Winter Camp 2014

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

Algebra (Francesco Morandin, Luda Ghidelli) 4
Combinatoria (Ludovico Pernazza, Alessandra Caraceni, Marco Trevisiol) 10
Geometria 1 (Fabio Bioletto) 15
Geometria 2 (Fabio Bioletto) 21
Teoria dei Numeri (Davide Lombardo) 28
Miscellanea (Massimo Gobbino) 37

WC 2014

ALGEBRA

Titolo nota 31/01/2014

$\boxed{1}$ $$\sum_{cyc}\frac{1}{a(a+1)+ab(ab+1)} \geq \frac{3}{4} \qquad abc=1 \qquad a,b,c>0$$

$$a=\frac{x}{y} \qquad b=\frac{y}{z} \qquad c=\frac{z}{x} \qquad x,y,z>0$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)+\frac{x}{z}\left(\frac{x}{z}+1\right)} = \sum_{cyc}\frac{y^2z^2}{x^2z^2+xyz^2+x^2y^2+xzy^2} \overset{?}{\geq} \frac{3}{4}$$

384 termini di grado 12

simmetrica in 3 variabili → conti ... Bunching + Schur

↳ PQS $\qquad P=xyz \qquad Q=\sum_c xy \qquad S=\sum_c x$

Provo $2xy \leq x^2+y^2$

$$LHS \geq \sum_{cyc}\frac{2\overbrace{y^2z^2}^{\alpha}}{2\underbrace{x^2z^2}_{\beta}+x^2z^2+y^2z^2+2\underbrace{x^2y^2}_{\gamma}+x^2y^2+z^2y^2} = \sum_{cyc}\frac{2\alpha}{2\alpha+3\beta+3\gamma} \overset{?}{\geq} \frac{3}{4}$$

→ conti grado 3 162 termini (fattibile)

Lemma di Titu (Cauchy-Schwarz)

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{x} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum x}$$

fiducia ← troppo

$$\sum_{cyc}\frac{2y^2z^2}{2y^2z^2+3x^2z^2+3x^2y^2} \geq \frac{2\left(\sum yz\right)^2}{\sum_{cyc} 8x^2y^2} = \frac{\sum y^2z^2+2\sum x^2yz}{4\sum x^2y^2} \overset{?}{\geq} \frac{3}{4}$$

NO

$$\sum\frac{2\alpha^2}{2\alpha^2+3\alpha\beta+3\alpha\gamma} \geq \frac{\sum\alpha^2+2\sum\alpha\beta}{\sum\alpha^2+3\sum\alpha\beta} \overset{?}{\geq} \frac{3}{4}$$

Titu più furbo

$$4\sum\alpha^2+8\sum\alpha\beta \overset{?}{\geq} 3\sum\alpha^2+9\sum\alpha\beta \qquad \sum\alpha^2 \overset{!}{\geq} \sum\alpha\beta$$

$\boxed{2}$ $f(xf(y)) + y + f(x) = f(x+f(y)) + yf(x)$ $\qquad x,y \in \mathbb{R}$

$x \leftarrow 0 \qquad 2f(0) + y = f(f(y)) + yf(0)$

$2f(0) + y(1-f(0)) = f(f(y))$

se $f(0) \neq 1$ $\quad f$ è biunivoca

caso $f(0)=1 \qquad f(f(y)) \equiv 2 \quad \forall y$

$x \leftarrow 0$

$y \leftarrow 0 \qquad 2f(x) = f(x+1) \qquad x \leftarrow 1 \quad 4 = 2f(1) = f(2) = f(f(1)) = 2$

$y \leftarrow \alpha : \quad f(\alpha) = 0 \qquad \alpha = f^{-1}(0)$

$f(0) + \alpha + \cancel{f(x)} = f(\cancel{x}) + \alpha f(x) \qquad \alpha f(x) \equiv f(0) + \alpha \quad \forall x$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\boxed{f(0) = 0} \qquad \boxed{f(f(y)) = y} \qquad \boxed{f = f^{-1}}$

$y \leftarrow f(y) = f^{-1}(y)$

$$\boxed{f(xy) + f(x) + f(y) = f(x+y) + f(x)f(y)}$$

$x \leftarrow 1 \qquad 2f(y) + f(1) = f(y+1) + f(1)f(y)$

$y \leftarrow 1 \qquad 3f(1) = f(2) + f(1)^2 \qquad f(1) = 1$

$xy = x+y \iff (x-1)(y-1) = 1$

$x = y = 2 \qquad 2f(2) = f(2)^2 \qquad \Rightarrow f(2) = 2$

$\cancel{2}f(y) + 1 = f(y+1) + \cancel{f(y)} \qquad \boxed{f(x+1) = f(x) + 1}$

$y \leftarrow y+1 \qquad f(xy+x) + \cancel{f(x)} + f(y) + \cancel{1} = f(x+y) + \cancel{1} + f(x)f(y) + \cancel{f(x)}$

$= f(xy) + f(x) + f(y)$

$$f(xy+x) = f(xy) + f(x)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a = b = 0 \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$

wlog $a \neq 0 \quad x \leftarrow a \quad y \leftarrow \frac{b}{a} \quad xy = b \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$

$f(xy) = f(x)f(y) \qquad f(x^2) = f(x)^2 \qquad$ IV quadrante del grafico è $\emptyset$

$f(x) = \lambda x \quad$ sostituisco .... trovo $\quad f(x) = x$

(3) $a, b, c, d \geq 0$

$$(ab)^{\frac{1}{3}} + (cd)^{\frac{1}{3}} \overset{?}{\leq} (a+c+d)^{\frac{1}{3}}(a+c+b)^{\frac{1}{3}}$$

somme, prodotti (qualche radice per compensare)

- Voglio usare AM-GM!
  (prodotto $\leq$ somma)

A destra ho dei prodotti $\Rightarrow$ non va bene

IDEA 1 tolgo quei prodotti

Se $a+b+c=0$ o $a+d+c=0$ facile

Altrimenti divido

$$\left(\frac{ab}{(a+b+c)(a+d+c)}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{cd}{(a+b+c)(a+d+c)}\right)^{\frac{1}{3}} \overset{?}{\leq} 1$$

- MOLTIPLICO E DIVIDO $\overbrace{\ }^{\text{per}(a+c)}$ PER AVERE 3 TERMINI PER AM-GM

$$\overset{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{a+c}{a+c+d} + \frac{b}{a+c+b}\right)$$

$$\leq \frac{1}{3}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{a+c}{a+c+b} + \frac{d}{a+c+d}\right)$$

(MAGIA!)

SOMMO: $\quad \text{LHS} \leq \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1 \quad$ OK

- IDEA 2 AM-GM al contrario!

$$\sqrt{x\cdot y} \le \frac{x+y}{2}$$

MA! $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$ quando $x=y$

$A = a+c+b$
$B = a+c+d$

se $Ax = By = \frac{1}{xy} \left(= \sqrt[3]{AB}\right)$

$$\sqrt[3]{AB} = \sqrt[3]{Ax\,By\cdot\frac{1}{xy}} = \frac{Ax+By+\frac{1}{xy}}{3} \overset{?}{\ge} \sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{cd}$$

$\rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{AB}}{A} \qquad y = \frac{\sqrt[3]{AB}}{B}$

$$\frac{1}{3}\left\{(a+c+b)\,x + (a+c+d)\,y + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x+y}\right\}$$

$$\frac{1}{3}\left(a(x+y) + \frac{1}{x}\frac{1}{x+y} + bx\right) + \frac{1}{3}\left(c(x+y) + \frac{1}{y}\frac{1}{x+y} + dy\right) \overset{\text{AM-GM vera}}{\ge}$$

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd}$$

C. S. : esercizio, dimostratelo con questo trucco!

$$\left(\sum a_i b_i\right) \le \underbrace{\left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\ x\cdot\frac{1}{x}$$

Esercizio : dimostrate Hölder generalizzato con questo trucchetto!

$$\left(\sum a_i^{(1)}\cdot a_i^{(2)}\cdot\ldots\cdot a_i^{(n)}\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum \left(a_i^{(1)}\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\cdot \ldots$$

$$\ldots \left(\sum \left(a_i^{(n)}\right)^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_n}} \leadsto \text{se } \boxed{\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}}$$

(C.S. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$)

• sol. semplice con Hölder

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

$\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{cd} =$ Hölder

$$= \sqrt[3]{\frac{a}{a+c}}\,\sqrt[3]{b}\,\sqrt[3]{a+c} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+c}}\,\sqrt[3]{d}\,\sqrt[3]{a+c} \le$$

1 2 3 1 3 2

$$\underbrace{\left(\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a+c}\right)}_{=1}^{\frac{1}{3}}\left(b+a+c\right)^{\frac{1}{3}}\left(a+c+d\right)^{\frac{1}{3}} \quad \checkmark$$

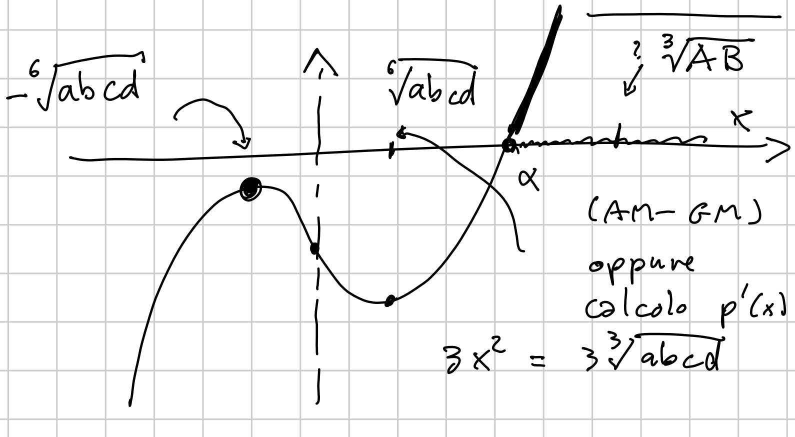
• VERTECHI WAY

$$\alpha = LHS = \sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{cd}$$

$$\alpha^3 = ab+cd+3\sqrt[3]{abcd}\,\alpha$$

$\longrightarrow$ α e' radice del polinomio

$$p(x) = x^3 - 3\sqrt[3]{abcd}\,x - (ab+cd)$$



(AM-GM)
oppure
calcolo $p'(x)=0$

$$3x^2 = 3\sqrt[3]{abcd}$$

$$p\left(-\sqrt[6]{abcd}\right) = -\sqrt{abcd} + 3\sqrt{abcd} \mp ab - cd \overset{?}{\leq} 0$$

AM–GM

abbiamo:

$$\sqrt[3]{AB} \geq \alpha \qquad (\text{tesi})$$

$$\Updownarrow$$

$$p\left(\sqrt[3]{AB}\right) \geq 0$$

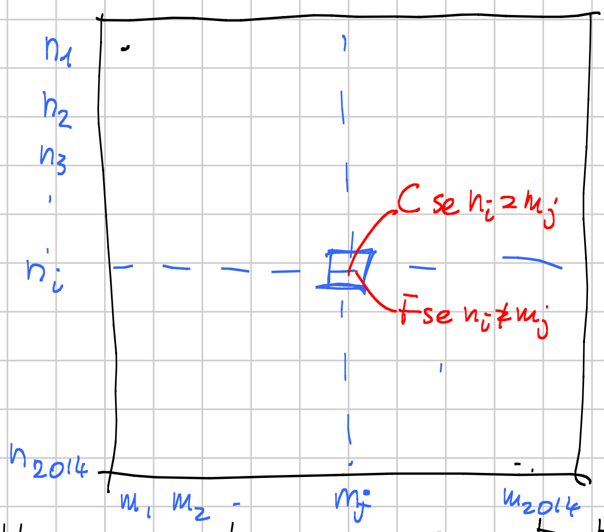
fai il conto AM– GM

$\blacksquare$

Combinatoria

Titolo nota 29/01/2014

1

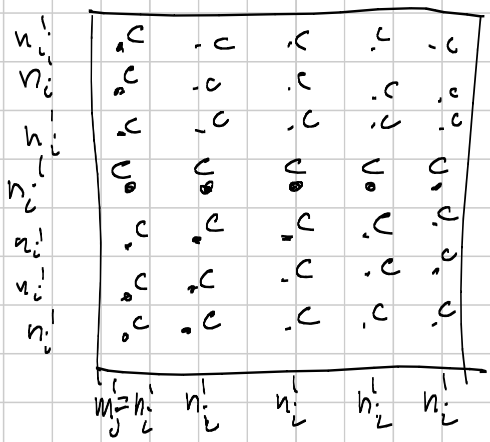


• = F, C

2014 × 2014

"nella mia colonna ci sono tanti furfanti quanti nella mia riga"

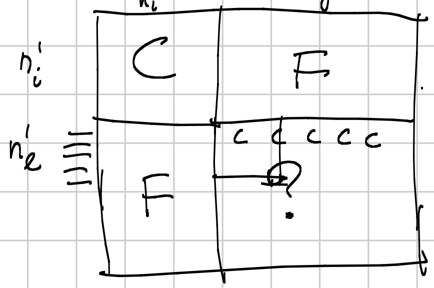
$n_i = \#$ colonne in cui $m_j \neq n_i$ e c'è un C in $(i,j) \Leftrightarrow n_i' = m_j'$.



$n_i' = \#$ cavalieri nella riga i

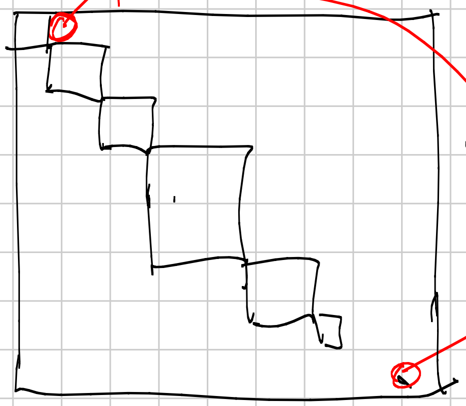
$m_j' = \#$ cavalieri nella col. j

Permutando le colonne, posso supporre che gli n_i' siano all'inizio, e così con le righe.



Quindi sotto le ipotesi la scacchiera a meno di riordinare righe e colonne è "diagonale a blocchi quadrati":

F



quindi le grandezze dei quadrati sono diverse.

F è impossibile

$\Rightarrow$ l_i lati dei quadrati:

1) $\sum l_i = 2014$

2) # cavalieri $= \sum l_i^2$

3) $l_i \neq l_j \quad i \neq j$.

x^2 è convessa $\Rightarrow$ conviene spezzettare partendo da 1 (se possibile). Se $2014 = \frac{n(n+1)}{2}$, ok $1 \dots n$.

$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 61 \ (62 + 2014 - 61 \cdot 31)$

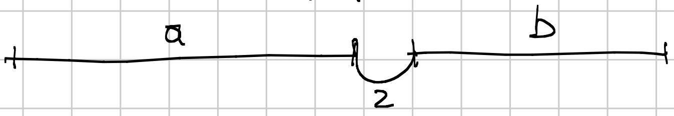
Ma se ho $\dots k \quad k+3 \dots \dots \rightarrow$ conviene $k+1, k+2$

$\Rightarrow$ convengono "buchi" di al più 2, e al più 1 buco:

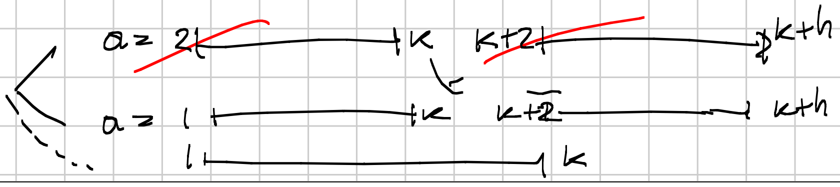
$k \ \ k+2 \ \dots\dots \ k+h \ \ k+h+2$

$k+1 \qquad k+h+1$

$\Rightarrow$



Se $a \neq 1, 2$, ma $a \geq 3 \rightarrow 3 \curvearrowright 1, 2$ e così via:



$2 \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv k$

$$\frac{(k+h-1)(k+h)}{2} + h - 1 \quad (-1)$$

Esercizio 3

$$|A_i| = 500$$

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \subseteq \{1, \dots 1000\}$$

max r | sicuramente $\exists\, i<j$ $|A_i \cap A_j| \geq r$

$\rightarrow$ PIE (???) stima 150 ✗

1000 entrate

$\rightarrow$ Vettori $v_1 = (0\ 1 \dots 1 \dots 1\ 0)$ A_1

$\vdots$ $\vdots$

v_5 A_5

500 "1"

500 "0"

$$|A_i \cap A_j| \longleftrightarrow v_i \cdot v_j$$

$$500 \cdot 3^2 + 500 \cdot 2^2 \leq \|\sum v_i\|^2 = \sum \underbrace{\|v_i\|^2}_{5 \cdot 500} + 2\sum v_i \cdot v_j$$

(AM-QM)

$$8 \cdot 500 \leq 2 \cdot \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$\exists\, i,j \ |A_i \cap A_j| \geq \frac{4 \cdot 500}{10} = 200$$

$\rightarrow$ Double Counting

contiamo $|\{ \overset{\{1 \dots 1000\}}{x}, i<j \mid x \in A_i \cap A_j \}|$ *

a partire dalle coppie $10 r \geq *$

a partire dagli elementi

$n_1 \dots n_{1000}$

\# insiemi che contengono $1 \dots 1000$

$$* = \sum_{i=1}^{1000} \binom{n_i}{2}$$

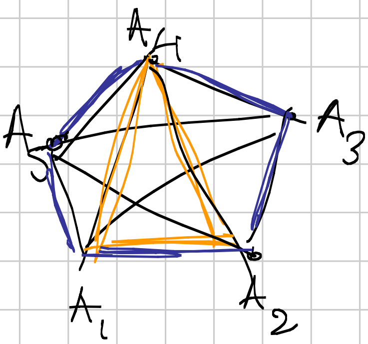
Cosa manca? L'ESEMPIO

10 blocchi da 100 el.

5 insiemi da 5 blocchi

devo scegliere 5 terne di insiemi, 5 coppie

se faccio lista di coppie generate da ciascuna terna e originali ciascuna coppia compare 2 volte (al max).



Problema C5

$2n$ pedine $\underbrace{\square\,\square\,\square \dots}_{n}\ \underbrace{\dots \square}_{n}$

1 mossa = scambio 2 adiacenti

Voglio far passare ogni pedina

a capo e a coda della fila

1 fase: Inverto l'ordine delle prime n e
delle ultime n

ci impiego $\binom{n}{2}$ mosse per ciascun blocco

2 fase: scambio i 2 blocchi n^2 mosse

3 fase = 1, altre $2\binom{n}{2}$

$$K \leq 2\binom{n}{2} + n^2 + 2\binom{n}{2} = 3n^2 - 2n$$

Serve una stima dal basso

cosa deve fare ciascuna pedina

1 fase: raggiungo un'estremo (il più vicino)
2 fase: " l'altro estremo
3 fase " la posizione finale

1^a: la pedina i-esima se $i \leq n$ ho almeno $i-1$ mosse
se $i > n$ ho $2n - i$ mosse

$$2\sum_{i=1}^{n-1} i = 2\binom{n}{2}$$

2^a: $(2n-1)2n$

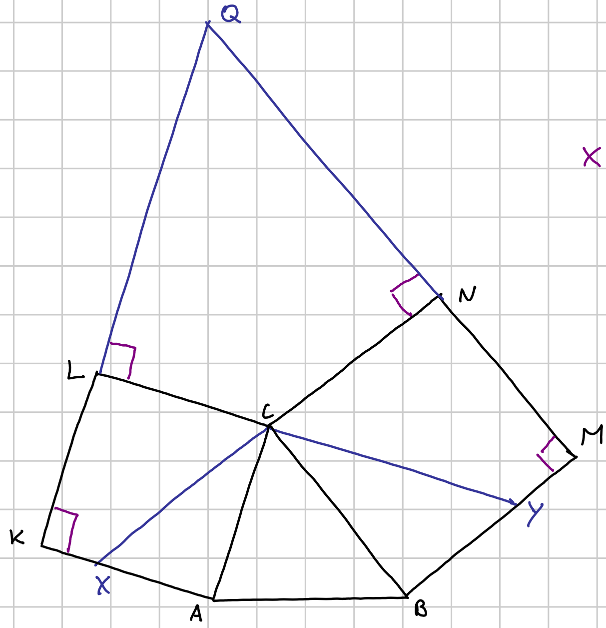
3^a: uguale alla prima $\Rightarrow$ stima $\geq 2\binom{n}{2}$

$$K \geq \frac{1^a + 2^a + 3^a}{2} \geq \binom{n}{2} + (2n-1)n + \binom{n}{2} = n^2 - n + 2n^2 - n = 3n^2 - 2n$$

WC14 - G1

Titolo nota 30/01/2014

1



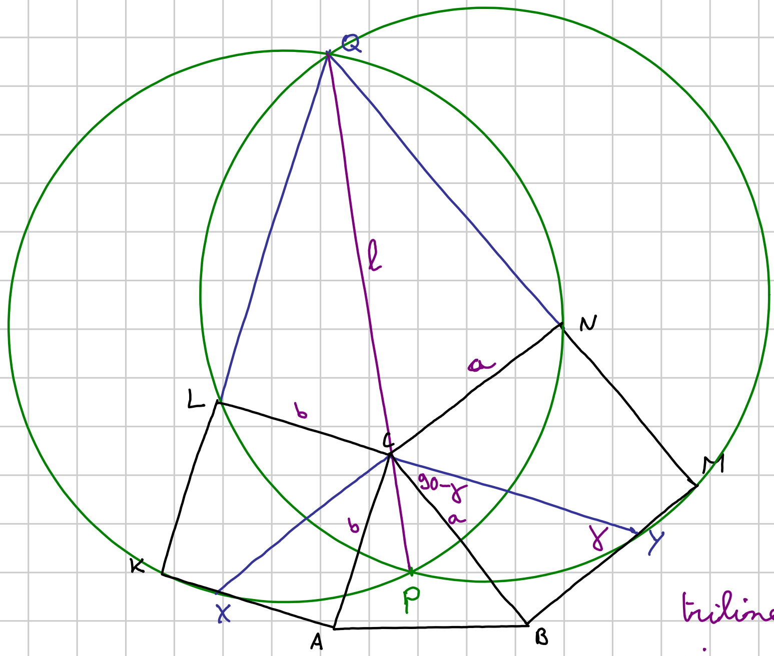
$X\hat{K}Q = X\hat{N}Q = 90°$

$\Downarrow$

$KXNQ$ ciclico

analog.

$YMQL$ ciclico



punto A → PCQ allineati

$\Updownarrow$

C sta in asse radicale

$\Updownarrow$

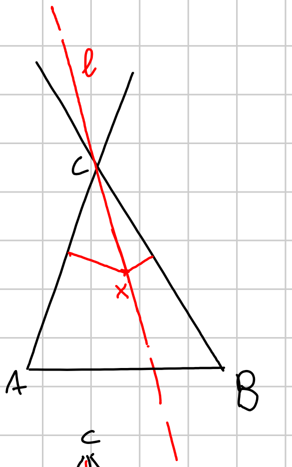
$$\underset{b}{CL}\cdot \underset{\frac{a}{\sin\gamma}}{CY} = \underset{a}{CN}\cdot \underset{\frac{b}{\sin\gamma}}{CX}$$

trilineari

simm → $bx - ay = 0$

$Q = (a, b, ?)$

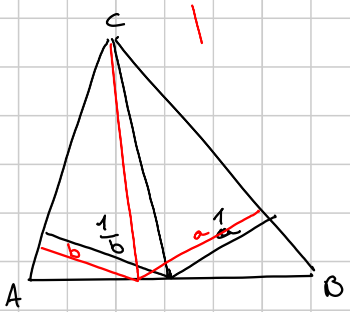
e verifica!! c.v.d.

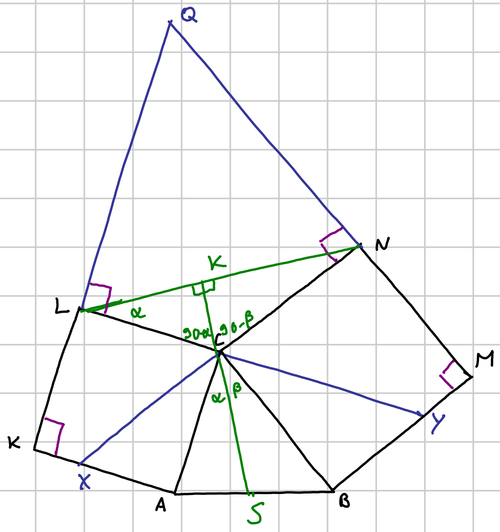


$$\ell \rightsquigarrow x \text{ t.c. } \frac{d(x, AC)}{d(x, BC)} = \lambda$$

$\downarrow$ simm

$$\ell' \rightsquigarrow x' \text{ t.c. } \frac{d(x', AC)}{d(x', BC)} = \frac{1}{\lambda}$$





altra idea

S pt medio e $K = CS \cap LN$

$\Downarrow$

$LN \perp CK$

DIM

ruoto di 90° $\triangle CLN$

$L \to A$

$C\,N'\,B$ allineati

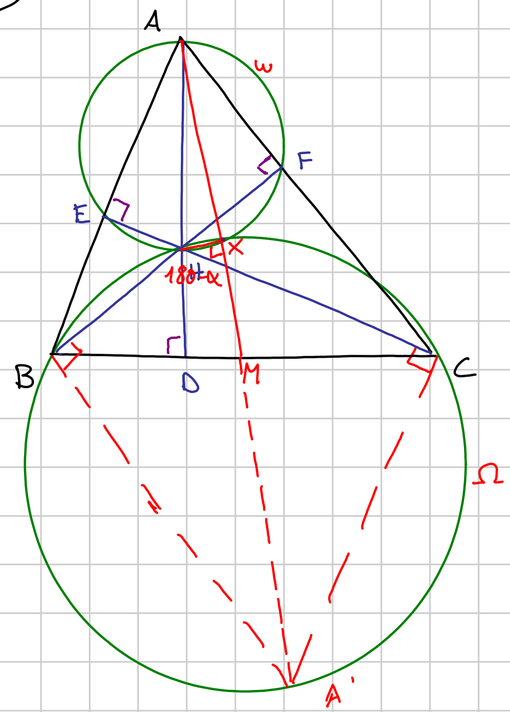
C pt medio di $N'B$

S pt medio di AB

$\Downarrow$

talete!

2

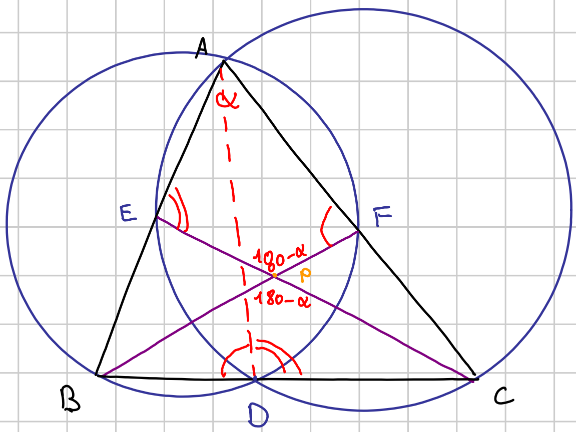


caso particolare
D piede dell'altezza

EHFA ciclico con diametro AH
$X = AM \cap \omega$
X è proiezione di H su AM

osservazione
$X \in \Omega$
con Ω circ. circ. a BHC

DIM
simmetria rispetto a M
$A'B \parallel AC$ $\quad$ $A'C \parallel AB$
$A'H$ diametro!
QUINDI $X \in \Omega$

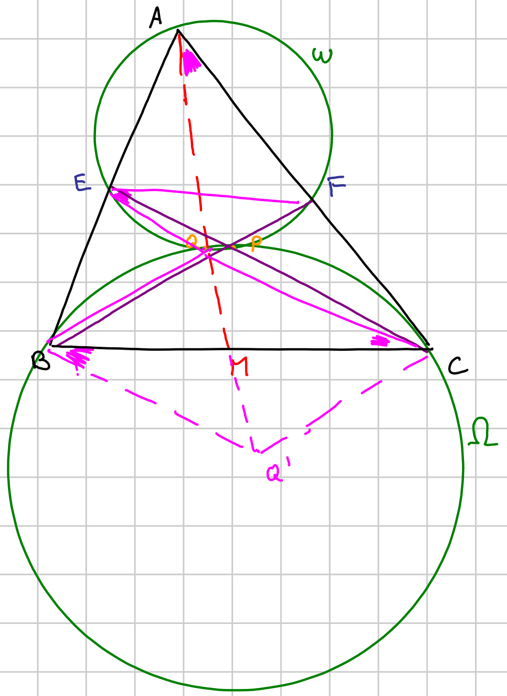


PROBLEMA "VERO"

OSS1:
se $P = BF \cap CE \Rightarrow AEPF$ ciclico

$$A\hat{E}P + P\hat{F}A = A\hat{D}C + A\hat{D}B = 180^\circ$$

OSS 2
$$B\hat{P}C = 180 - \alpha$$
$$\Downarrow$$
$$P \in \Omega$$
Ω circ. circoscritta a BHC



$X = AM \cap \Omega$

Q = seconda intersez. tra ω e Ω

Th Q sta su AM

$Q\hat{E}F = Q\hat{A}F = Q\hat{A}C$

|| (LEMMA)

$Q\hat{C}B$

=

Q' = simm. di Q wrt M

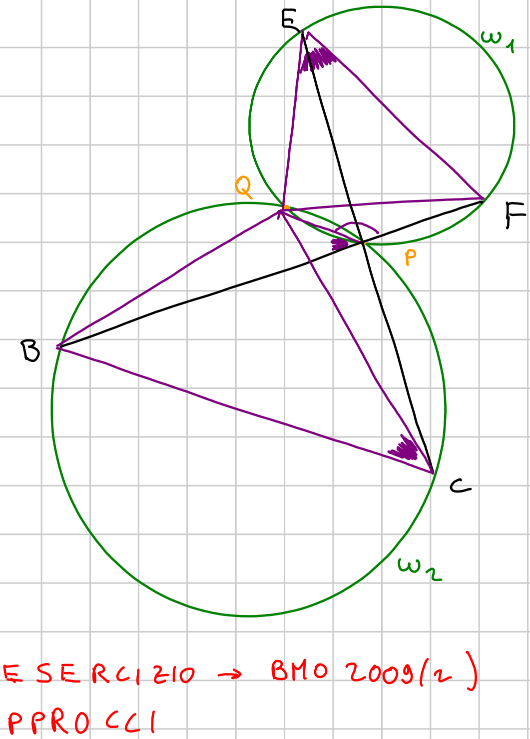
$\Downarrow$

$Q' \in (ABC) \Rightarrow Q'\hat{B}C = Q\hat{A}C$

$Q'\hat{B}C = Q\hat{C}B$

QUINDI AQQ' allineati
QMQ' allineati } $\Rightarrow$ AQM allineati

C.V.D.



LEMMA DELLA ROTOMOTETIA

$\boxed{Hp}$

B, C, E, F punti qualsiasi

$P = EC \cap BF$

$\omega_1 = (BCP)$

$\omega_2 = (EPF)$

$Q = \omega_1 \cap \omega_2$, $Q \neq P$

$\boxed{Th}$

$\overset{\triangle}{QBC} \sim \overset{\triangle}{QFE}$

$Q\hat{C}B = Q\hat{P}B = 180 - Q\hat{P}F = Q\hat{E}F$

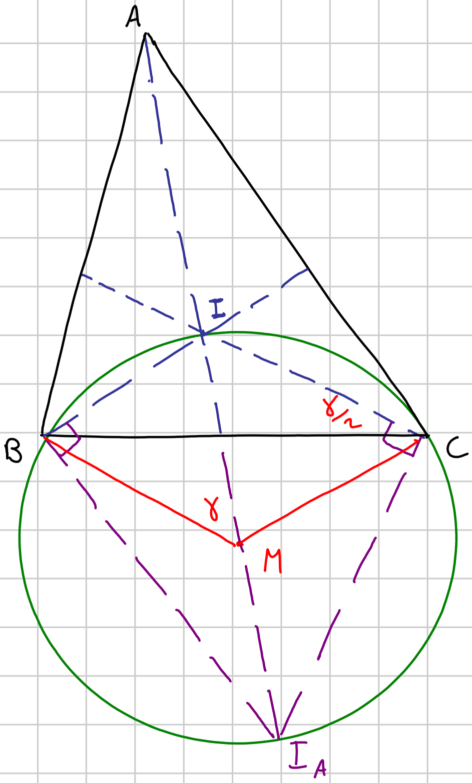
$Q\hat{B}C = Q\hat{F}E$ C.V.D.

(ESERCIZIO → BMO 2009/2)

APPROCCI

- rotomotetia
- inversione (wrt A) + simmetria (wrt bisettrice)
- conti

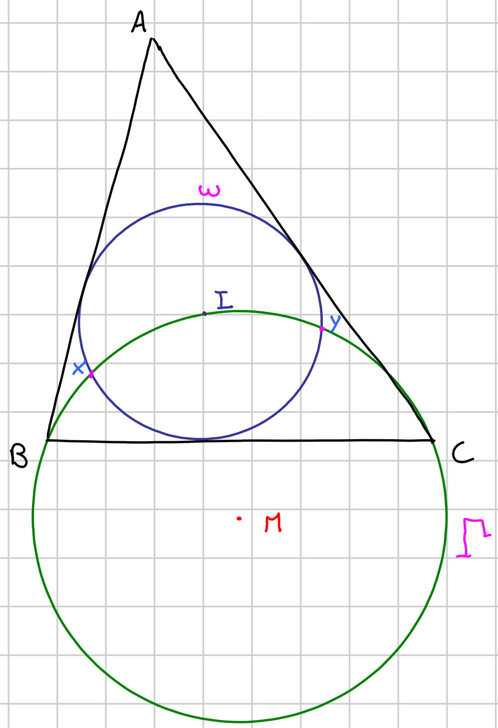
3



RICHIAMI

- $BICI_A$ ciclico
- il centro è M
  (M pt medio arco BC della circoscritta a ABC)

centro sta su II_A
e su asse di BC



ω' circonferenza passante per x e y e tg a (ABC)

CHI È ω' ??

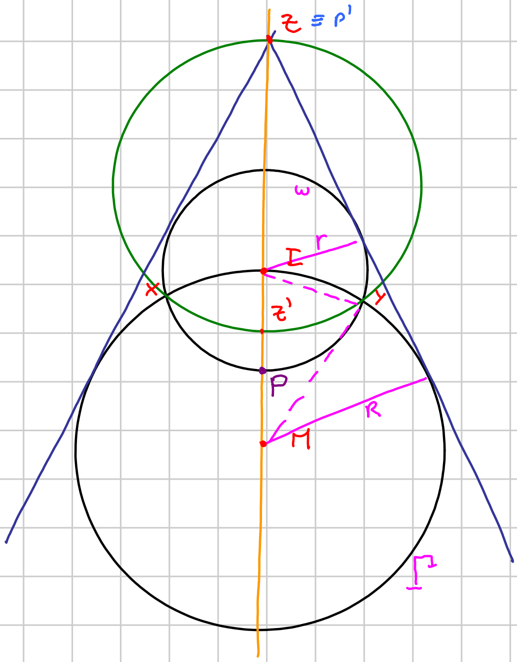
inversione rispetto a Γ

$\Downarrow$

- $BC \longleftrightarrow (ABC)$
- $\omega \longleftrightarrow \omega'$

COSA CI BASTERA'

ci basta che l'immagine di ω sia tangente a (ABC)



a)

chi sono Z e Z'?

sono pt su MI t.c.

$$\frac{ZI}{ZM} = \frac{Z'I}{Z'M} = \frac{r}{R}$$

$ZXZ'Y$ ciclico per il th di Apollonio

$$\frac{r}{R} = \frac{ZI}{ZM} = \frac{Z'I}{Z'M} = \frac{YI}{YM} = \frac{XI}{XM}$$

b) Th

Ap = cfr di apollonio

Ap è l'inverso di ω risp a Γ

DIM

$P = IM \cap \omega$

P' = inverso di P

$$Th \Leftrightarrow P' \equiv Z$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{P'I}{P'M} = \frac{r}{R}$$

$$P'M = \frac{R^2}{PM} = \frac{R^2}{R-r}$$

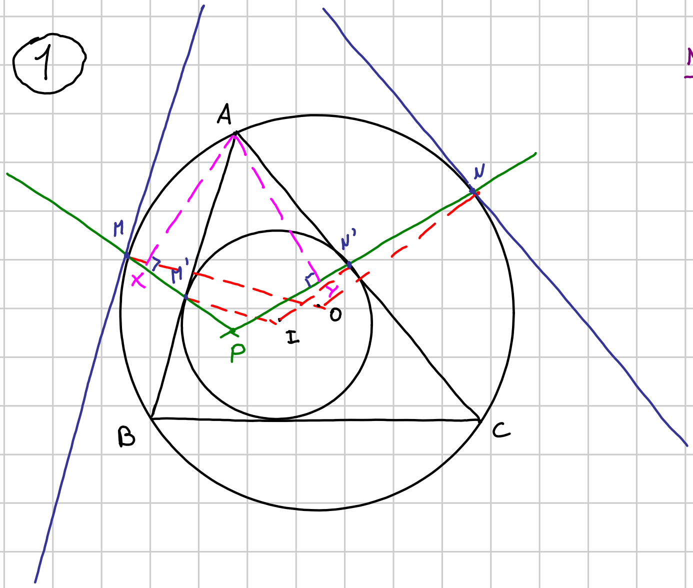
$$P'I = P'M - MI = \frac{R^2}{R-r} - R = \frac{R^2 - R^2 + rR}{R-r} = \frac{rR}{R-r}$$

c.v.d.

WC14 – G2

Titolo nota 30/01/2014

(1)



NOTAZIONI

$\omega = (AXY)$

$P = MM' \cap NN'$

$O =$ circocentro ABC

OSS. 1

$P \in \omega$ e AP diametro

OSS. 2

$AXIY$ ciclico $\Leftrightarrow PI \perp AI$

OSS. 3

$M'IN'$ e MON sono simili

non solo!

hanno i lati a 2 a 2 paralleli

QUINDI $\rightarrow$ sono omotetici!

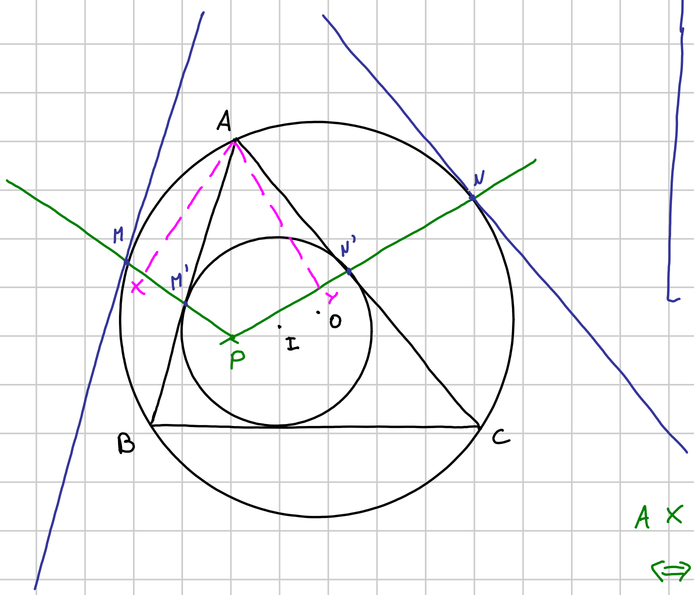
DIM

cosa fa omotetia di centro che manda $M' \rightarrow M$?

- $\ell(M'N') \rightarrow \ell(MN)$
- $N' \rightarrow N$
- $\ell(M'I) \rightarrow \ell(MO)$
- $\ell(N'I) \rightarrow \ell(NO)$
- $I \rightarrow O$

$\Downarrow$

P, I, O allineati!



$AXIY$ ciclico $\Leftrightarrow PI \perp AI \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow IO \perp AI$

$$IO \perp AI \Leftrightarrow (\vec{I} - \vec{O}) \cdot (\vec{A} - \vec{I}) = 0$$

FATTO GENERALE

$$\vec{S} = \frac{[BCS]\vec{A} + [ACS]\vec{B} + [BAS]\vec{C}}{[ABC]}$$

$$\vec{I} = \frac{a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}}{a+b+c}$$

[ALTRO RICHIAMO

origine in O

$\vec{A}\cdot\vec{A} = R^2$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$]

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\cdot\left(A - \frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\right) = 0$$

SVOLGO I CONTI

$$(aA+bB+cC)\,\big((b+c)A - bB - cC\big) = 0$$

$$A\cdot A\,(ab+ac) + B\cdot B\,(-b^2) + C\cdot C\,(-c^2) +$$

$$+A\cdot B\,(-ab+b^2+bc) + A\cdot C\,(-ac+bc+c^2) + BC\,(-2bc) = 0$$

$$R^2\left(\cancel{ab} + \cancel{ac} - \cancel{b^2} - \cancel{c^2} - \cancel{ab} + \cancel{b^2} + \cancel{bc} - \cancel{ac} + \cancel{bc} + \cancel{c^2} - \cancel{2bc}\right) +$$

$$-\frac{c^2}{\cancel{2}}(-ab+b^2+bc) - \frac{b^2}{\cancel{2}}(-ac+bc+c^2) - \frac{a^2}{\cancel{2}}(-2bc)$$

$$-abc^2 + b^2c^2 + bc^3 - ab^2c + b^3c + b^2c^2 - 2a^2bc = 0$$

$$-ac + bc + c^2 - ab + b^2 + bc - 2a^2 = 0$$

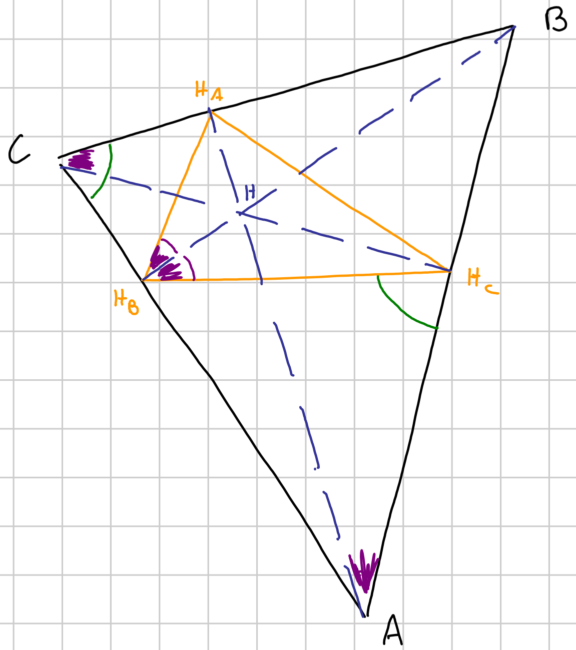
$$(b+c)^2 - a^2 - a(a+b+c) = 0$$

$$(b+c-a)(b+c+a) - a(a+b+c) = 0$$

$$(a+b+c)(\underbrace{b+c-2a}_{=0}) = 0$$

CVD

2



OSSERVAZIONI

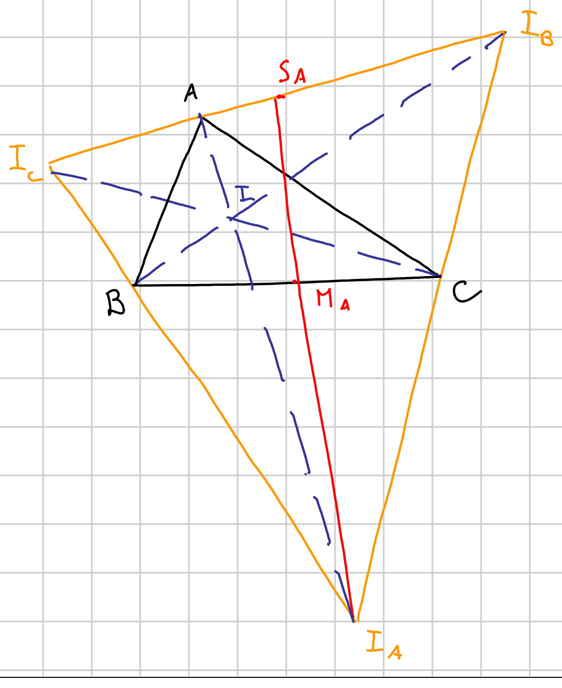
- $C H_A H H_B$ ciclico e così via
- H incentro del tr. ortico
- A, B, C excentri
- $C H_B H_C B$ ciclico e così via
- $A \overset{\Delta}{H_B} H_C \sim \overset{\Delta}{ABC}$

COSA FARE ORA??

BARICENTRICHE!!

alcuni punti:

- vertici $\rightarrow$ $(1,0,0)$ ecc...
- $H = \left(\frac{a}{\cos\alpha}, \frac{b}{\cos\beta}, \frac{c}{\cos\gamma}\right)$
- $H_A = \left(0, \frac{b}{\cos\beta}, \frac{c}{\cos\gamma}\right)$ e simili
- $I = (a, b, c)$ - $I_A = (-a, b, c)$ e simili
- $G = (1,1,1)$
- coniug isog di $(x, y, z) \longrightarrow \left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$
- $K = (a^2, b^2, c^2)$



RIFORMULIAMO IL PROBLEMA

ABC triangolo

I incentro

I_A, I_B, I_C excentri

K pt. di Lemoine di ABC

K' pt. di Lemoine di $I_A I_B I_C$

Th $\rightarrow$ I, K, K' allineati

chi è K'?

chi sono le simmediane di $I_A I_B I_C$?

S_A piede simmediana $(\in I_B I_C)$

M_A pt medio di BC

I_A, M_A, S_A allineati

$I_A = (-a, b, c) \qquad M_A(0, 1, 1)$

$$\det \begin{pmatrix} -a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

$\ell_A : (b-c)x + (a)y + (-a)z = 0$ simmediana

$\ell_B : (-b)x + (c-a)y + (b)z = 0$

$K' = \ell_A \cap \ell_B$

$$\underbrace{\begin{matrix} b-c & a & -a \\ -b & c-a & b \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$K' = (ab + a(c-a),\ ab - b(b-c),\ (b-c)(c-a) + ab)$

$K' = (a(b+c-a),\ b(a+c-b),\ c(a+b-c))$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \underbrace{a(b+c-a)}_{\cdot \frac{1}{a}} & \underbrace{b(a+c-b)}_{\cdot \frac{1}{b}} & \underbrace{c(a+b-c)}_{\cdot \frac{1}{c}} \end{pmatrix} = 0$$

I, K

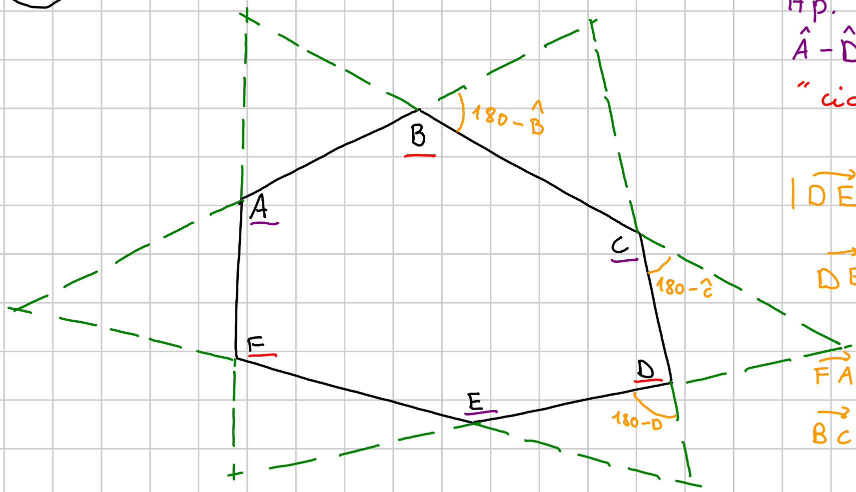
K'

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c-a & a+c-b & a+b-c \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{R_3 = (a+b+c) \cdot R_1 - 2R_2}$$

FINE!

3



Hp.

$\hat{A} - \hat{D} = \hat{C} - \hat{F} = \hat{E} - \hat{B}$

" ciclicità " ipotesi

$|\vec{DE}| = |\vec{AB}|$

$\vec{DE} = R_{(\cancel{x})}(\vec{AB})$

$\vec{FA} = R_{(\cancel{y})}(\vec{CD})$

$\vec{BC} = R_{(\cancel{z})}(\vec{EF})$

$x = (180 - B) + (180 - C) + (180 - D) = 540 - (\underline{B + C + D})$

$y = \text{— — — — —} = 540 - (\underline{D + E + F})$

$z = \text{— — — — —} = 540 - (F + A + B)$

$B + C + \cancel{D} \overset{?}{=} \cancel{D} + E + F$ sì !

QUINDI $\rightarrow$ $x = y = z$

$\vec{DE} = R(\vec{AB})$ $\vec{FA} = R(\vec{CD})$ $\vec{BC} = R(\vec{EF})$

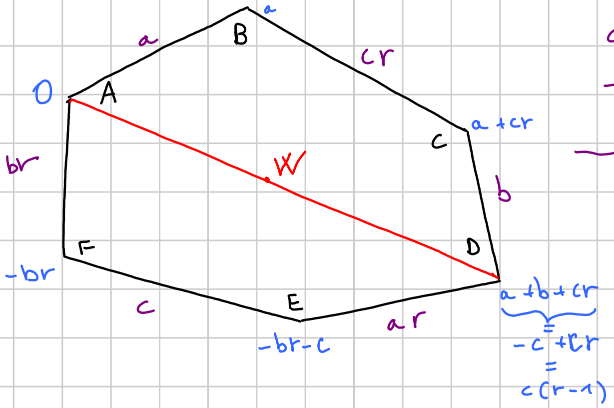
$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} = 0$

$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \underbrace{R(\vec{AB}) + R(\vec{CD}) + R(\vec{EF})}_{R(\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF})} = 0$

$\vec{x} = \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF}$

$\vec{x} + R(\vec{x}) = 0 \longrightarrow$ R rotazione di $180°$ (esagono con lati opposti uguali e paralleli $\rightarrow$ FINE!)

$\longrightarrow \vec{x} = 0$



c'è una rotazione →
→ numeri complessi

$a + b + c = 0$

r rotazione $|r| = 1$

$$w = c(r-1)\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Th: $\quad w \in BE \iff w \in CF$

condizione allineamento B, w, E

$$\frac{\overbrace{c(r-1)\lambda}^{w} - \overbrace{a}^{B}}{\underbrace{-br-c}_{E} - \underbrace{a}_{B}} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{c(r-1)\lambda - a}{-br + b} = \frac{c(r-1)\lambda - a}{-b(r-1)} = -\frac{c\lambda - \frac{a}{r-1}}{b} =$$

$$= \frac{b\lambda + a\left(\lambda + \frac{1}{r-1}\right)}{b} = \underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{a}{b}\left(\lambda + \frac{1}{r-1}\right)}_{\alpha}$$

condizione allineamento C, w, F

$$\frac{\overbrace{c(r-1)\lambda}^{w} - \overbrace{(-br)}^{F}}{\underbrace{a + cr}_{C} - \underbrace{(-br)}_{F}} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{c(r-1)\lambda + br}{a + cr + br} = \underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{b}{a}\left(\lambda - \frac{r}{r-1}\right)}_{\beta}$$

Th: $\quad \alpha \in \mathbb{R} \iff \beta \in \mathbb{R}$

cosa mi basta? per esempio posso dim. che $\forall \lambda$ vale $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$

HOPE: $\left(\lambda + \frac{1}{r-1}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{r}{r-1}\right) \overset{?}{\in} \mathbb{R}$

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{1}{r-1} - \frac{r}{r-1}\right) - \frac{r}{(r-1)^2} \overset{?}{\in} \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\lambda^2 - \lambda}_{\in \mathbb{R}} - \frac{r}{(r-1)^2} \overset{?}{\in} \mathbb{R}$$

$$\frac{(r-1)^2}{r} \overset{?}{\in} \mathbb{R}$$

$$\frac{r^2 - 2r + 1}{r} = \underbrace{r + \frac{1}{r}} \underbrace{-2}_{\text{ok!}} \overset{?}{\in} \mathbb{R}$$

$$|r| = 1 \implies \frac{1}{r} = \bar{r} \implies r + \frac{1}{r} = r + \bar{r} \in \mathbb{R}$$

FINE!

Teoria dei Numeri (WC 2014)

Titolo nota 29/01/2014

N4. Trovare k t.c.

$$p_1 p_2 \cdots p_k = a^b + 1 \qquad b \geq 2$$

* Se b e' pari, RHS e' una somma di quadrati. Ma $3 \mid c^2 + d^2 \iff 3 \mid c,\ 3 \mid d$; siccome nel nostro caso $d = 1$ non ci sono soluzioni
* I fattori primi di a sono $> p_k$ (oppure 2)
* Escludiamo 2: per $k \geq 3$ abbiamo che

$$7 \mid a^b + 1;$$

se a fosse una potenza di 2, e siccome $2 \equiv 3^2 \pmod 7$, abbiamo che

$$7 \mid \square + 1 \qquad \text{ASSURDO}$$

* Sia q un divisore primo di b, $b = qn$

$$p_1 \cdots p_k = a^{qn} + 1$$

Supponiamo che $q \leq p_k$. Allora LHS $\equiv 0\ (q)$, quindi $0 \equiv 1 + (a^n)^q \equiv 1 + a^n \pmod q$

* In particolare, $v_q(1 + a^b) =$

$$= v_q(a^n + 1) + v_q(q) \geq 2$$

e questo contraddice il fatto che LHS è prodotto di primi distinti

* Quindi: $\begin{cases} a \text{ non è una potenza di } 2 \\ \text{i fattori primi dispari di } a \geq p_k \end{cases}$

$$\Rightarrow a \geq p_k$$

$$b \geq p_k$$

$$RHS \geq p_k^{p_k} + 1 \geq p_k^{k} + 1 > LHS \quad \text{(ASSURDO)}$$

LEMMA LTE p primo dispari, $p \mid x-1$

Allora $v_p(x^n - 1) = v_p(x-1) + v_p(n)$

⚠ $p=2$

N5. $(a+b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}$

$$b_n = \frac{(a+b\sqrt{2})^{2n} - (a-b\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}}$$

$p=2$: a mano.

Lavoriamo con b_n modulo p, anzi: con l'espressione a numeratore (stiamo cercando $b_n \equiv 0 \ (p)$)

Supponiamo che esista un m : $m^2 \equiv 2 \pmod p$

$$(a+b\sqrt{2})^{2n} \equiv (a-b\sqrt{2})^{2n} \ (p)$$

Speranza: per $n = \frac{p-1}{2}$ entrambi i membri fanno 1 (o zero, se la base era zero)

1° caso: esattamente uno dei due è zero modulo p, diciamo $a - b\sqrt{2} \equiv 0 \ (p)$

$$\Rightarrow \quad a \equiv b\sqrt{2} \ (p)$$

$$\Rightarrow \quad a^2 \equiv 2b^2 \ (p)$$

2° caso: entrambi zero mod p

$$a + b\sqrt{2} \equiv 0 \ (p)$$
$$a - b\sqrt{2} \equiv 0 \ (p)$$

$$2a \equiv 0 \ (p) \qquad 2b\sqrt{2} \equiv 0 \ (p)$$

$$\Rightarrow \quad a \equiv b \equiv 0 \pmod p$$

(contraddice l'ipotesi)

3° caso: $a \pm b\sqrt{2} \not\equiv 0 \ (p) \Rightarrow$ posso prendere $n = \frac{p-1}{2}$ (entrambi i membri fanno 1)

Senza barare:

$$2 \cdot \sum_{k \equiv 1 (2)} \binom{2n}{k} a^k (\sqrt{2}\, b)^{2n-k} = 2\sqrt{2}\, b_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}a^{2j+1}b^{2n-2j-1}\sqrt{2}^{\,2n-2j-1}=\cancel{\sqrt{2}}\,b_n$$

$$\sum_{j}\binom{2n}{2j+1}a^{2j+1}b^{2n-2j-1}\,2^{n-j-1}=b_n$$

Questa espressione la posso guardare mod p, sostituire $2\equiv m^2$ e finire come sopra

Soluzione: $n=\frac{p-1}{2}$

Supponiamo adesso che $m^2\equiv 2 \pmod p$ non abbia soluzioni.

$$(a+b\sqrt{2})^{2n}\equiv(a-b\sqrt{2})^{2n} \pmod p$$

Euristica: voglio n piccolo

$n \mid (p+1)(p-1)$

$p-1$ non funzionerà

Proviamo $n=\frac{p+1}{2}$.

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{2})^{p+1}&=(a+b\sqrt{2})^{p}(a+b\sqrt{2})\\&=(a^p+b^p\sqrt{2}^{\,p-1}\cdot\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})\\&=(a+b\cdot 2^{\frac{p-1}{2}}\cdot\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})\end{aligned}$$

$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (p) \longrightarrow = (a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})$

Eulero

$= (a^2 - 2b^2)$

Per fare il conto, si usa che $\binom{p+1}{k} \equiv 0 \ (p)$

per $2 \leq k \leq p-1$

N6. $m^6 = n^{n+1} + n - 1$

Prime osservazioni

• $m^6 = a^2 +$ cose piccole

lo so risolvere

• lo stesso per $m^6 = b^3 + c.p.$

Se n è dispari, voglio stringere RHS tra due quadrati: $\text{RHS} > \left(n^{\frac{n+1}{2}}\right)^2$

$\text{RHS} < \left(n^{\frac{n+1}{2}} + 1\right)^2$

n dispari $(n \neq 1) \Rightarrow$ no soluzioni

Stessa conclusione se $n \equiv 2 \mod 3$

stringendo RHS tra due cubi

Se $n \equiv 0 \ (3)$, $\text{RHS} \equiv -1 \ (3)$, il che è assurdo perché dà $m^6 \equiv -1 \ (3)$

Se esistono soluzioni con $n \neq 1$, $n \equiv 4 \ (6)$

$$m^6 \equiv n^{n+1} + n - 1 \mod (n+1)$$

$$\equiv (-1)^{n+1} - 1 - 1 \equiv -3 \mod (n+1)$$

$n+1 \equiv 5 \pmod 6 \Rightarrow n+1$ ha un fattore primo $\equiv 2 \mod 3$ e $\neq 2$. Chiamando p.

Sappiamo $1 = \left(\frac{-3}{p}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rec. Quadr}}}{=} \left(\frac{p}{-3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$

Reciprocità quadratica

p, q primi dispari $\Rightarrow$

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} -1 & p \equiv 3, 5 \pmod 8 \\ 1 & p \equiv 1, 7 \pmod 8 \end{cases}$$

Calcolare $\left(\frac{-3}{p}\right)$ senza rec. quadratica

$$\zeta_3 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \qquad \zeta_3^2 + \zeta_3 + 1 = 0$$

-3 è un quadrato $\Leftrightarrow$ ho $\zeta_3 \mod p$

In particolare $\zeta_3^3 \equiv 1 \pmod p$

$\zeta_3 \not\equiv 1 \pmod p$

$\Longleftrightarrow$ ho un elemento di ordine 3

$\Longleftrightarrow$ $3 \mid p-1$

Soluzione 2 $n \equiv 4 \pmod 6$

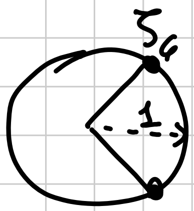
Speranza: RHS si fattorizza, e un fattore è $\Phi_6(x)$

La speranza funziona perché

$$\mathrm{RHS}(\zeta_6) = 0$$

$$\zeta_6^{n+1} + \zeta_6 - 1 = \zeta_6^5 + \zeta_6 - 1$$

$$= \overline{\zeta_6} + \zeta_6 - 1 = 0$$



$$m^6 = (n^2-n+1)\left(\overbrace{\frac{n^{n+1}+n-1}{n^2-n+1}}^{p(x)}\right)$$

Calcolo l'MCD $(\ldots)$ e viene 1.

Conclusione: $n^2 - n + 1 = \square$ $\boxed{\text{no}}$

$$p(x) = \frac{x^{n+1}+x-1}{x^2-x+1} = (x^{n-1}+x^{n-2}-x^{n-4}-x^{n-5}) + (x^{n-7}+x^{n-8}-x^{n-10}-x^{n-11}) + \cdots + (x^3+x^2-1)$$

e l'MCD si calcola...

N7. $p_n(x) = (x^2+x+1)^n - (x+1)^n - (x^2+x)^n$

$- (x^2+1)^n + x^{2n} + x^n + 1$

$p_n(x)$ sia il polinomio nullo mod 7

Termine noto: $p_n(0) = 0$

$x \quad = 0$

$x^2 \quad = 0$

$n > 3 \qquad x^3: \quad \binom{n}{1,\ 1,\ n-2} + \cancel{\binom{n}{0,\ 3,\ n-3}} - \cancel{\binom{n}{3}}$

$n(n-1) \equiv 0 \pmod 7$

Sviluppo multinomiale $\quad (a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} a^i b^j c^k$

$\binom{n}{i,j,k} = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}$

Osservazione: $\quad q(x^p) \equiv q(x)^p \mod p$

Quindi, se n e' multiplo di 7 ho

$p_n(x) = p_{n/7}(x^7) \mod 7$

Questo dice che n funziona $\Leftrightarrow$ $7n$ funziona

In particolare, wlog $7 \nmid n$

Dal calcolo del coeff. x^3, $n \equiv 1 \ (7)$

$$n = 1 + 7^a b \quad \text{con } 7 \nmid b$$

Calcoliamo il coeff. di x^{7^a+2}: è b $\left(\begin{matrix}\text{se}\\ b \geq 2\end{matrix}\right)$

T $\quad P_n(x) = (x^2+x+1)^n - (x+1)^n - (x^2+x)^n$

$$- (x^2+1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

$n = 1 + 7^a b$

L $\quad P_n(x) = (x^2+x+1)\left(x^{2\cdot 7^a} + x^{7^a} + 1\right)^b + \dots$

quindi $n = 1 + 7^k$

Due casi: $n = 7^a$

$$n = 7^a(1+7^k)$$

WINTER CAMP 2014 – ALGEBRA MISTA

Titolo nota 30/01/2014

$\boxed{M3}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x+y) + y \le f(f(f(x))) \quad \forall x, y$

Passato IMO 2013-5 $\quad f(x+y) \ge f(x) + f(y)$ ⇝ cresci TANTO

$f(xy) \le f(x)\, f(y)$ ⇝ cresci POCO

⇝ $f(x) = x$

Disuguaglianza funzionale = contrasto tra 2 esigenze opposte (maniera per trasformare disug in =)

Due disug. contrastanti ⇒ uguaglianza

Tornando al problema:

$\boxed{y=0}$ ⇝ $f(x) \le f(f(f(x))) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{f(x) \le f^{(3)}(x)}$

$\boxed{y = f(f(x)) - x}$ ⇝ $\cancel{f^{(3)}(x)} + f(f(x)) - x \le \cancel{f^{(3)}}(x)$

$\boxed{f(f(x)) \le x}$ ⇝ $\boxed{f^{(3)}(x) \le f(x)}$

Ora posso riscrivere il testo come

$$f(x+y) + y \le f(f(f(x))) = f(x)$$

$\boxed{x=0}$ $\quad f(y) + y \le f(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x) \le f(0) - x}$

$\boxed{y=-x}$ $\quad f(0) - x \le f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x) \ge f(0) - x}$

⇝ $f(x) = c - x$ $\quad$ VERIFICA

— o — o —

TST PREIMO 2008 $\quad f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

$$f(x+y) \ge f(x) + y\, f(f(x))$$ Dim. che non esistono

idea 1 $\quad x=1 \quad f(1+y) \geq f(1) + y f(f(1)) \quad f(x) \geq a_1 x + b$

$y=x \quad f(2x) \geq \underset{\geq 0}{f(x)} + x\, \underset{ax^2+bx}{f(f(x))} \quad f(x) \geq a_2 x^2 + \text{roba}$

$\vdots$

$f(x) \geq a_3 x^3 + \dots$

Supponiamo di potere porre $y = f(x) - x$ ← per x grandi POSSO

$$f(f(x)) \geq f(x) + (f(x)-x) f(f(x))$$

$$f(f(x))\,[1 + x - f(x)] \geq f(x)$$

Essendo $f(x)$ almeno quadratica è neg. per x grandi. FINE.

— o — o —

$\boxed{M2}$ $\quad p(x) = (x^2-8x+25)(x^2-16x+100) \cdots (x^2-8nx+25n^2) + 1$

IRRIDUCIBILE in $\mathbb{Z}[x]$.

Come dim. che un polinomio è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$?

1. Eisenstein (normale e generalizzato → IMO 1993-1): si basa sulla scomposizione con poche possibilità del termine noto.
2. Ridursi ad 1 con cambi di variabile: $p(x)$ non verifica le ipotesi, ma magari le verifica $p(x+1)$, $p(x-1)$, $p(x+x^2)$ (vedi pol. ciclotomici con esp. primo)
3. IMO 2002-3: pensare alle radici del polinomio
4. Eisenstein ∞: termine noto primo e > somma del valore assoluto degli altri.

Supponiamo che sia $\quad p(x) = q(x) \cdot r(x)$

Pongo $\quad x = (4 \pm 3i)k \quad$ ← radici dei termini del prodotto

$$1 = \underbrace{q((4\pm3i)k)}\cdot\underbrace{r((4\pm3i)k)}$$

INTERI DI GAUSS, cioè del tipo $a \pm ib \quad (a,b) \in \mathbb{Z}^2$

Ci sono 4 possibilità: $1 \cdot 1$
$-1 \cdot (-1)$
$i \cdot (-i)$
$-i \cdot i$

Escluse quelle con la i, resta che $q(x)$ e $r(x)$ coincidono in $2n$ valori $\rightsquigarrow$ $q(x) = r(x)$ sempre (sto supponendo per assurdo che abbiamo $\deg < 2n$).

Ma allora $p(x)$ sarebbe un $\square$, ma il termine noto è un $\square + 1$, quindi non è possibile.

Per escludere che p e/o r possano essere $\pm i$ basta osservare

FATTO GENERALE: Se $q \in \mathbb{Z}[x]$ e $b \equiv 0 \pmod 3$, allora

$q(a+bi)$ ha parte imm. $\equiv 0 \pmod 3$.

— o —

Aiutino: $p(x) = (x^2-1)(x^2-4) \cdot \ldots \cdot (x^2-n^2)$

— o — o —

Dario's: $q(x)$ vale un po' $1, -1, i, -i$

Sia a e b 2 delle "radici" $k(4 \pm 3i)$

$$\underbrace{(a-b)}_{\uparrow} \mid \underbrace{(q(a)-q(b))}_{\text{può essere } 2, -2, \pm 1 \pm i}$$

modulo + grande
perchè a e b sono distanti

Bisogna accertarsi che valga a livello di interi di GAUSS.

— o — o —

$\boxed{M1}$ $a_1, \dots, a_{n-1}$ data (numeri reali)

$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$ $\qquad$ $v_0 = 1, v_1 = 1, v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$

Tesi : $u_n = v_n$

Idea : INDUZIONE CON TESI PIÙ FORTE, cioè $u_n = v_n$ = FORMULONE

= somma di tutti i possibili prodotti di a_i distinti in cui non ce ne sono 2 con indici consecutivi.

$\mathbb{D}_n = \{ A \subseteq \{1, \dots, n-1\} :$ A non contiene due termini consecutivi $\}$

$$u_n = v_n = \sum_{D \in \mathbb{D}_n} \prod_{i \in D} a_i$$ Se $D = \emptyset$, allora $\prod = 1$

$u_{n+1} = u_n + a_n u_{n-1}$

u_n: produce tutti i termini che non contengono a_n

$a_n u_{n-1}$: termini con a_n + termini sotto a_{n-2}

Occhio a far vedere le 2 inclusioni. Idem per v_n, ma va esplicitata

— o — o —

$\boxed{2^a \text{ IDEA}}$ $S(\alpha, \beta, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, n)$ parto con $u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta$
$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$
fino a trovare u_n

Tesi riscritta: $S(1, 1, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, n) = S(1, 1, \{a_{n-1}, \dots, a_1\}, n)$

Proprietà di S :

① $S(\alpha, \beta, \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, n) = \alpha S(1, 0, \{\dots\}, n) + \beta\ S(0, 1, \{\dots\}, n\}$
LINEARITÀ

② $S(\alpha, \beta, \{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}, n+1) = S(\beta, \beta + a_1\alpha, \{a_2, \dots, a_n\}, n)$
fare n+1 pass. a partire da u_0, u_1 $\qquad$ fare n passaggi a partire da u_1, u_2

③ $S(\alpha,\beta), \{a_1,\dots,a_n\}, n+1) = u_n + a_n u_{n-1}$

$= S(\alpha,\beta,\{a_1,\dots,a_{n-1}\},n)$

$+ a_n S(\alpha,\beta,\{a_1,\dots,a_{n-2}\},n-1)$

Ora dimostro la tesi per induzione

$$S(1,1,\{a_1,\dots,a_n\},n+1) \overset{③}{=} \boxed{S(1,1,\{a_1,\dots,a_{n-1}\},n)}$$
$$+ a_n \boxed{S(1,1,\{a_1,\dots,a_{n-2}\},n-1)}$$

uguali per Hp induttiva

$$S(1,1,\{a_n,\dots,a_1\},n+1) \overset{②}{=} S(1,1+a_n,\{a_{n-1},\dots,a_1\},n)$$
$$= \boxed{S(1,1,\{a_{n-1},\dots,a_1\},n)}$$
$$+ a_n \boxed{S(0,1,\{a_{n-1},\dots,a_1\},n)}$$

uguali per Hp induttiva

②

$$a_n \boxed{S(1,1,\{a_{n-2},\dots,a_1\},n-1)}$$

$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{v_1}} + a_{n-1} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v_0}}$

Cosa ricordare: ① la proprietà di linearità rispetto ai dati iniziali

② l'idea di studiare più in generale tutte le successioni.

(IMO 2005-1 $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ $n=-1$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1=0$)