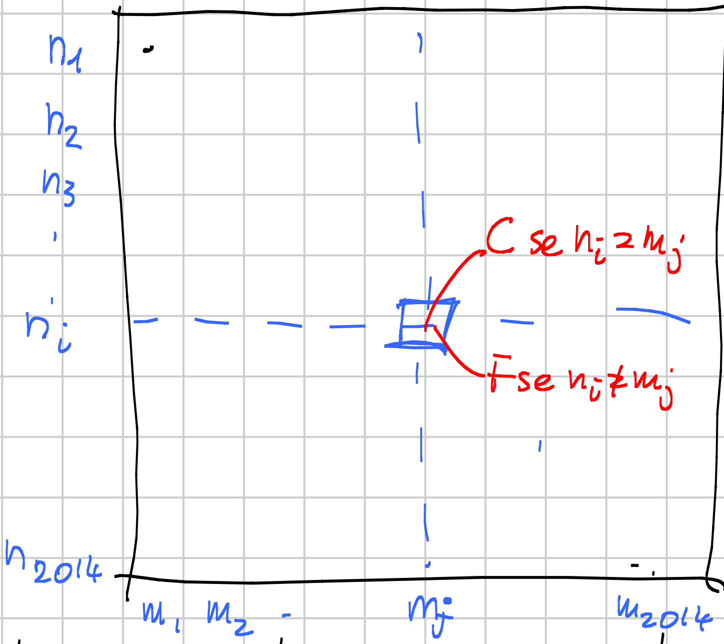
Combinatoria

Titolo nota 29/01/2014

1

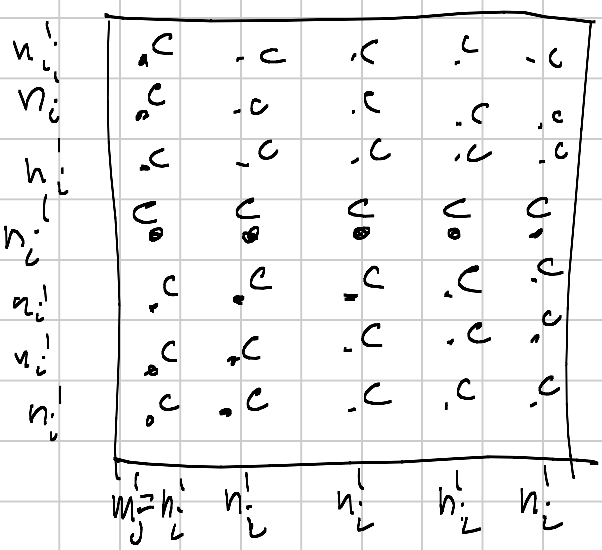
$\bullet = F, C$



2014×2014

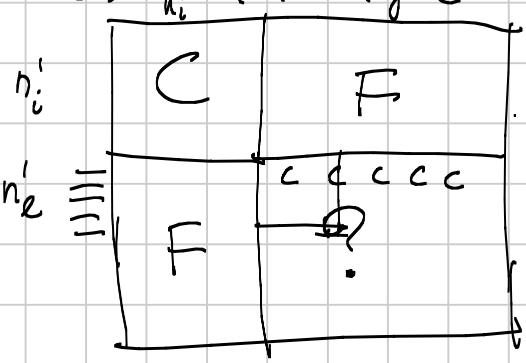
"nella mia colonna ci sono tanti furfanti quanti nella mia riga"

$n_i = \#$ colonne in cui $m_j \neq n_i$ e c'è un C in $(i,j) \Leftrightarrow n_i' = m_j'$.

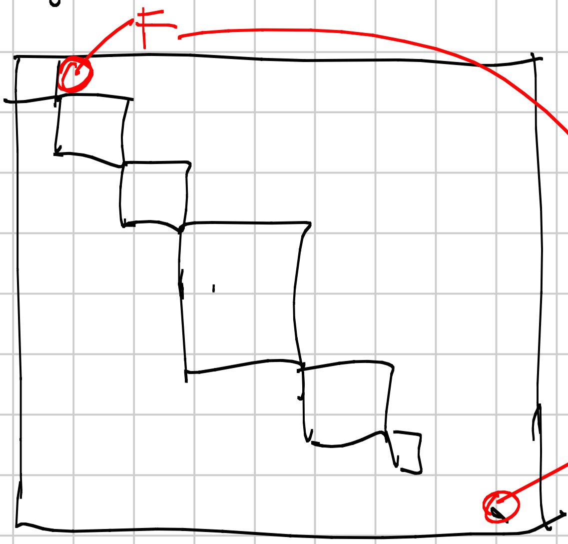


$n_i' = \#$ cavalieri nella riga i
$m_j' = \#$ cavalieri nella col. j

Permutando le colonne, posso supporre che gli n_i' siano all'inizio, e così con le righe.



Quindi sotto le ipotesi la scacchiera a meno di riordinare righe e colonne è "diagonale a blocchi quadrati":



quindi le grandezze dei quadrati sono diverse.

F è impossibile

$\Rightarrow$ l_i lati dei quadrati:

1) $\sum l_i = 2014$
2) # cavalieri $= \sum l_i^2$
3) $l_i \neq l_j \quad i \neq j$.

x^2 è convessa $\Rightarrow$ conviene spezzettare partendo da 1 (se possibile). Se $2014 = \frac{n(n+1)}{2}$, ok $1 \dots n$.

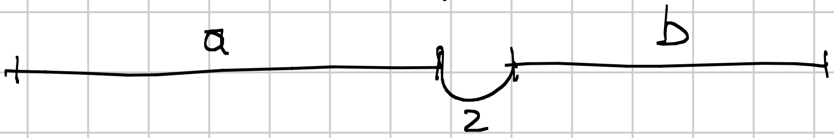
$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 61 \ (62 + 2014 - 61 \cdot 31)$

Ma se ho $\dots k \quad k+3 \dots\dots \to$ conviene $k+1, k+2$

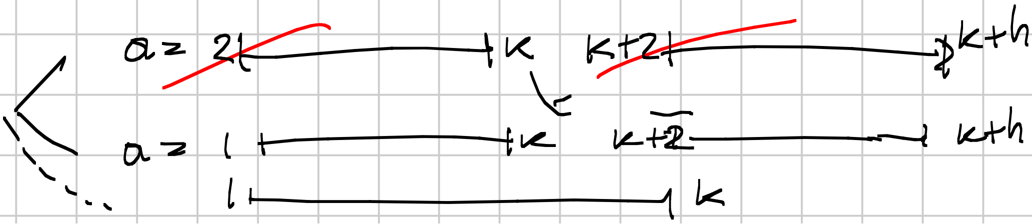
$\Rightarrow$ convengono "buchi" di al più 2, e al più 1 buco:

$k \ \ {}^{k+1} \ \ k+2 \ \text{------} \ k+h \ \ {}_{k+h+1} \ \ k+h+2$

$\Rightarrow$



se $a \not\ni 1,2$, ma $a \ni 3 \longrightarrow 3 \curvearrowright 1,2$ e così via:



$$2 \longmapsto k$$

$$\frac{(k+h-1)(k+h)}{2} + h - 1 \quad (-1)$$

Esercizio 3

$$|A_i| = 500$$

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \subseteq \{1, \dots, 1000\}$$

max r | sicuramente $\exists\, i<j$
$|A_i \cap A_j| \geq r$

→ PIE (???) stima 150 ×

→ Vettori

1000 entrate

$v_1 = (0\ 1 \dots 1 \dots 1\ 0)$ A_1
$\vdots$ $\vdots$
v_5 A_5

500 "1"
500 "0"

$$|A_i \cap A_j| \longleftrightarrow v_i \cdot v_j$$

$$500 \cdot \overset{3^2}{9} + 500\,\overset{2^2}{4} \leq \|\sum v_i\|^2 = \sum \underset{5 \cdot 500}{\underset{\shortparallel}{\|v_i\|^2}} + 2\sum v_i \cdot v_j$$

($\leq$ AM-QM)

$$8 \cdot 500 \leq 2 \cdot \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$\exists\, i,j \quad |A_i \cap A_j| \geq \frac{4 \cdot 500}{10} = 200$$

→ Double Counting

contiamo $|\{ \overset{\{1 \dots 1000\}}{x}, i<j \mid x \in A_i \cap A_j \}|$ *

a partire dalle coppie $10\pi \geq *$

a partire dagli elementi

$n_1 \; ... \; n_{1000}$

insiemi che contengono 1 ... 1000

$$* = \sum_{i=1}^{1000} \binom{n_i}{2}$$

Cosa manca? L'ESEMPIO

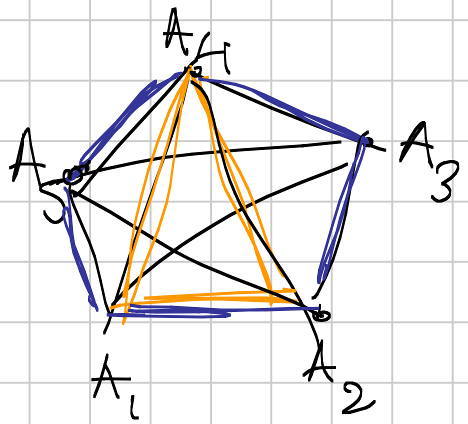
10 blocchi da 100 el.

5 insiemi da 5 blocchi

devo scegliere

5 terne di insiemi, 5 coppie

se faccio lista di coppie generate da ciascuna terna e originali ciascuna coppia compare 2 volte (al max).



Problema C5

2n pedine $\underbrace{\square\square\square ......}_{n}\underbrace{......\square}_{n}$

1 mossa = scambio 2 adiacenti

Voglio far passare ogni pedina

a capo e a coda della fila

1 fase: Inverto l'ordine delle prime n e delle ultime n

ci impiego $\binom{n}{2}$ mosse per ciascun blocco

2 fase: scambio i 2 blocchi n^2 mosse

3 fase = 1, altre $2\binom{n}{2}$

$$K \leq 2\binom{n}{2} + n^2 + 2\binom{n}{2} = 3n^2 - 2n$$

Serve una stima dal basso

cosa deve fare ciascuna pedina

1 fase: raggiungo un estremo (il più vicino)
2 fase: " l'altro estremo
3 fase " la posizione finale

1^a: la pedina i-esima se $i \leq n$ ho almeno $i-1$ mosse
se $i > n$ ho $2n - i$ mosse

$$2\sum_{i=1}^{n-1} i = 2\binom{n}{2}$$

2^a: $(2n-1)2n$

3^a: uguale alla prima $\Rightarrow$ stima $\geq 2\binom{n}{2}$

$$K \geq \frac{1^a + 2^a + 3^a}{2} \geq \binom{n}{2} + (2n-1)n + \binom{n}{2} = n^2 - n + 2n^2 - n$$
$$= 3n^2 - 2n$$