Winter Camp 2013

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

WC 2013 - COMBINATORIA

Titolo nota 31/01/2013

C4

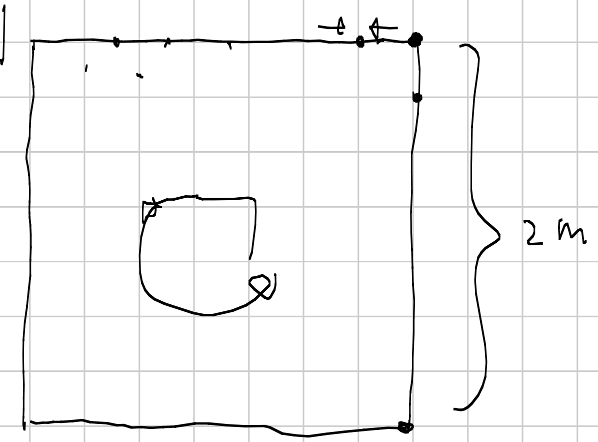
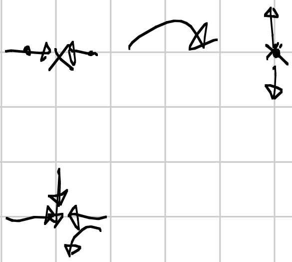
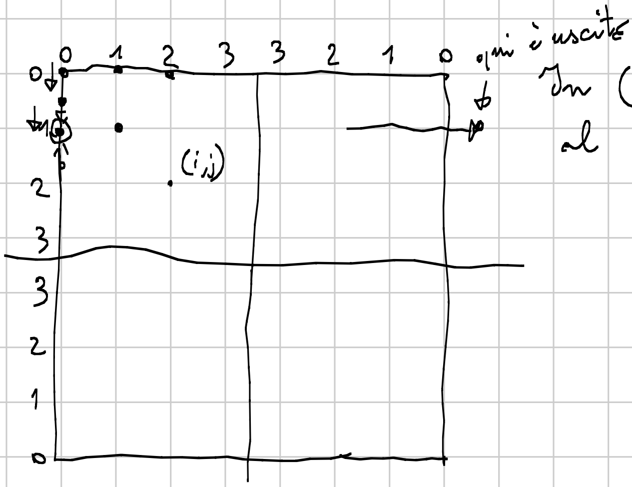


Tabella $2m \times 2m$





In $(1,0)$ ci si può scontrare solo al tempo 1, anche in $(0,1)$

$\forall (i,j)$ esiste una stima $T(i,j)$ tale che dopo $T(i,j)$ secondi non ci sono scontri in (i,j)

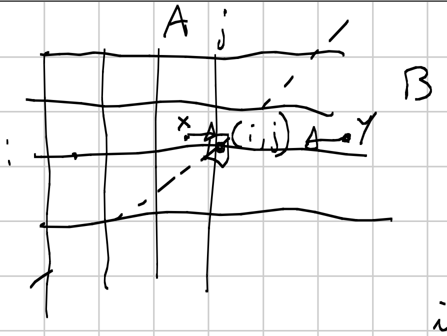
$$\boxed{T(i,j) = 2i+2j-1}$$

INDUZIONE SU $i+j \geq 1$

PASSO BASE $i+j=1$ GIÀ VISTO

PASSO INDUTTIVO (i,j)

Al tempo t c'è uno scontro frontale in (i,j)



C'è un automa x che viene dalla regione A.
WLOG lo scontro è in orizzontale

- Se x fa il primo scontro proprio in (i,j), allora x ha camminato solo sulla retta di ordinata i e ha percorso al più una distanza $2j-1$

- Supponiamo che x abbia fatto l'ultimo scontro prima di quello in (i,j) in $(i, j-k)$

Allora tra i due scontri passa un tempo $2K$, e il primo avviene al più dopo un tempo $T(i, j-k) =$ $= 2i + 2(j-k) - 1$

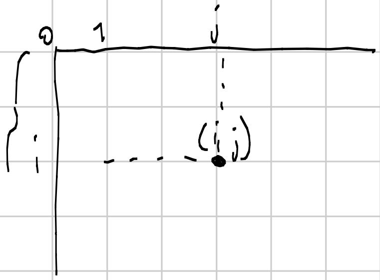
$\Rightarrow$ Anche lo scontro in (i,j) avviene al più al tempo $2k + 2i + 2(j-k) - 1 = 2i + 2j - 1$.

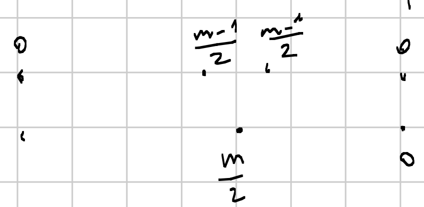
Prendiamo un automa x.

- Se non si scontra mai, impiega al più $2m$ per uscire

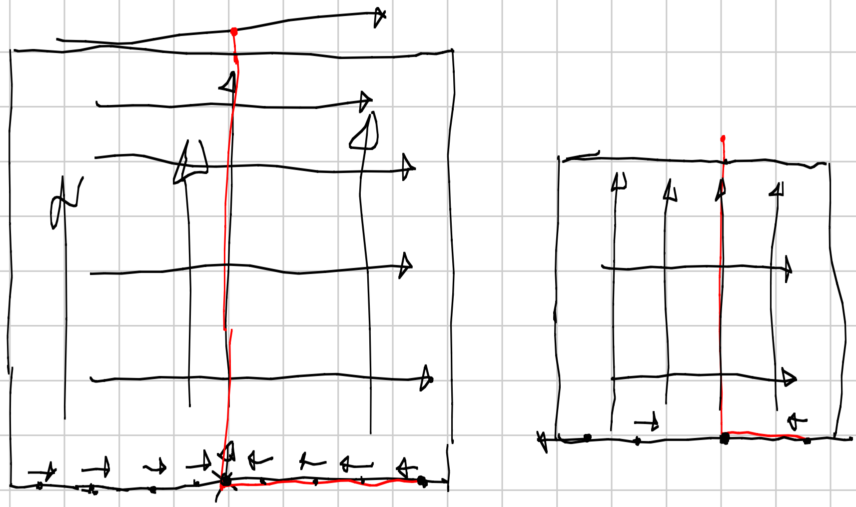
- Se x si scontra qualche volta, sia (i,j) la posizione dell'ultimo scontro. Allora per uscire l'automa impiega al più $T(i,j) + 2m - 2\min\{i,j\} + 1 =$

$$= 2\max\{i,j\} + 2m \le \boxed{2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2m}$$

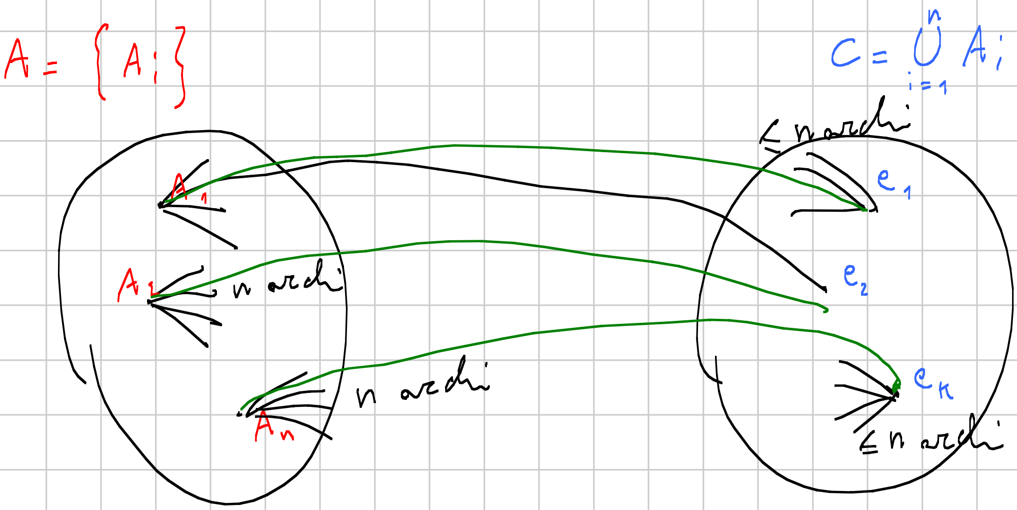




ESE $^{\text{mpio}}$ 10



C5 Teorema di König. Se $(A, B; E)$ è bipartito allora per colorare gli archi in modo che archi incidenti abbiano colori diversi servono almeno Δ colori, ove Δ è il massimo grado di un vertice



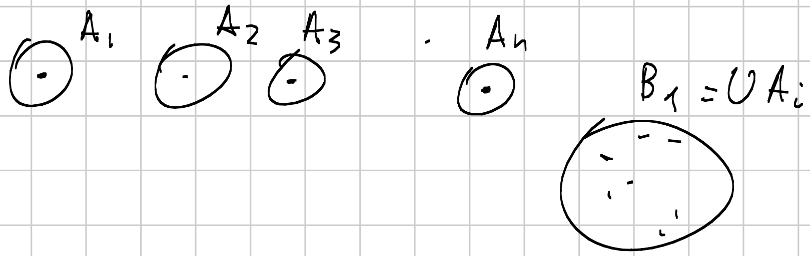
$\Delta = n$ bastano n colori che chiamo B_j

$i = 1 \dots n$

$|A_i| = m$ anche $\neq n$, ma nessun e_ℓ appartiene a più di m insiemi

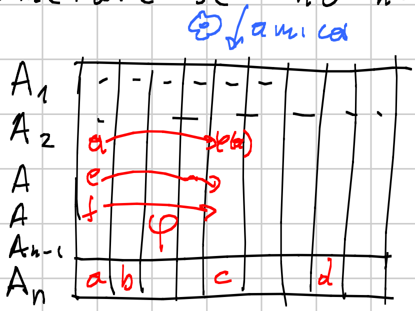
Fissato n, faccio induzione su m.

$m = 1$



Induzione estesa $n-1 \to n$

Ip. So rinumerare se ho $n-1$ insiemi



supponiamo $|A_i| = m$ e $A_1 \dots A_{n-1}$ già numerati bene

Aggiungo A_n a caso; se sono numerati bene, ok.

Se no, chiamo cattive le colonne con ripetizioni

Considero una tabella con il minimo numero di colonne cattive: WLOG la 1ª è cattiva. C_1

"a" non appartiene a più di m insiemi

$\Rightarrow$ c'è una colonna amica senza "a",

è buona? Se è cattiva, ha 2 "c" ma non la "a". Scambio c e a in A_n, diventa buona

$\Rightarrow$ ho una col. cattiva in meno, ass.

$\textcircled{o}$ è buona. $\varphi : a_{i,1} \longmapsto a_{i,\textcircled{a}}$

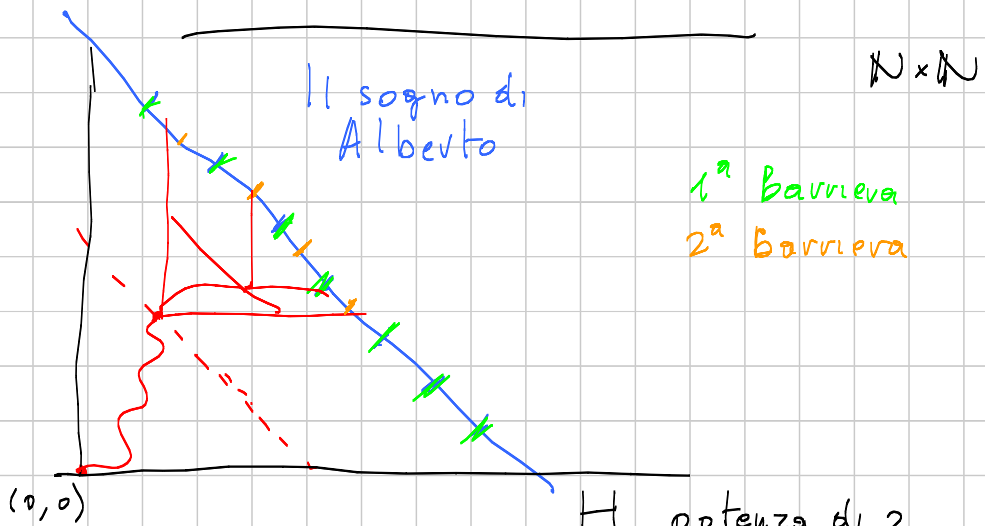
Vorrei scambiare a e $\varphi(a) \neq a$

Facendolo, $\textcircled{a}$ rimane buona $\Rightarrow$ $\varphi(a)$ esisteva in C_1

$\varphi(a) \longrightarrow \varphi(\varphi(a))$ Se il scambio, $\textcircled{a}$ è sempre buona

$\Rightarrow \varphi(\varphi(a)) \in C_1$ e così via.

Ma $\textcircled{a}$ è buona, i suoi primi $n-1$ elementi sono diversi $\Rightarrow$ mi devo fermare, Scambiando, $\textcircled{a}$ e C_1 sono ora amiche buone, ass



Alberto vince per ogni k.

OSS. WLOG k è potenza di 2

$\frac{H}{k}$ mosse prima che Barbara arrivi

Uso $\frac{H}{2k}$ mosse per la prima barriera

$$\ell = \frac{d_{dopo} \cdot k}{H} \cdot 4$$

ℓ	$2k$	k - - - -
d	H	$\frac{H}{2}$
$\#$	$\frac{H}{2k}$	$\frac{H}{4k}$
d_{dopo}	$\frac{H}{2}$	$\frac{H}{4}$ - - -
L_{dopo}	$\frac{H}{2} = d_{dopo}$	$\frac{H}{4}$

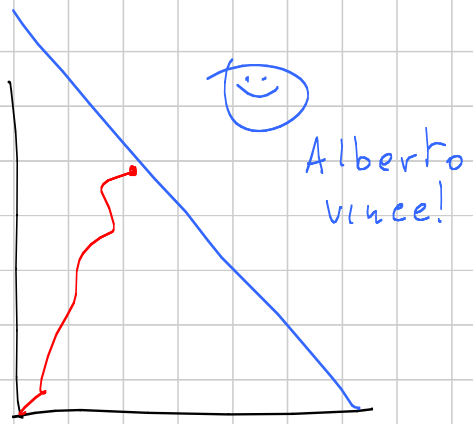
$$\ell = \frac{2k \cdot k \cdot 4}{H}$$

$$H > 8k^2$$

$$2k = \frac{H}{\left(\frac{H}{2k}\right)}$$

$2k$

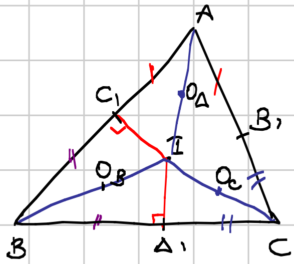
$$\frac{\frac{H}{2}}{k} = \frac{H}{2k} = \frac{H}{4k} + \frac{H}{4k}$$



WC 2013 Geometria

Titolo nota 30/01/2013

Es 1



Giocattolo: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1 \boxed{= 0}$

$\Rightarrow A_1, B_1, C_1$ sono i pti di tangenza dell'incerchio

(perchè? // + // = c
// + // = a $\Rightarrow$ risolvo il sistema)
// + // = b

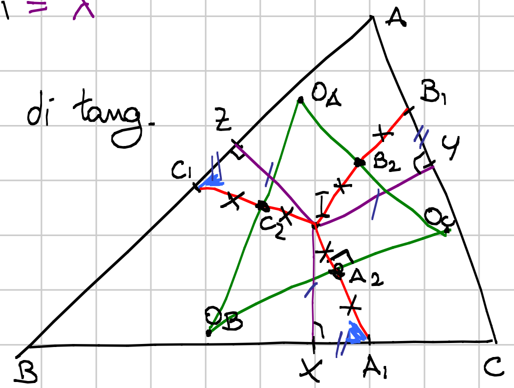
BA_1IC_1 è ciclico. Il centro è il pto medio di BI

Se faccio un'omotetia di centro I e rapp $\frac{1}{2}$

$A \to O_A$ $\quad B \to O_B$ $\quad C \to O_C$ $\quad I \to I$.

$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1 = \lambda$

Idea: riscriviamo in termini dei pti di tang.



$XA_1 = BA_1 - BX$

$ZC_1 = BZ - BC_1$

$XA_1 + ZC_1 = -\lambda$

Similmente $XA_1 + YB_1 = -\lambda$

$YB_1 + ZC_1 = -\lambda$

Risolvendo,

$$\boxed{XA_1 = YB_1 = ZC_1 = -\frac{\lambda}{2}}$$

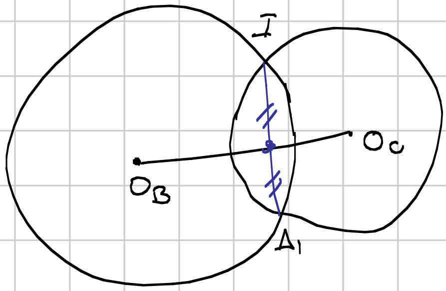
BA_1IC_1 è ciclico.

IA_1 è asse radicale di $\Gamma_{BA_1IC_1}$ e $\Gamma_{CA_1IB_1}$.

Il pto medio di IA_1 sta su O_BO_C

$IA_2 = \frac{1}{2} IA_1 = \frac{1}{2} IB_1 = IB_2$
$= IC_2$

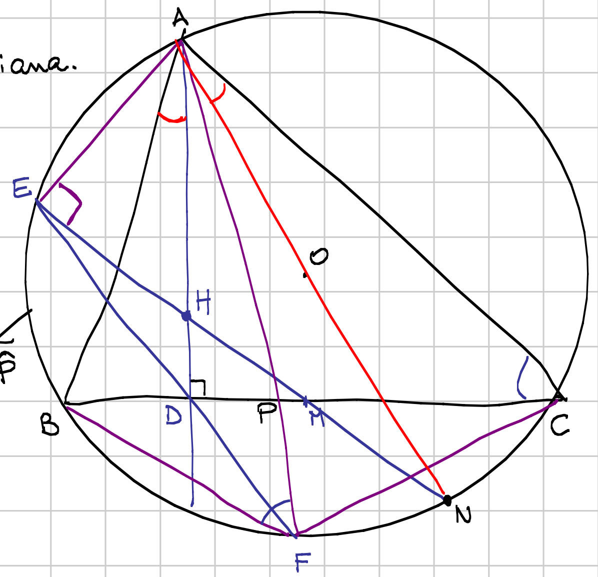
L'incentro I "dista uguale" dai lati di $O_AO_BO_C$ $\Rightarrow$ è incentro di $O_AO_BO_C$.



Es 2

Tesi: $\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$

Step 1: tesi $\iff$ AF è simmediana.



[AF è simmediana se $B\hat{A}F = M\hat{A}C$; equivalentemente, $\frac{BP}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$]

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BP}{\sin\gamma} \cdot \cancel{\sin\hat{P}} \cdot \frac{\sin\beta}{PC} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin\hat{P}}}$$

$$= \frac{BP}{PC} \cdot \frac{AC}{AB}$$

Step 2: Vogliamo $C\hat{A}F = M\hat{A}B$.

Angle chasing.

N è $EHM \cap \Gamma_{ABC}$. N è il simmetrico di H rispetto a M (ex: vederlo coi vettori) ed è diametralmente opposto ad A.

$\Rightarrow A\hat{E}N = 90$

$\Rightarrow AEDM$ ciclico $\Rightarrow \underbrace{M\hat{A}D = M\hat{E}D = N\hat{E}F = N\hat{A}F}$

$$C\hat{A}F = C\hat{A}N + N\hat{A}F = D\hat{A}B + M\hat{A}D = M\hat{A}B$$

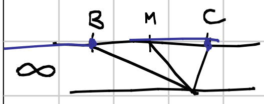
<u>Dim</u>

H'N // BC $\quad (NH', NM; NB, NC) = -1$

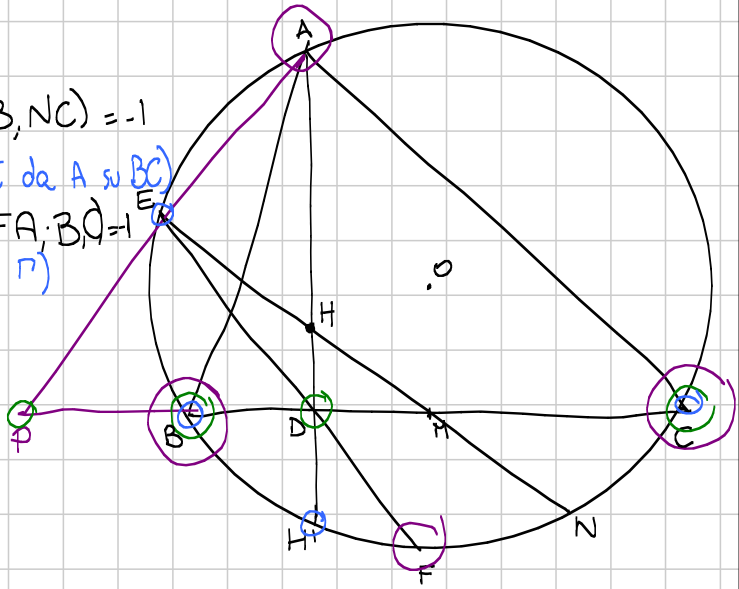
$\Rightarrow (H', E; B, C) = -1$ (proiett. da A su BC)

$\Rightarrow (D\ P; B C) = -1 \Rightarrow (F A; B C) = -1$

$\Rightarrow$ tesi. (proiettiamo da E su Γ)

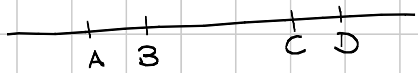


$(\infty M; BC) = \dfrac{\cancel{\infty} B \cdot MC}{\cancel{\infty} C \cdot MB} = -1$



<u>Birapporti</u>

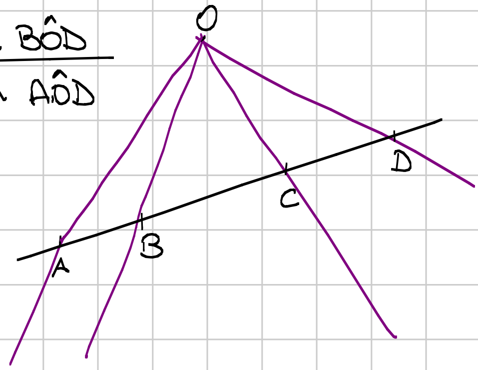
$(AB; CD) = \dfrac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$



- considero segmenti orientati (con segno)
- eventualmente un punto può essere "all'infinito".

<u>Def:</u> A,B;C,D è una quaterna armonica se $(A,B;C,D) = -1$.

<u>Fatto 1</u> $\quad (A,B;C,D) = \dfrac{\sin A\hat{O}C \cdot \sin B\hat{O}D}{\sin B\hat{O}C \cdot \sin A\hat{O}D}$



$\dfrac{AC}{\sin A\hat{O}C} = \dfrac{\cancel{OC}}{\cancel{\sin O\hat{A}C}} \qquad \dfrac{BD}{\sin B\hat{O}D} = \dfrac{\cancel{OD}}{\cancel{\sin O\hat{B}D}}$

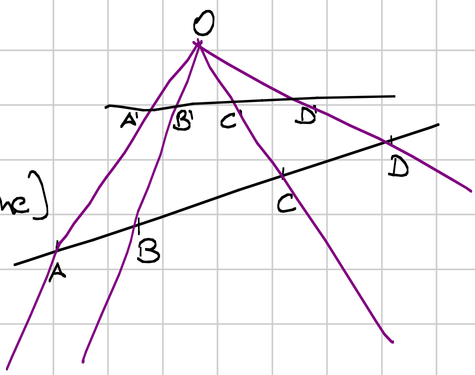
$\dfrac{BC}{\sin B\hat{O}C} = \dfrac{\cancel{OC}}{\cancel{\sin O\hat{B}C}} \qquad \dfrac{AD}{\sin A\hat{O}D} = \dfrac{\cancel{OD}}{\cancel{\sin O\hat{A}D}}$

$\dfrac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \dfrac{\sin A\hat{O}C \cdot \sin B\hat{O}D}{\sin B\hat{O}C \cdot \sin A\hat{O}D}$

<u>Conseguenze:</u>

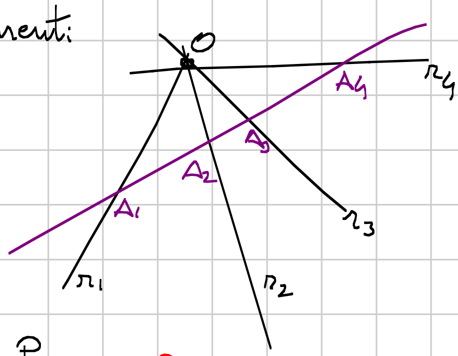
$(AB; CD) = (A', B'; C', D')$

[il birapporto è invariante per proiezione]



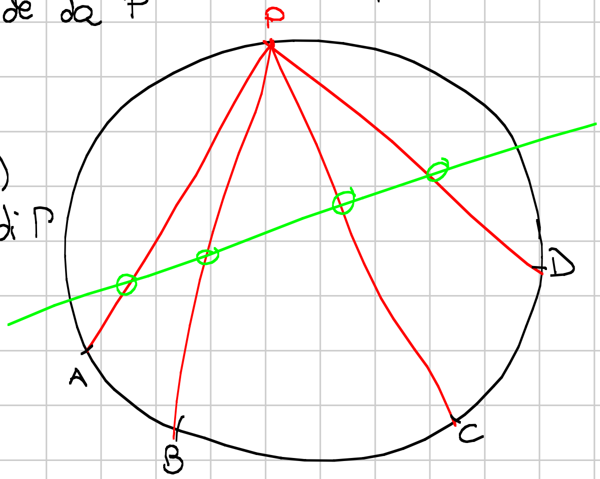
Def: birapporto tra 4 rette concorrenti:

$(r_1, r_2 ; r_3\ r_4) := (A_1, A_2 ; A_3\ A_4)$



Conseguenza 2:

$(PA, PB, PC\ PD)$ non dipende da P



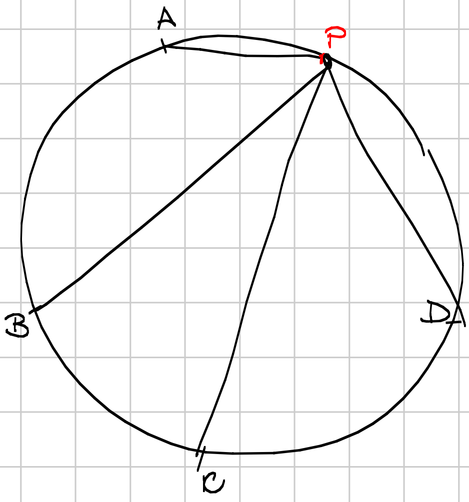
Def: $A, B, C, D \in \Gamma$

$(A, B ; C, D) = (PA, PB ; PC, PD)$

dove P è un qualunque punto di Γ

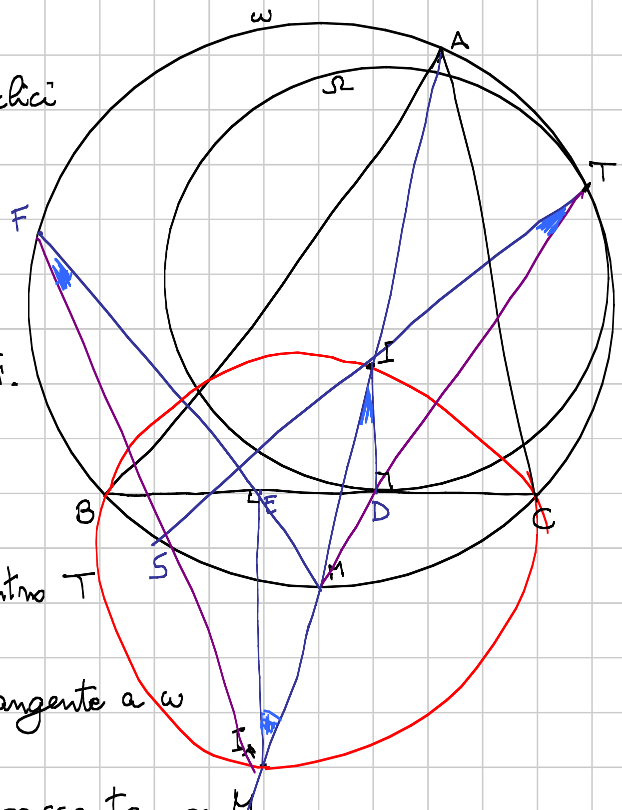
Conseguenza $A, B, C, D \in \Gamma$

$(A, C ; B D)$ è armonica $\iff \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$



$$-1 = (PA, PC ; PB, PD) = \frac{\sin A\hat{O}B \cdot \sin C\hat{O}D}{\sin B\hat{O}C \cdot \sin A\hat{O}D}$$

$$= \frac{\frac{AB}{\cancel{2R}} \cdot \frac{CD}{\cancel{2R}}}{\frac{BC}{\cancel{2R}} \cdot \frac{AD}{\cancel{2R}}}$$



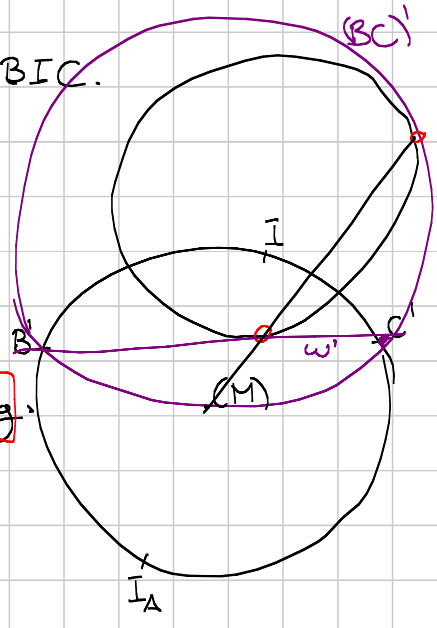
Es 3

Lemma: B, C, I_A sono conciclici con centro M.
(ex: calcolare gli angoli in funz di quelli di ABC)

Tesi: F, S, I_A sono allineati.

Step 1: M, D, T sono allineati.
Considero un'omotetia di centro T che manda $\Omega \mapsto \omega$.
La retta BC va in una tangente a ω parallela al lato BC
$\Rightarrow BC \mapsto$ retta tangente passante per M
$\Rightarrow$ pto di tang di BC (è D) $\longmapsto$ pto di tg (è M).

Step 2: Inversione di centro M per $I_A B I C$.



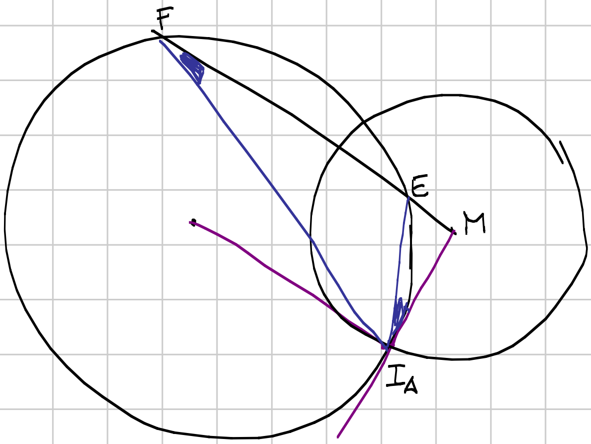
$BC \longmapsto \omega$
$\omega \longmapsto BC$
$\Omega \longmapsto \Omega$
$D \longleftrightarrow T \Rightarrow \boxed{MT \cdot MD = MI^2} \Rightarrow \boxed{\Omega \text{ e } \Gamma_{BCII_A} \text{ sono ortog}}$
$E \longleftrightarrow F \Rightarrow \boxed{ME \cdot MF = MI_A^2} \Rightarrow \boxed{\Gamma_{EFI_A} \text{ e } \Gamma_{BCII_A} \text{ sono ortog.}}$

Step 3 $\boxed{} \Rightarrow M\hat{E}I_A \sim M\hat{I}_A F$
$M\hat{D}I \sim M\hat{I}T$

$\Rightarrow M\hat{F}I_A = EI_AM$, $\underset{\uparrow}{=}$ $M\hat{T}I = M\hat{I}D$.
parallele tagliate da trasversale

Step 3 bis $\boxed{}$ $\Rightarrow$

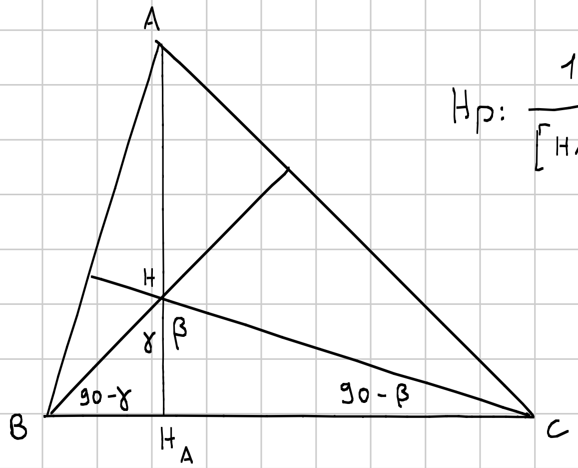
$M\hat{F}I_A = E\hat{I}_A M$



WC13-G2

Titolo nota 01/02/2013

(1)



$$Hp: \frac{1}{[HAB]} + \frac{1}{[HAC]} = \frac{2}{[HBC]}$$

$$[HBC] = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{BC}_{a} \cdot CH \cdot \underbrace{\sin(90-\beta)}_{\cos\beta}$$

$$CH = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \cos\gamma = 2R\cos\gamma$$

$$[HBC] = \frac{1}{2}\, a\, 2R\cos\gamma\cos\beta = \underbrace{R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}_{K}\, \frac{a}{\cos\alpha} =$$

$$= k \cdot \frac{2abc}{b^2+c^2-a^2} = \lambda \cdot \frac{1}{b^2+c^2-a^2}$$

$$\frac{2(b^2+c^2-a^2)}{\lambda} = \frac{(a^2+c^2-b^2)}{\lambda} + \frac{(a^2+b^2-c^2)}{\lambda}$$

$$Hp \Leftrightarrow \boxed{b^2+c^2 = 2a^2}$$

$AG \perp GH \qquad (\vec{A}-\vec{G})(\vec{H}-\vec{G})=0$

$G = \dfrac{A+B+C}{3} \qquad H = A+B+C$

$A \cdot A = R^2 \qquad A \cdot B = R^2 - \dfrac{c^2}{2}$

$A - G = \dfrac{2A-B-C}{3} \qquad H - G = \dfrac{2}{3}(A+B+C)$

$Th \Leftrightarrow (2A-B-C)(A+B+C)=0$

$2\cancel{A\cdot A} + 2A\cdot B + 2A\cdot C - A\cdot B - \cancel{B\cdot B} - B\cdot C - A\cdot C - B\cdot C - \cancel{C\cdot C} = 0$

$A\cdot B + A\cdot C = 2\cdot B\cdot C$

$\cancel{R^2} - \dfrac{c^2}{2} + \cancel{R^2} - \dfrac{b^2}{2} = 2\cancel{R^2} - a^2$

$$\boxed{b^2+c^2=2a^2}$$

SOL 2 BARICENTRICHE

$G=[1,1,1] \qquad A=[1,0,0] \qquad H=[S_A, S_B, S_C]$

$r_1 \quad r_2 \qquad P_1 = r_1 \cap r_\infty \qquad P_2 = r_2 \cap r_\infty$

$r_\infty : x+y+z=0 \qquad P_1=[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1] \quad P_2=[\alpha_2,\beta_2,\gamma_2]$

$r_1 \perp r_2 \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{S_A} + \dfrac{\beta_1\beta_2}{S_B} + \dfrac{\gamma_1\gamma_2}{S_C} = 0$

$$r_{AG} : \; y - z = 0 \qquad\qquad r_\infty : \; x + y + z = 0$$

$$P_1 = (-2, 1, 1)$$

$$r_{GH} : \; (s_B - s_C)\, x + (s_C - s_A)\, y + (s_A - s_B)\, z = 0$$

$$P_2 = (s_B + s_C - 2s_A,\; s_A + s_C - 2s_B,\; s_A + s_B - 2s_C)$$

$$\frac{\cancel{4 s_A} - 2 s_B - 2 s_C}{s_A} + \frac{s_A + s_C - \cancel{2 s_B}}{s_B} + \frac{s_A + s_B - \cancel{2 s_C}}{s_C} \overset{?}{=} 0$$

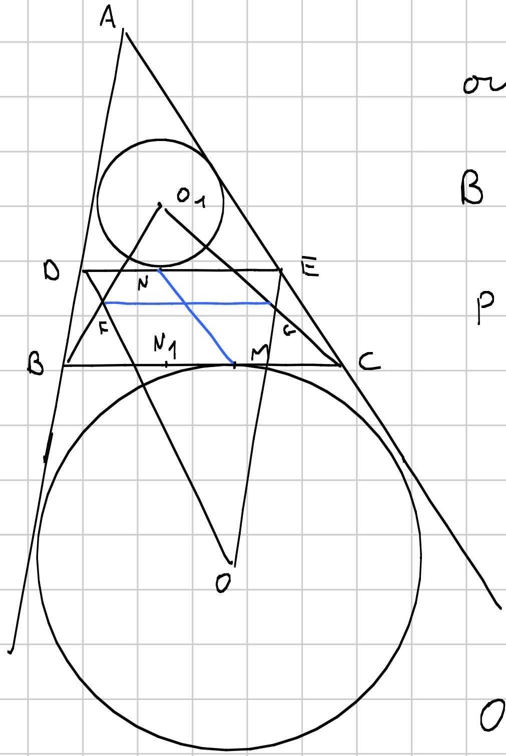
$$\frac{2}{s_A}(s_B + s_C) = \frac{1}{s_B}(s_A + s_C) + \frac{1}{s_C}(s_A + s_B)$$

$$s_A + s_B + s_C = 1$$

$$\frac{2(1 - s_A)}{s_A} = \frac{(1 - s_B)}{s_B} + \frac{(1 - s_C)}{s_C}$$

$$\frac{2}{s_A} = \frac{1}{s_B} + \frac{1}{s_C}$$

(2)



origine in A

$B \quad C \quad D = tB \quad E = tC$

$$P = [x, y, z]_{ABC}$$

$$P = \frac{axA + byB + czC}{ax + by + cz}$$

$$O = [-1, 1, 1]_{ABC}$$

$$O = \frac{bB + cC}{b + c - a}$$

$$O_1 = [1, 1, 1]_{ADE} \qquad O_1 = \frac{tbD + tcE}{ta + tb + tc} = \frac{tbB + tcC}{a + b + c}$$

$$\left[\frac{D}{t} = B \quad \frac{E}{t} = C \right]$$

$$P \quad t.c \quad \frac{BP}{PC} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rightarrow P = \frac{\lambda_2 B + \lambda_1 C}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\frac{BM}{MC} = \frac{a + b - c}{a + c - b}$$

$$M = \frac{(a + c - b)B + (a + b - c)C}{2a} = \frac{B + C}{2} - \frac{b - c}{2a}(B - C)$$

$$\frac{DN}{EN} = \frac{a + c - b}{a + b - c} \rightarrow \underbrace{N = t\frac{B + C}{2} + t\frac{(b - c)}{2a}(B - C)}_{\lambda(B + C) + \mu(bB + cC)}$$

$$F = \lambda B + (1-\lambda) O_1 = \mu D + (1-\mu) O$$

$$\underbrace{\lambda B + \frac{(1-\lambda) t b B}{a+b+c}}_{=} + \underbrace{\frac{(1-\lambda) t c C}{a+b+c}}_{=} =$$

$$= \mu t B + \frac{(1-\mu) b B}{b+c-a} + \frac{(1-\mu) c C}{b+c-a}$$

$\lambda = \mu t$

$$\frac{(1-\mu t) t}{a+b+c} = \frac{(1-\mu)}{b+c-a}$$

$r = b+c-a \qquad R = a+b+c$

$$\mu = \frac{tr - R}{t^2 r - R}$$

$$\frac{F+G}{2} = \frac{tr-R}{t^2 r - R}\, t \cdot \frac{B+C}{2} + \frac{t(t-1)}{t^2 r - R} (bB + cC)$$

N, M, p^t medio di FG allineati

$$\Updownarrow$$

$$(N-M) \times \left(\frac{F+G}{2} - M\right) = 0$$

$$(N-M) \times (F+G) = 2 N \times M$$

$A \times A = 0$

$A \times B = -B \times A$

$$\left[\alpha\,(B+C)+\beta\,(B-C)\right]\times\left[\gamma\,(B+C)+\delta\,(B-C)\right]=$$

$$=\alpha\delta\,(B+C)\times(B-C)+\beta\gamma\,(B-C)\times(B+C)=$$

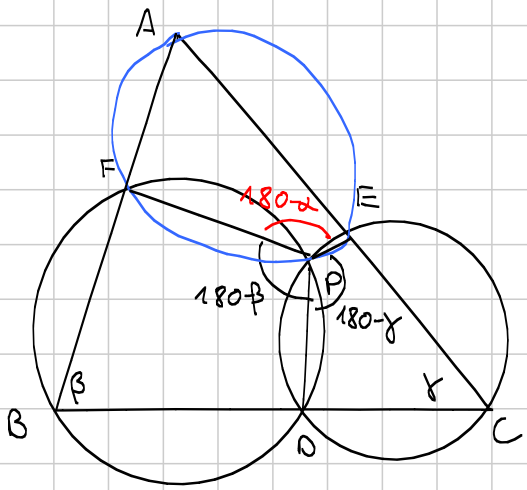
$$=(\beta\gamma-\alpha\delta)\underbrace{(B-C)\times(B+C)}_{B\times C\,-\,C\times B\,=\,2B\times C}$$

$$2\,N\times M=2t\,\frac{b-c}{a}\,B\times C$$

$$(N-M)\times(F+G)=B\times C\,\frac{(b-c)t}{a(t^2r-R)}\Big(-a(t-1)^2+(t+1)(tr-R)+$$
$$+(t^2-1)(b+c)\Big)$$

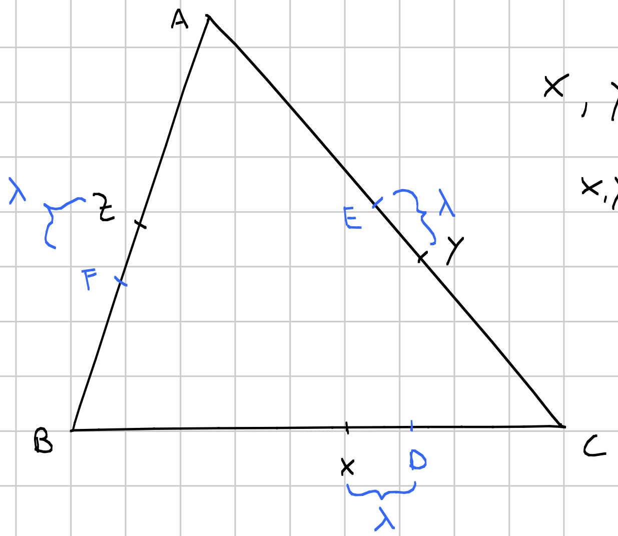
3

teo Miquel



Oss 1 le ipotesi sono "cicliche"

$BD + BF = AC$ e $CD + CE = AB$ $\Rightarrow$ $AF + AE = BC$

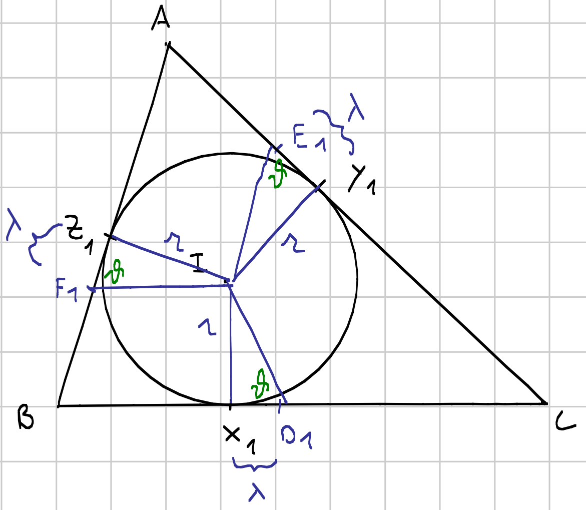


X, Y, Z pt tangenza excerchi

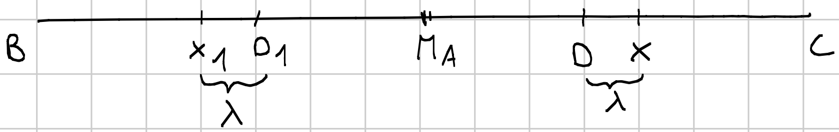
$\Downarrow$

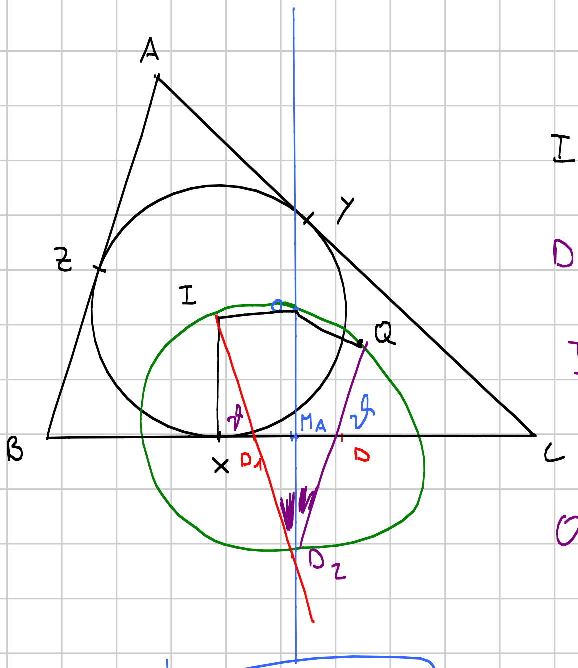
X, Y, Z soddisfano le ipotesi

$XD = \lambda$ $CX + CY = CD + CE$ $\Rightarrow$ $YE = \lambda$



$I\hat{D}_1B = I\hat{E}_1C = I\hat{F}_1A = \vartheta$





$I\hat{D}_1B = \vartheta$

$D_2 = ID_1 \cap OM_A$

$I\hat{D}_2O = 90 - \vartheta = I\hat{E}_2O = I\hat{F}_2O$

O, I, D_2, E_2, F_2 conciclici su ω

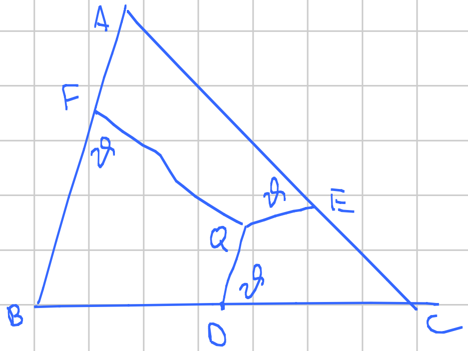
$Q \in \omega$ $\boxed{IO = OQ}$ $Q \neq I$

$O\hat{D}_2Q = I\hat{D}_2O = 90 - \vartheta$ D_2Q è simm di ID_2

rispetto all'asse di BC

D_2 D Q allineati

$Q\hat{D}C = \vartheta = Q\hat{E}A = Q\hat{F}B$



$\boxed{Q \equiv P}$

WC 13 – TdN

Titolo nota 30/01/2013

Problema 4.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)} \notin \mathbb{Z}$$

Se questo fosse un intero, si avrebbe

$$a^2+b^2+c^2 = 3k(ab+bc+ca) \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = (a+b+c)^2$$
$$= (3k+2)(ab+bc+ca).$$

$$p \mid 3k+2 \qquad 2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$$

Esiste un primo congruo a 2 modulo 3 che divide $3k+2$ con un esponente dispari

$$p \mid 3k+2 \qquad p \mid ab+bc+ca \qquad p \mid a+b+c$$

$$a+b+c \equiv 0 \pmod p$$
$$c \equiv -(a+b) \pmod p$$

$$ab+bc+ca \equiv 0 \pmod p$$
$$ab+b(-a-b)+(-a-b)a \equiv 0 \pmod p$$
$$-(a^2+ab+b^2) \equiv 0 \pmod p.$$

Posso supporre a,b,c primi fra loro.
a, b primi fra loro.

In particolare $p \nmid a$ $p \nmid b$

$x = a/b$ $\quad x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

$\boxed{p \neq 2}$ $\quad x = -\frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

-3 è un quadrato modulo p?

$\left(\frac{-3}{p}\right) = \pm 1$

p, q

$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ se almeno uno dei due è $\equiv 1 \bmod 4$.

$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{p}{-3}\right)$ $\quad p \equiv 1 \pmod{3}$.

$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$?

$x \to ax$ $\quad (a, p) = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x \to -3x$ $\quad (x \to 3x)$

$p = 3k + 1$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 6 & 9. & 3k \\ 2 & 5 & 8 & 3k-1 \\ 1 & 4 & 7 & 3k-2 \end{array}$$

Es n. 5

$p \equiv 3 \pmod 4$

$$\prod_{1 \le x < y \le \frac{p-1}{2}} (x^2 + y^2)$$

$x^2 + y^2$

-1 non è un quadrato.

a quadrato $\iff$ $-a$ non è un quadrato.

$$x^2 + y^2 = t^2 \iff x^2 + y^2 = 1$$

$x = tx'$ $y = ty'$

$(tx')^2 + (ty')^2 = t^2$

$x'^2 + y'^2 = 1$

$$x^2 + y^2 = -t^2 \iff x^2 + y^2 = -1.$$

$x^2 + y^2 = 1$ $y^2 = 1 - x^2$

$$\sum_{x=1}^{p} \left(\frac{1-x^2}{p}\right) = ?$$

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \iff a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$$

$$\sum_{x=1}^{p} \left(\frac{1-x^2}{p}\right) \equiv \sum_{x=1}^{p} (1 - x^2)^{(p-1)/2} \pmod p$$

$$\equiv \sum_{x=1}^{p} 1 - \sum_{x=1}^{p} \left(\frac{p-1}{2}\right) x^2 + \ldots + - \sum_{x=1}^{p} x^{p-1}$$

$$\equiv p \quad \pm 0 \cdots \pm 0 \qquad -(p-1)$$
$$\equiv 1 \pmod p \qquad = 1$$

$x \not\equiv 0$, $x \not\equiv 1$, $x \not\equiv -1$ $\qquad p-3$ valori

$\frac{p-3}{2}$ danno quadrati, $\frac{p-7}{2}$ non danno quadrati.

Nella mia limitazione $\left(1 \leq x < y \leq \frac{p-1}{2}\right)$

$\frac{p-3}{4}$ danno quadrati, $\frac{p-7}{4}$ non danno quadrati.

Le coppie $(x<y)$ sono $\frac{p-3}{8}$.

a meno che non si possa risolvere

$$x^2 + x^2 \equiv 1 \pmod p$$
$$2x^2 \equiv 1 \pmod p$$

$$\frac{p-3}{8} = \left(\frac{p-3}{4}\right) \frac{1}{2}$$

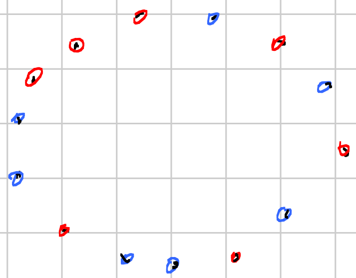
In questo caso ho $\left(\frac{p-3}{4} - 1\right)/2 = p-7/8$

In un caso viene la formula

$$\prod_{1 \leq x < y \leq \frac{p-1}{2}} (x^2+y^2) \equiv \prod_{t=1}^{(p-1)/2} (-t^2)^{p+1/8} (t^2)^{p-7/8} =$$
$$= (-1)^{p+1/8} \prod_{t=1}^{(p-1)/2} (t^2)^{(p-3)/4}$$

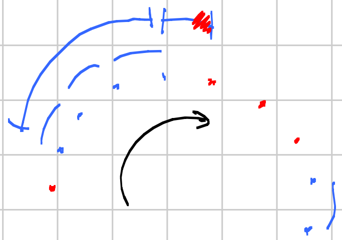
WC13 – Misc + avanzi di TdN

Titolo nota 01/02/2013



È equivalente contare le distanze "k"

Comincio con $k=1$ Considero R rossi e $B = 2n - R$ blu.



\# dist. blu da 1 = somma (lunghezze degli intervalli blu -1)

\# dist. rosse = analogo

\# transizioni blu-rosso = \# interv. blu

\# transizioni rosso-blu = " rossi

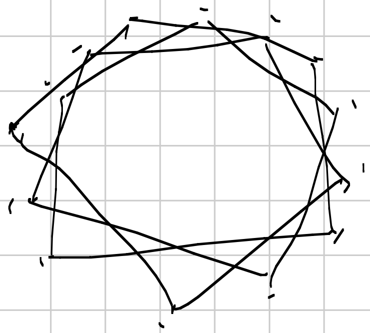
$\sum$ lungh. interv. blu + $\sum$ lungh. interv. rossi + + \# transiz. blu-rosso + \# transiz. rosso-blu = $2n$

$\sum$ lungh. interv. blu + \# transiz. blu-rosso = = \# blu = B

$\sum$ rossi + rosso-blu = = \# rossi = R

\# dist. blu − \# dist. rosse = $B-R$

Così le distanze 1 sono ok in generale.



Saltando di k in k i punti vengono ripartiti in classi. Ciascuna classe è "isomorfa" a un poligono con punti colorati a dist. 1 se prima era k.

In ciascuna classe le dist. blu − dist. rosse = $B_i - R_i$

dist. blu da k iniziali = $\sum$ # dist. blu da 1 nelle classi =
− # dist. rosse " " − $\sum$ # dist. rosse "
$= \sum (B_i - R_i) = \sum B_i - \sum R_i = 0.$

Es. 5

PRIMO LEMMA: se $q(x)$ ha grado $< n$ allora

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot q(k) = 0 \quad = \Delta_1^n q(0)$$

Dim. (PER INDUZIONE) $\Delta_1 q(x) = q(x+1) - q(x)$

So che il grado di $\Delta_1 q$ è esattamente il grado di q meno 1

$$\deg(\Delta_1 q) = \deg(q) - 1$$

$$q(x) = a_d x^d + \text{(termini di grado inferiore)}$$

$$q(x+1) - q(x) = \underbrace{a_d (x+1)^d - a_d x^d}_{a_d \cdot \left((x+1)^d - x^d\right)} + \left(\text{termini di grado} \ldots\right)$$

$$a_d \cdot \left((x+1)^d - x^d\right)$$

$$\| $$

$$a_d \cdot \left(\boxed{d \cdot x^{d-1}} + \ldots\right)$$

$\downarrow$ ci sono solo termini di grado $\leq d-2$

$$\deg(\Delta_1 q) = \deg(q) - 1$$

Coefficiente di testa di $\Delta_1 q$ = $d \cdot$ (coeff. di testa di q)

$$\Delta_1^n q = \underbrace{\Delta_1(\Delta_1(\Delta_1 \ldots \quad (\Delta_1}_{n \text{ volte}} q)))) = 0$$

$\downarrow$ se e solo se $\deg(q) < n$

$$\Delta_1 q(x) = q(x+1) - q(x)$$

$$\Delta_1^2 q(x) = \left(q(x+2) - q(x+1)\right) - \left(q(x+1) - q(x)\right)$$

$$= q(x+2) - 2q(x+1) + q(x)$$

$$\Delta_1^3 q(x) = q(x+3) - 3q(x+2) + 3q(x+1) - q(x)$$

$$\Delta_1^n q(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q(x+k) \cdot (-1)^k$$

$$\Delta_\alpha q(x) = q(x+1) - \alpha q(x)$$

$$\Delta_\alpha \Delta_\beta q(x) = 1\, q(x+2) - (\alpha+\beta)\, q(x+1) + \alpha\beta\, q(x)$$

$$p(x) = \begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n) \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k q(x+k) = a_n \underbrace{\Delta_{\alpha_1} \Delta_{\alpha_2} \Delta_{\alpha_3} \dots \Delta_{\alpha_n}}_{k+1} q(x)$$

Primo lemma (generalizzato) Se $(x-1)^{k+1} \mid p(x)$,

allora, $p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n = 1)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k q(x+k) = 0$$

se (e solo se) $\deg q \leq k$.

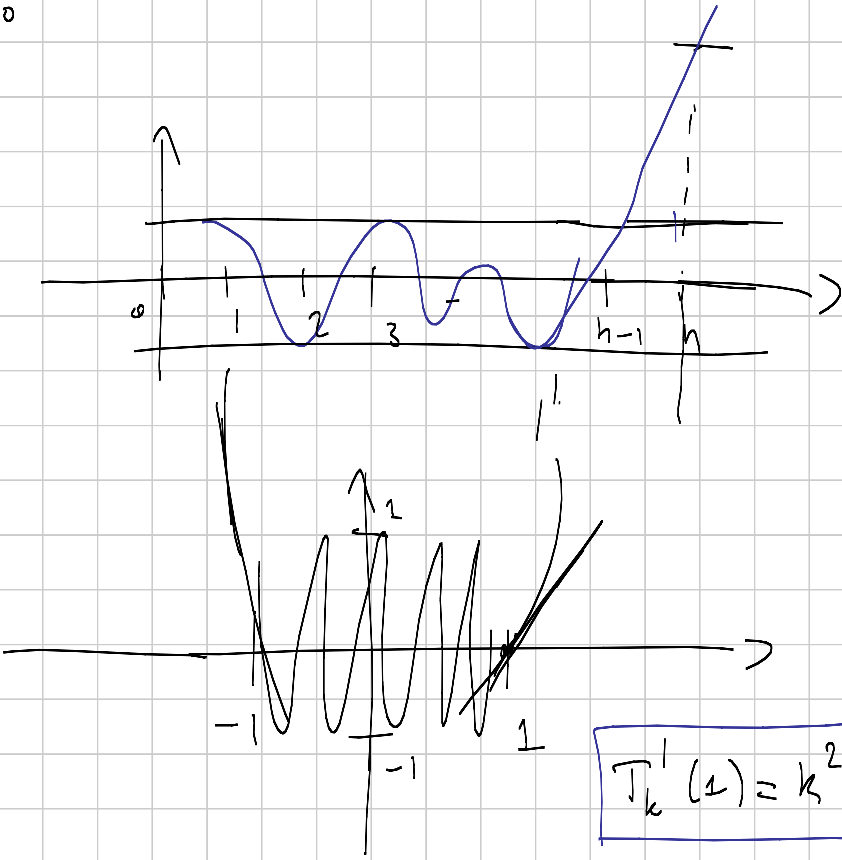
$$\sum |a_k| \geq \,? \qquad \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k\, q(k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, q(k) = -q(n) \qquad (*)$$

q di grado $\leq k$ quindi soddisfa $(*)$,

e tale che $|q(i)| \leq 1$ se $i=0,\dots,n-1$

$$1+\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \geq -\sum a_k\, q(k) = q(n)+1$$



$$\boxed{T_k'(1) = k^2}$$

$$T_k(1+\varepsilon) \geq 1+k^2\varepsilon$$

Polinomi di Tchebyschev: $T_k(x)$ di grado k, tali che $T_k([-1,1]) = [-1,1]$

$$T_h\Big(\underbrace{\frac{2}{n-1}x-1}\Big)$$

$-1, \ldots, 1$

$x \in [0, n-1] \to \frac{2}{n-1}x - 1 \in [-1,1]$

$T_k(x) = 0$

$$\boxed{T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)}$$

$k\theta = \frac{\pi}{2} + 3\pi$

$\theta = \left(\frac{\frac{\pi}{2}+5\pi}{k}\right)$

$T_1(\cos\theta) = \cos\theta \qquad T_1(x) = x$

$T_2(\cos\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos(k\theta)\cos\theta$$

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2x\, T_k(x)$$

$$T_k\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right) = \frac{t^k + \frac{1}{t^k}}{2}$$

$t = e^{i\theta}$
$$T_k\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}}{2} = \cos k\theta$$

$$\left| T_k\left(\frac{2}{n-1}x - 1\right)\right| \leq 1 \quad \text{per} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$T_k\left(\frac{2}{n-1}n - 1\right) = T_k\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\text{somma che vogliamo stimare} \geq 1 + \boxed{T_k\left(\frac{n+1}{n-1}\right)} \geq 2 + \frac{k^2 \cdot 2}{n-1}$$

$$(T_k \geq k^2 \varepsilon)$$

$$T_k\left(\frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2}\right) = \frac{\rho^k + \frac{1}{\rho^k}}{2}$$

$$\frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2} = \frac{n+1}{n-1} = 1 + \varepsilon = 1 + \frac{2}{n-1}$$

$$\rho^2 + 1 - 2(1+\varepsilon)\rho = 0$$

$$\rho^k = \left(1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}\right)^k$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\right)^k + \frac{1}{\left(1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\right)^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\right)^k}_{(\alpha + \sqrt{\beta})^k} + \underbrace{\left(1+\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\right)^k}_{(\alpha - \sqrt{\beta})^k}\right) \geq$$

$$\alpha^k + \cancel{k\alpha^{k-1}\sqrt{\beta}} + \binom{k}{2}\alpha^{k-2}(\sqrt{\beta})^2 \cancel{+ \dots} \qquad \alpha^k \cancel{- k\alpha^{k-1}\sqrt{\beta}} + \binom{k}{2}\alpha^{k-2}(\sqrt{\beta})^2 \cancel{- \dots}$$

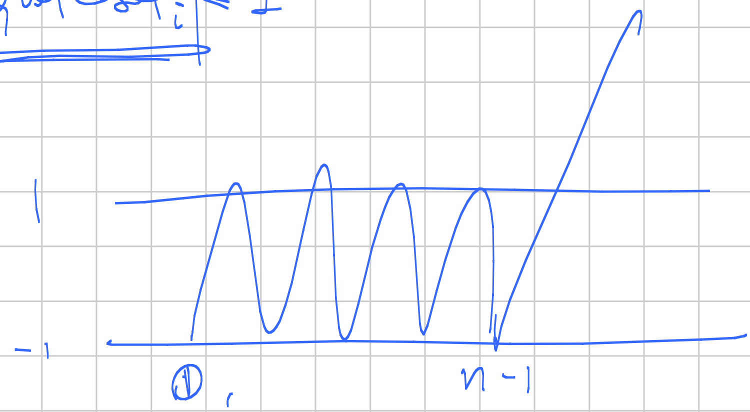
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\cdot(1+\varepsilon)^k + \cancel{2}\binom{k}{2}\underbrace{\left(\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}\right)^2}_{\geq 2\varepsilon}\cdot\underbrace{(1+\varepsilon)^{k-2}}_{\geq 1}\right)$$

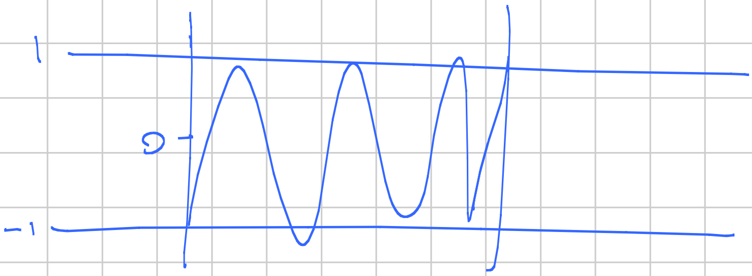
$$\geq 1 + k\varepsilon + \binom{k}{2}2\varepsilon = 1 + k^2\varepsilon$$

$$1 + |Q_1| + |Q_2| + \dots \geq$$

$$\geq 1 + Q_1\cdot(\text{qualcosa})_1 + Q_2\cdot(\text{qualcosa})_2 + \dots$$

$$|\text{qualcosa}_i| \leq 1$$





Problema: tra tutti i poly. monici di grado K, qual.è quello che ha $\max_{x\in[-1,1]} |p(x)|$ più piccolo?

R: polinomi di Chebyshev

$\boxed{\text{Esercizio n. 6}}$

Scacchiera $n \times n$
caselle bianche e nere

$\underset{B}{c_1}$ $\underset{N}{c_2}$ $T = \#\{(c_1, c_2, c_3)\}$

$\underset{B}{c_3}$

$(i, j) \to$ casella nera

a_i = n° bianche nella riga i
b_j = n° bianche nella colonna j

Data $c_2 \to$ $a_i b_j$ scelte per (c_1, c_3)

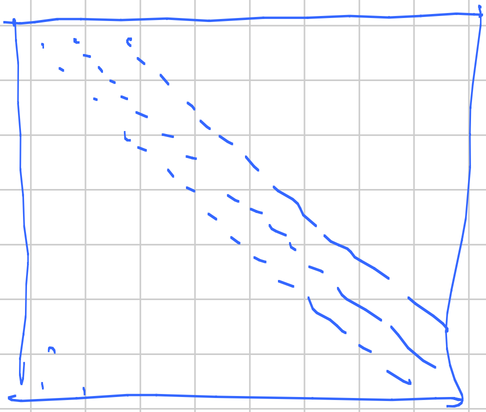
$$T = \sum_{(i,j)\in N} a_i b_j$$

$$T \leq \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in N} (a_i^2 + b_j^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(n-a_i)a_i^2 + \sum_{j=1}^{n}(n-b_j)b_j^2\right\}$$

$$\frac{1}{2} \qquad 2(n-a_i) \quad a_i \quad a_i$$

$$\leq \frac{n}{4}\left(\frac{2n}{3}\right)^3 + \frac{n}{4}\left(\frac{2n}{3}\right)^3 = \frac{4n^4}{27}.$$



$2/3$ diagonale

TdN 6

n intero positivo

Equazione $\quad nx^2 + y^3 = z^4$

Ts. infinite sol. con $(x,y) = (y,z) = (z,x) = 1$

$$y^3 = z^4 - nx^2$$

$$u^2 - dv^2 = 1 \qquad (u+\sqrt{d}v)^k(u-\sqrt{d}v)^k = 1$$

Scegliamo y di una forma speciale

$$y = s^2 - nt^2 = (s - \sqrt{n}t)(s + \sqrt{n}t)$$

$$y^3 = (s + \sqrt{n}t)^3 (s - \sqrt{n}t)^3$$

$$z^2 = s^3 + 3nst^2 \qquad x = 3s^2t + nt^3$$

Di nuovo, caso particolare: $s = 1$

$$z^2 - \underbrace{3n}t^2 = 1 \qquad \text{Se } 3n \neq \square .$$

Esempio $(x, z) = 1$?

$$(x, z) \mid (x, z^2) = (\underset{\not\Phi}{t}(3 + nt^2), \underset{\text{divide } 8}{1 + 3nt^2})$$

Infine, se $3n = m^2$

Una scelta possibile è

$$s = u^2 \qquad z = uv$$

$$u^4 = v^2 - mt^2 = \underset{\substack{\parallel \\ u^4}}{(v + mt)}\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{(v - mt)}$$