WINTER CAMP 2014 - ALGEBRA MISTA

Titolo nota 30/01/2014

$\boxed{M3}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x+y) + y \leq f(f(f(x)))$ $\forall x, y$

Passato IMO 2013-5 $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ $\rightsquigarrow$ cresci TANTO

$f(xy) \leq f(x) f(y)$ $\rightsquigarrow$ cresci POCO

$\rightsquigarrow f(x) = x$

Disuguaglianza funzionale = contrasto tra 2 esigenze opposte (maniera per trasformare disug in =)

Due disug. contrastanti $\Rightarrow$ uguaglianza

Tornando al problema:

$\boxed{y=0}$ $\rightsquigarrow$ $f(x) \leq f(f(f(x)))$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{f(x) \leq f^{(3)}(x)}$

$\boxed{y = f(f(x)) - x}$ $\rightsquigarrow$ $\cancel{f^{(3)}(x)} + f(f(x)) - x \leq \cancel{f^{(3)}(x)}$

$\boxed{f(f(x)) \leq x}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{f^{(3)}(x) \leq f(x)}$

Ora posso riscrivere il testo come

$$f(x+y) + y \leq f(f(f(x))) = f(x)$$

$\boxed{x=0}$ $f(y) + y \leq f(0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \leq f(0) - x}$

$\boxed{y=-x}$ $f(0) - x \leq f(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \geq f(0) - x}$

$\rightsquigarrow f(x) = c - x$ VERIFICA

— o — o —

TST PREIMO 2008 $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

$f(x+y) \geq f(x) + y f(f(x))$ Dim. che non esistono idea 1 $x=1$ $f(1+y) \geq f(1) + y f(f(1))$ $f(x) \geq a_1 x + b$

$y=x$ $f(2x) \geq \underbrace{f(x)}_{\geq 0} + x \underbrace{f(f(x))}_{ax^2+bx}$ $f(x) \geq a_2 x^2 + \text{roba}$

$\vdots$

$f(x) \geq a_3 x^3 + \dots$

Supponiamo di potere porre $y = f(x) - x$ ← per x grandi POSSO

$$f(f(x)) \geq f(x) + (f(x) - x) f(f(x))$$

$$f(f(x)) [1 + x - f(x)] \geq f(x)$$

Essendo $f(x)$ almeno quadratica è neg. per x grandi. FINE.

— o — o —

$\boxed{M2}$ $p(x) = (x^2 - 8x + 25)(x^2 - 16x + 100) \cdots (x^2 - 8nx + 25n^2) + 1$

IRRIDUCIBILE in $\mathbb{Z}[x]$.

Come dim. che un polinomio è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$?

1. Eisenstein (normale e generalizzato → IMO 1993-1) : si basa sulla scomposizione con poche possibilità del termine noto.
2. Ridursi ad 1 con cambi di variabile : $p(x)$ non verifica le ipotesi, ma magari le verifica $p(x+1)$, $p(x-1)$, $p(x+x^2)$ (vedi pol. ciclotomici con esp. primo)
3. IMO 2002 - 3 : pensare alle radici del polinomio
4. Eisenstein ∞ : termine noto primo e > somma del valore assoluto degli altri.

Supponiamo che sia $p(x) = q(x) \cdot r(x)$

Pongo $x = (4 \pm 3i) k$ ← radici dei termini del prodotto

$$1 = \underbrace{q((4 \pm 3i)k) \cdot r((4 \pm 3i)k)}$$

INTERI DI GAUSS, cioè del tipo $a \pm ib$ $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

Ci sono 4 possibilità:

$$1 \cdot 1$$
$$-1 \cdot (-1)$$
$$i \cdot (-i)$$
$$-i \cdot i$$

Escluse quelle con la i, resta che $q(x)$ e $r(x)$ coincidono in $2n$ valori $\rightsquigarrow$ $q(x) = r(x)$ sempre (sto supponendo per assurdo che abbiamo $\deg < 2n$).

Ma allora $p(x)$ sarebbe un $\square$, ma il termine noto è un $\square + 1$, quindi non è possibile.

Per escludere che p ed r possano essere $\pm i$ basta osservare

FATTO GENERALE: se $q \in \mathbb{Z}[x]$ e $b \equiv 0 \pmod 3$, allora

$$q(a+bi) \text{ ha parte imm. } \equiv 0 \pmod 3.$$

— o —

Aiutino: $p(x) = (x^2-1)(x^2-4) \cdot \ldots \cdot (x^2-n^2)$

— o — o —

<u>Dario's</u>: $q(x)$ vale un po' $1, -1, i, -i$

Sia a e b 2 delle "radici" $k(4 \pm 3i)$

$$\underbrace{(a-b)}_{\substack{\uparrow \\ \text{modulo + grande} \\ \text{perchè } a \text{ e } b \text{ sono distanti}}} \mid \underbrace{(q(a)-q(b))}_{\text{può essere } 2,\, -2,\, \pm 1 \pm i}$$

Bisogna accertarsi che valga a livello di interi di GAUSS.

— o — o —

$\boxed{M1}$ $a_1, \dots, a_{n-1}$ data (numeri reali)

$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$ $\qquad$ $v_0 = 1,\ v_1 = 1,\ v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$

Tesi: $u_n = v_n$

Idea: INDUZIONE CON TESI PIÙ FORTE, cioè $u_n = v_n$ = FORMULONE

= somma di tutti i possibili prodotti di a_i distinti in cui non ce ne sono 2 con indici consecutivi.

$$D_n = \{ A \subseteq \{1, \dots, n-1\} : A \text{ non contiene due termini consecutivi} \}$$

$$u_n = v_n = \sum_{D \in D_n} \prod_{i \in D} a_i \qquad \text{Se } D = \emptyset, \text{ allora } \prod = 1$$

$u_{n+1} = u_n + a_n u_{n-1}$

$a_n u_{n-1}$ → termini con a_n + termini sotto a_{n-2}

u_n → produce tutti i termini che non contengono a_n

Occhio a far vedere le 2 inclusioni. Idem per v_n, ma va esplicitata.

— o — o —

$\boxed{2^a \text{ IDEA}}$ $S(\alpha, \beta, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, n)$ parto con $u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta$

$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$

fino a trovare u_n

Tesi riscritta: $S(1, 1, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, n) = S(1, 1, \{a_{n-1}, \dots, a_1\}, n)$

Proprietà di S:

① $S(\alpha, \beta, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, n) = \alpha S(1, 0, \{\dots\}, n) + \beta S(0, 1, \{\dots\}, n)$

LINEARITÀ

② $S(\alpha, \beta, \{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}, n+1) = S(\beta, \beta + a_1\alpha, \{a_2, \dots, a_n\}, n)$

fare $n+1$ pass. a partire da u_0, u_1 $\qquad$ fare n passaggi a partire da u_1, u_2

③ $S((\alpha,\beta), \{a_1,\dots,a_n\}, n+1) = u_n + a_n u_{n-1}$

$= S(\alpha,\beta,\{a_1,\dots,a_{n-1}\},n)$

$+ a_n S(\alpha,\beta,\{a_1,\dots,a_{n-2}\},n-1)$

Ora dimostro la tesi per induzione

$$S(1,1,\{a_1,\dots,a_n\},n+1) \overset{③}{=} \boxed{S(1,1,\{a_1,\dots,a_{n-1}\},n)}$$

$$+ a_n \boxed{S(1,1,\{a_1,\dots,a_{n-2}\},n-1)}$$

uguali per Hp induttiva

$$S(1,1,\{a_n,\dots,a_1\},n+1) \overset{②}{=} S(1,1+a_n,\{a_{n-1},\dots,a_1\},n)$$

$$= \boxed{S(1,1,\{a_{n-1},\dots,a_n\},n)}$$

$$+ a_n \boxed{S(0,1,\{a_{n-1},\dots,a_1\},n)}$$

②

$$a_n \boxed{S(1,1,\{a_{n-2},\dots,a_1\},n-1)}$$

$v_1 + a_{n-1} v_0$

$v_1 = 1 \quad v_0 = 0$

uguali per Hp induttiva

Cosa ricordare: ① la proprietà di linearità rispetto ai dati iniziali

② l'idea di studiare più in generale tutte le successioni.

(IMO 2005-1 $\quad a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad n=-1 \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1=0$)