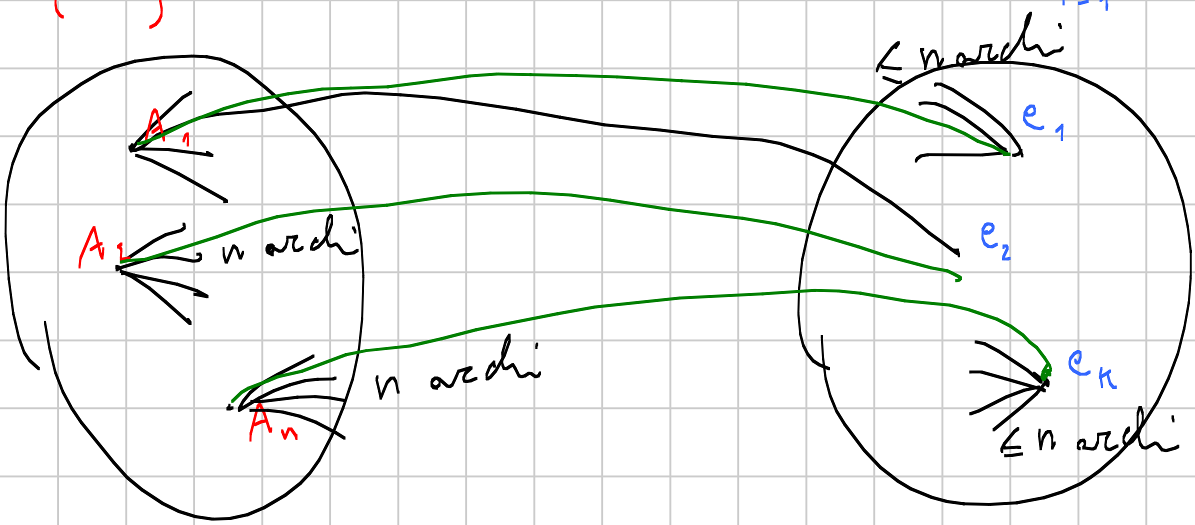
ESTE nr 10





C5 | Teorema di König. Se $(A, B; E)$ è bipartito allora per colorare gli archi in modo che archi incidenti abbiano colori diversi servono almeno Δ colori, ove Δ è il massimo grado di un vertice

$A = \{A_i\}$ $\qquad\qquad$ $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$



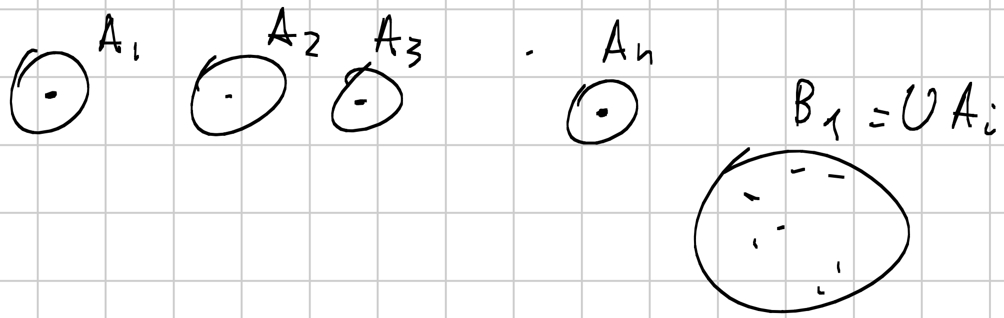
$\Delta = n$ bastano n colori che chiamo B_j

$i = 1 \dots n$

$|A_i| = m$ anche $\neq n$, ma nessun e_ℓ appartiene a più di m insiemi

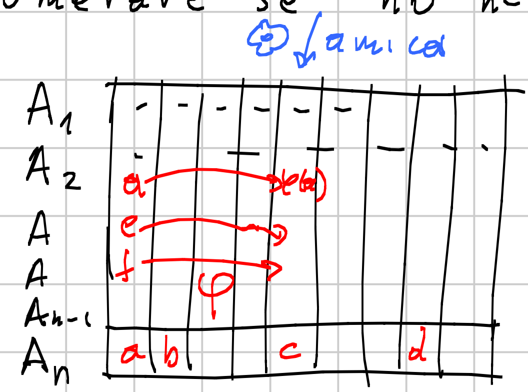
Fissato n, faccio induzione su m.

$m = 1$



Induzione estesa $n-1 \to n$

Ip. So rinumerare se ho $n-1$ insiemi



supponiamo $|A_i| \geq m$ e $A_1 \dots A_{n-1}$ già numerati bene

Aggiungo A_n a caso; se sono numerati bene, ok.

Se no, chiamo cattive le colonne con ripetizioni

Considero una tabella con il minimo numero di colonne cattive: WLOG la 1ª è cattiva. C_1

"a" non appartiene a più di m insiemi

$\Rightarrow$ c'è una colonna amica senza "a",

è buona? Se è cattiva, ha 2 "c" ma non la "a". Scambio c e a in A_n, diventa buona

$\Rightarrow$ ho una col. cattiva in meno, ass.

(a) è buona. $\varphi : a_{i,1} \longmapsto a_{i,b}$

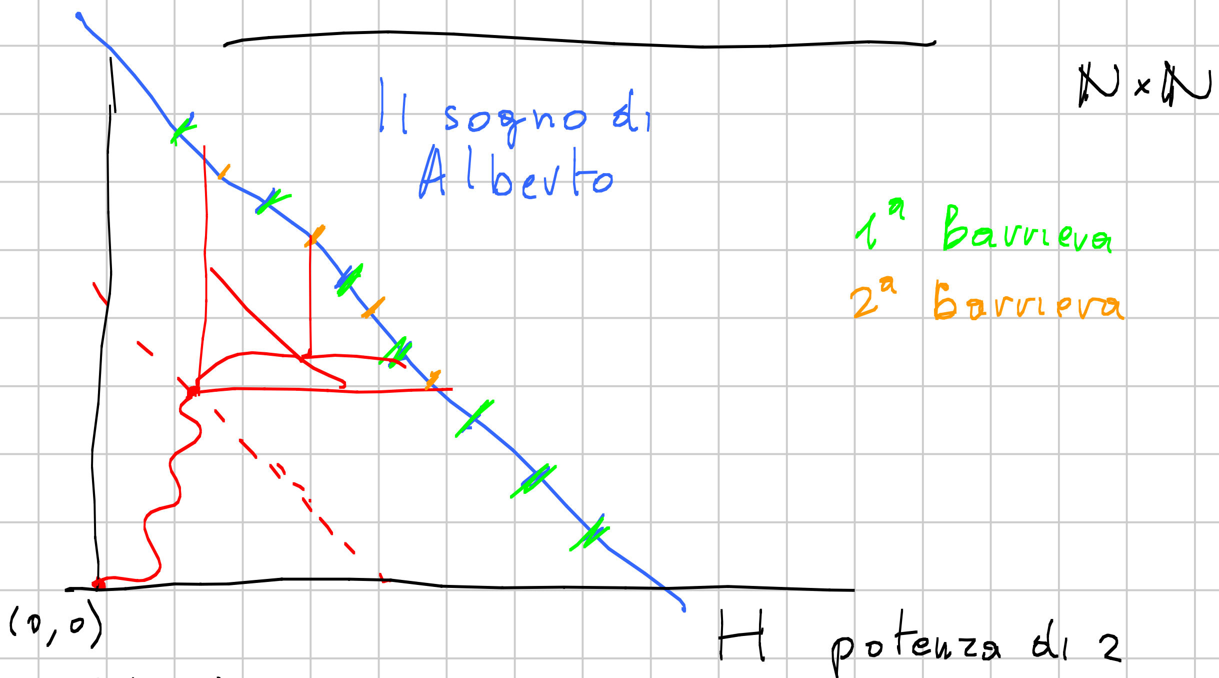
Vorrei scambiare a e $\varphi(a) \neq a$

Facendolo, (c) rimane buona $\Rightarrow$ $\varphi(a)$ esisteva in C_1

$\varphi(a) \longrightarrow \varphi(\varphi(a))$ Se lo scambio, (c) è sempre buona

$\Rightarrow \varphi(\varphi(a)) \in C_1$ e così via.

Ma (c) è buona, i suoi primi $n-1$ elementi sono diversi $\Rightarrow$ mi devo fermare. Scambiando, (a) e C_1 sono ora amiche buone. ass.



Alberto vince per ogni k.

OSS. WLOG k è potenza di 2

$\frac{H}{k}$ mosse prima che Barbara arrivi

Uso $\frac{H}{2k}$ mosse per la prima barriera

$$\ell = \frac{d_{dopo} \cdot k}{H} \cdot 4$$

ℓ	$2k$	k	- - - -
d	H	$\frac{H}{2}$	
$\#$	$\frac{H}{2k}$	$\frac{H}{4k}$	
d_{dopo}	$\frac{H}{2}$	$\frac{H}{4}$	- - -
L_{dopo}	$\frac{H}{2} = d_{dopo}$	$\frac{H}{4}$	

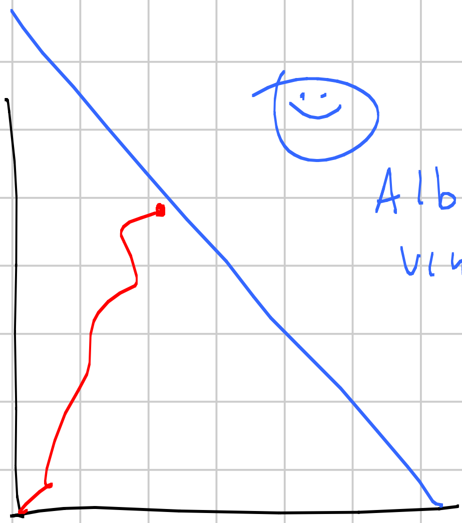
$$\ell = \frac{2k \cdot k \cdot 4}{H}$$

$$H > 8k^2$$

$$2k = \frac{H}{\left(\frac{H}{2k}\right)}$$

$2k$

$$\frac{\frac{H}{2}}{k} = \frac{H}{2k} = \frac{H}{4k} + \frac{H}{4k}$$



Alberto vince!