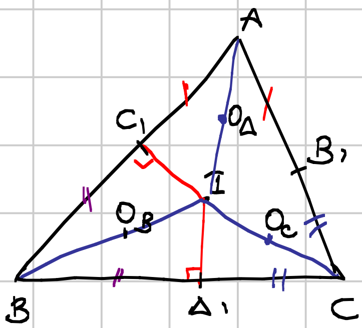
WC 2013 Geometria

Titolo nota 30/01/2013

Es 1

Giocattolo: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1 \boxed{= 0}$



$\Rightarrow A_1, B_1, C_1$ sono i pti di tangenza dell'incerchio

(perchè? $\quad // + // = c$

$// + // = a \quad \Rightarrow$ risolvo il sistema)

$// + // = b$

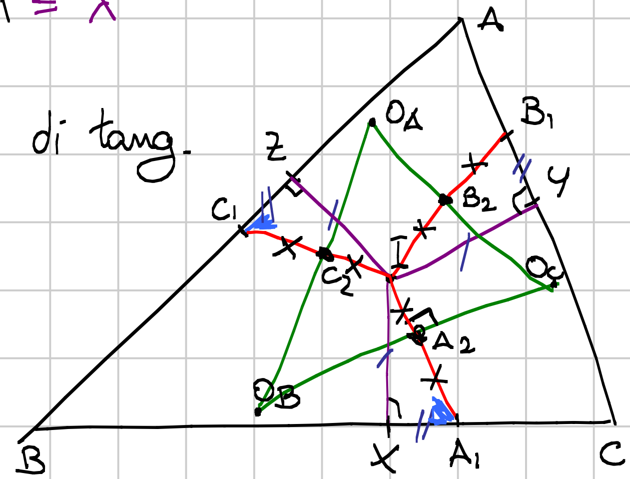
BA_1IC_1 è ciclico. Il centro è il pto medio di BI

Se faccio un'omotetia di centro I e rapp $\frac{1}{2}$

$A \to O_A \qquad B \to O_B \qquad C \to O_C \qquad I \to I.$

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1 = \lambda$$

Idea: riscriviamo in termini dei pti di tang.



$XA_1 = BA_1 - BX$

$ZC_1 = BZ - BC_1$

$XA_1 + ZC_1 = -\lambda$

Similmente $\quad XA_1 + YB_1 = -\lambda$

$YB_1 + ZC_1 = -\lambda$

Risolvendo,

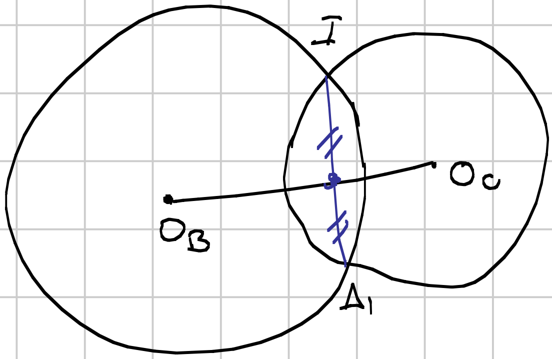
$$\boxed{XA_1 = YB_1 = ZC_1 = -\frac{\lambda}{2}}$$

BA_1IC_1 è ciclico.

IA_1 è asse radicale di $\Gamma_{BA_1IC_1}$ e $\Gamma_{CA_1IB_1}$.

Il pto medio di IA_1 sta su O_BO_C

$$IA_2 = \frac{1}{2} IA_1 = \frac{1}{2} IB_1 = IB_2$$
$$= IC_2$$



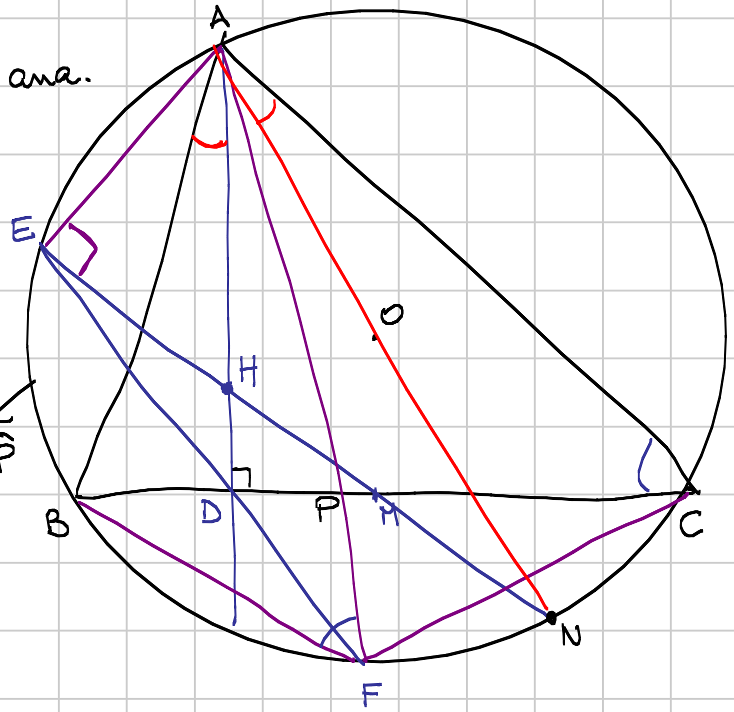
L'incentro I "dista uguale" dai lati di $O_AO_BO_C$ $\Rightarrow$ è incentro di $O_AO_BO_C$.

Es 2

Tesi: $\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$

Step 1: tesi $\iff$ AF è simmediana.

[AF è simmediana se $B\hat{A}F = M\hat{A}C$; equivalentemente, $\frac{BP}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$]



$$\frac{BF}{FC} = \frac{BP}{\sin\gamma} \cdot \cancel{\sin\hat{P}} \cdot \frac{\sin\beta}{PC} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin\hat{P}}}$$

$$= \frac{BP}{PC} \cdot \frac{AC}{AB}$$

Step 2: Vogliamo $C\hat{A}F = M\hat{A}B$.

Angle chasing.

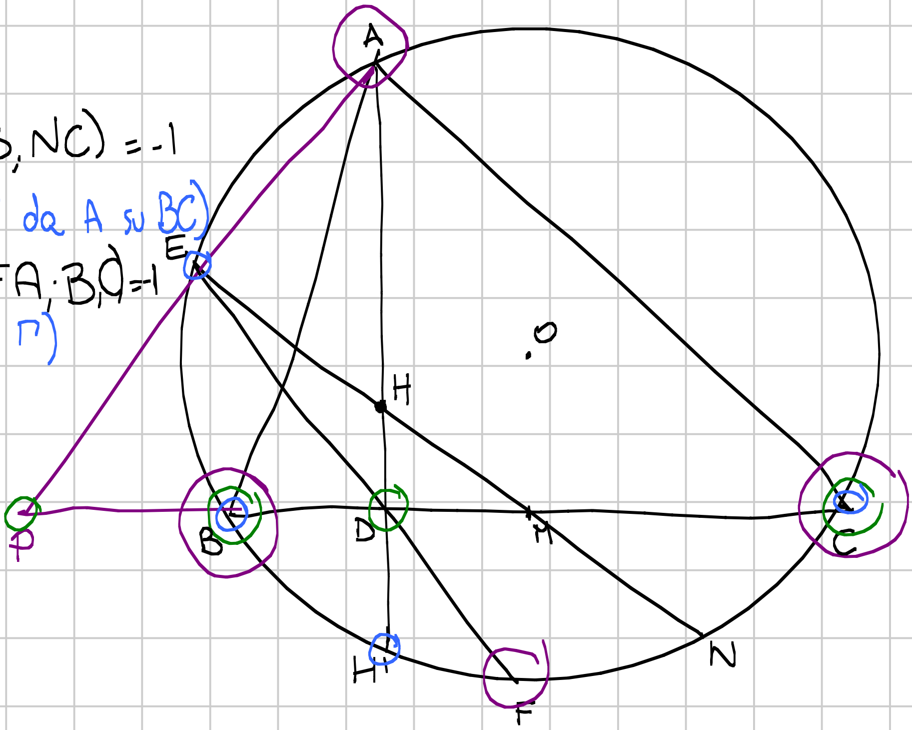
N è $EHM \cap \Gamma_{ABC}$. N è il simmetrico di H rispetto a M (ex: vederlo coi vettori) ed è diametralmente opposto ad A.

$\Rightarrow A\hat{E}N = 90$

$\Rightarrow$ AEDM ciclico $\Rightarrow \underbrace{M\hat{A}D = M\hat{E}D = N\hat{E}F = N\hat{A}F}$

$$C\hat{A}F = C\hat{A}N + N\hat{A}F = D\hat{A}B + M\hat{A}D = M\hat{A}B$$

Dim

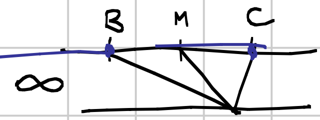


$H'N \parallel BC \qquad (NH', NM; NB, NC) = -1$

$\Rightarrow (H', E; B, C) = -1$ (proiett da A su BC)

$\Rightarrow (D\ P; BC) = -1 \Rightarrow (FA, B, C) = -1$

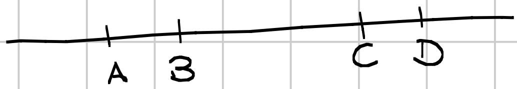
$\Rightarrow$ tesi. (proiettiamo da E su Γ)



$$(\infty M; BC) = \frac{\cancel{\infty B} \cdot MC}{\cancel{\infty C} \cdot MB} = -1$$

Binapporti

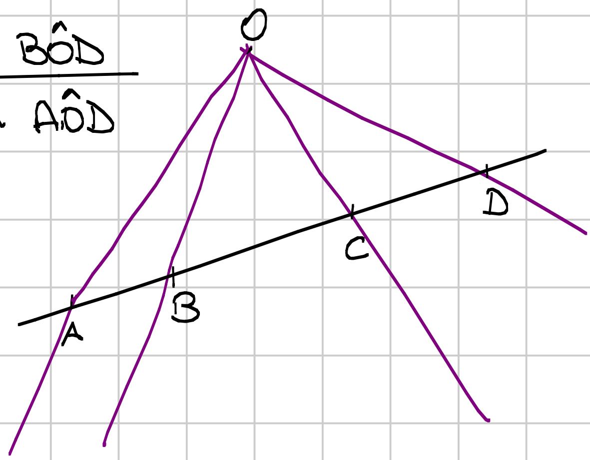
$$(AB; CD) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$



- considero segmenti orientati (con segno)
- eventualmente un punto può essere "all'infinito".

Def: $A,B;C,D$ è una quaterna armonica se $(A,B;C,D) = -1$.

Fatto 1 $$(A,B;C,D) = \frac{\sin A\hat{O}C \cdot \sin B\hat{O}D}{\sin B\hat{O}C \cdot \sin A\hat{O}D}$$



$$\frac{AC}{\sin A\hat{O}C} = \frac{\cancel{OC}}{\cancel{\sin O\hat{A}C}} \qquad \frac{BD}{\sin B\hat{O}D} = \frac{\cancel{OD}}{\cancel{\sin O\hat{B}D}}$$

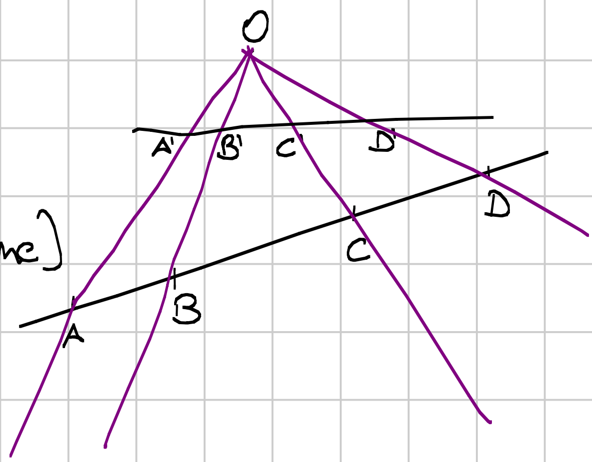
$$\frac{BC}{\sin B\hat{O}C} = \frac{\cancel{OC}}{\cancel{\sin O\hat{B}C}} \qquad \frac{AD}{\sin A\hat{O}D} = \frac{\cancel{OD}}{\cancel{\sin O\hat{A}D}}$$

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{\sin A\hat{O}C \cdot \sin B\hat{O}D}{\sin B\hat{O}C \cdot \sin A\hat{O}D}$$

Conseguenze:

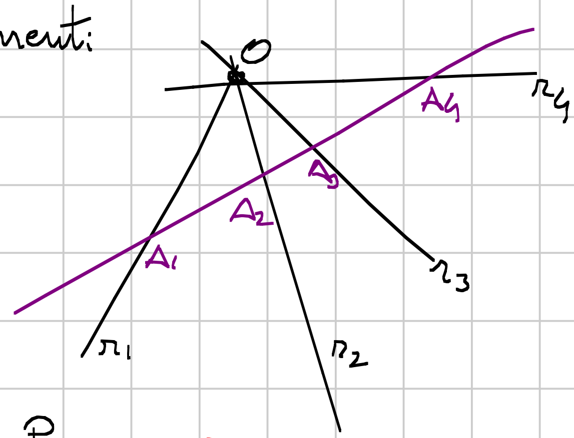
$$(AB; CD) = (A'B'; C'D')$$

[il binapporto è invariante per proiezione]



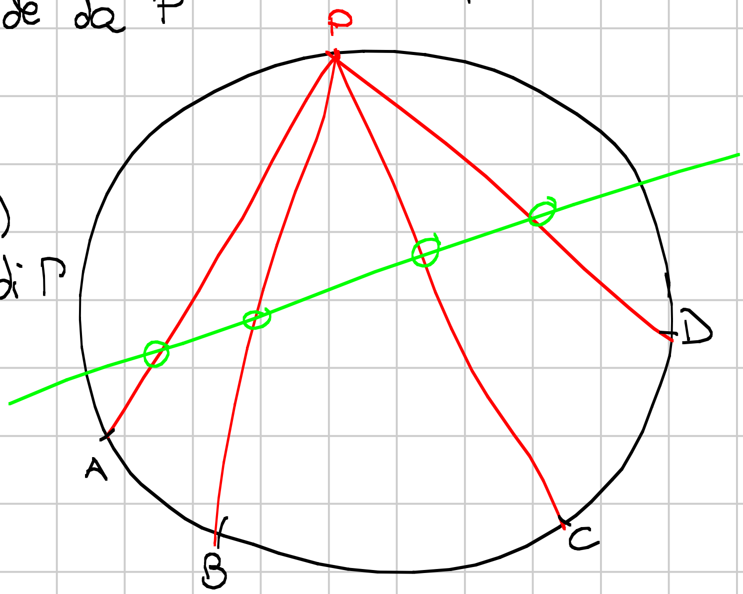
Def: birapporto tra 4 rette concorrenti:

$(r_1, r_2 ; r_3 r_4) := (A_1, A_2 ; A_3 A_4)$



Conseguenza 2:

$(PA, PB, PC\ PD)$ non dipende da P



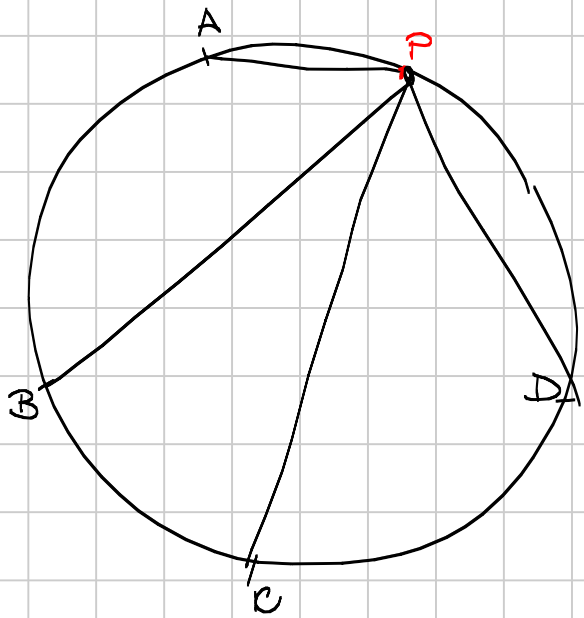
Def: $A, B, C, D \in \Gamma$

$(A,B ; C,D) = (PA, PB ; PC, PD)$

dove P è un qualunque punto di Γ

Conseguenza $A, B, C, D \in \Gamma$

$(A,C;B,D)$ è armonica $\iff \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$

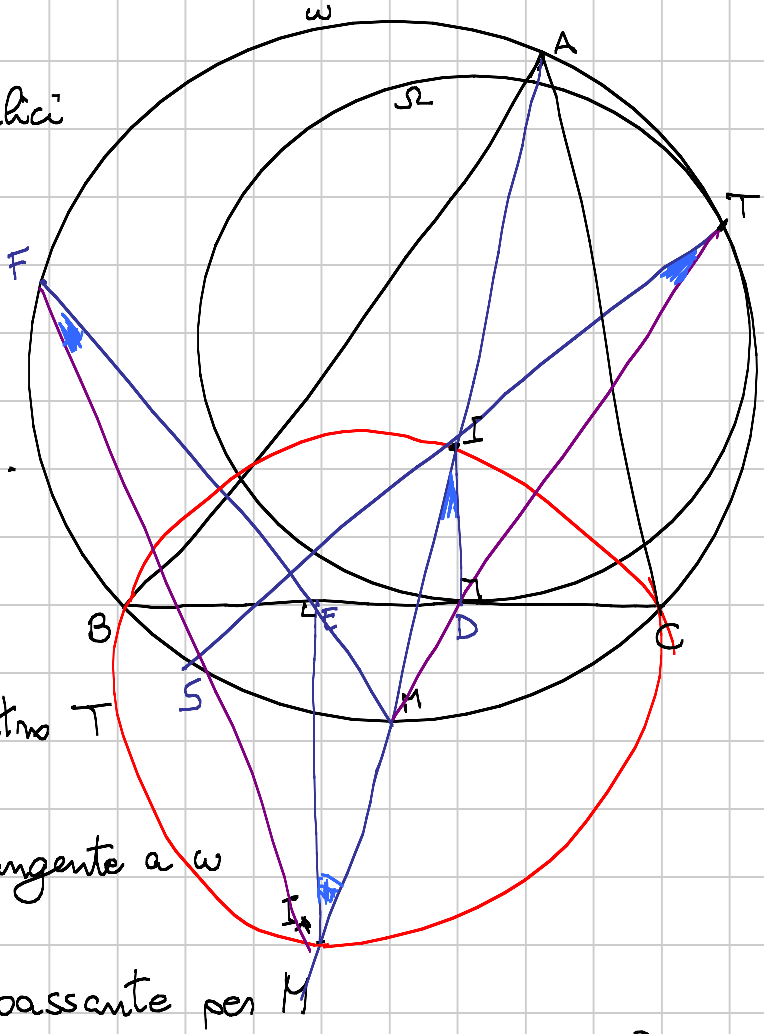


$$-1 = (PA, PC ; PB, PD) = \frac{\sin A\hat{O}B \cdot \sin C\hat{O}D}{\sin B\hat{O}C \cdot \sin A\hat{O}D}$$

$$= \frac{\dfrac{AB}{\cancel{2R}} \cdot \dfrac{CD}{\cancel{2R}}}{\dfrac{BC}{\cancel{2R}} \cdot \dfrac{AD}{\cancel{2R}}}$$

Es 3

Lemma: $B I C I_A$ sono conciclici con centro M.
(ex: calcolare gli angoli in funz di quelli di ABC)



Tesi: F, S, I_A sono allineati.

Step 1: M, D, T sono allineati.

Considero un'omotetia di centro T che manda $\Omega \mapsto \omega$.

La retta BC va in una tangente a ω parallela al lato BC

$\Rightarrow BC \mapsto$ retta tangente passante per M

$\Rightarrow$ pto di tang di BC (è D) $\longmapsto$ pto di tg (è M).

Step 2: Inversione di centro M per $I_A B I C$.

$BC \longmapsto \omega$

$\omega \longmapsto BC$

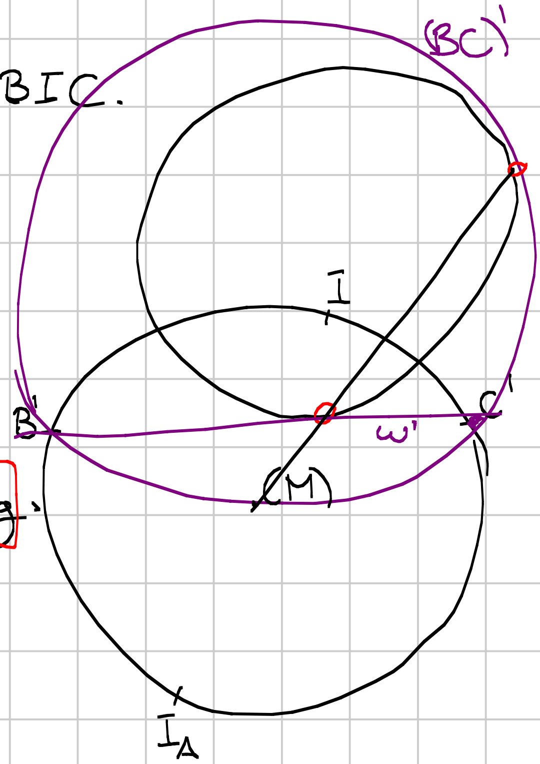
$\Omega \longmapsto \Omega$

$D \longleftrightarrow T$

$E \longleftrightarrow F$

$\boxed{MT \cdot MD = MI^2} \Rightarrow \boxed{\Omega \text{ e } \Gamma_{BCII_A} \text{ sono ortog}}$

$\Rightarrow \boxed{ME \cdot MF = MI_A^2} \Rightarrow \boxed{\Gamma_{EFI_A} \text{ e } \Gamma_{BCII_A} \text{ sono ortog.}}$



Step 3 $\boxed{} \Rightarrow M\hat{E}I_A \sim M\hat{I}_AF$

$M\hat{D}I \sim M\hat{I}T$

$\Rightarrow M\hat{F}I_A = EI_AM \;,\; = \; M\hat{T}I = M\hat{I}D$.

↑ parallele tagliate da trasversale

Step 3 bis $\boxed{}$ $\Rightarrow$

$$M\hat{F}I_A = E\hat{I_A}M$$