Combinatoria - WC 2015

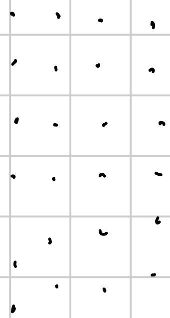
Titolo nota — 30/01/2015

C4: $\mathbb{Z}^2$

$A \subseteq \mathbb{Z}^2 \supseteq B$

$|A| = n$

$|B| = m$



$C \sim A$ se $C = A + v \quad v \in \mathbb{Z}^2$

ha la stessa forma

$(h,k) \longmapsto f(h,k) \in \mathbb{R}$

C ha somma positiva se $\sum_{(h,k)\in C} f(h,k) > 0$

Se so che $\forall\, C \sim A$ C ha somma positiva $\Rightarrow$
$\exists\, \infty\ D \sim B$ con somma positiva.

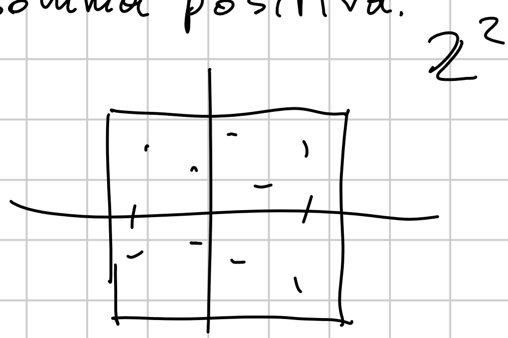
Desiderio proibito: $E = \sum_{i=1}^{k} A + v_i = \sum_{j=1}^{h} w_j + B$

$A = \{w_1 \dots w_n\} \qquad B = \{v_1 \dots v_m\}$

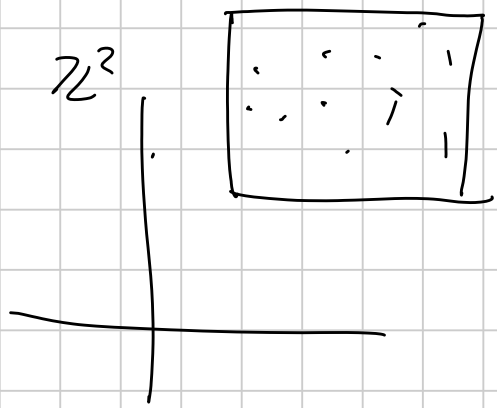
$$\sum_{i=1}^{n} A + v_i = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{m\\ n}} w_j + v_i = \sum_{j=1}^{m} w_j + B = E$$

La somma degli $A + v_i$ è positiva $\forall\, v_i \Rightarrow$ La somma di E è positiva $\Rightarrow$ almeno un w_j fa sì che $w_j + B$ abbia somma positiva.

A:

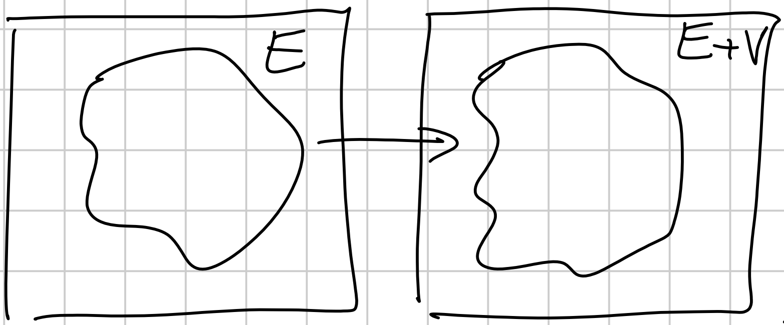


B:



Ma se $A \subset [a_1, a_2] \times [A_1, A_2]$
$B \subset [b_1, b_2] \times [B_1, B_2]$

$\Rightarrow w_j + B \subset [b_1 + a_1, b_2 + a_2] \times [B_1 + A_1, B_2 + A_2] \supset E$



V appropriato anche E+V è somma di traslati di A e di B $\Rightarrow$ trovo un altro traslato di B con somma positiva, e così via.

$A \longmapsto$ polinomio con monomi $x^{a_1^j} y^{a_2^j}$ se $(a_1^j, a_2^j) \in A$
$p(x)$ $\quad j = 1 \dots n$

$B \longmapsto q(x)$

$E \longmapsto p(x)\, q(x)$

Per assurdo con un ragionamento analogo, basterà dim. che un traslato a somma positiva di B si può trovare fuori da un insieme finito fissato.

Es 5

n carte, scelte A e B
so dire quale è preferibile.

Il mazzo viene diviso tra Alberto e Barbara
mostrano la carta al proprio
chi ha quella pref. vince l'altra, e le ripone in fondo
al proprio nell'ordine che vuole

Domanda: il può finire?

Soluzione:

Oss: il "gioco" è un solitario

Idea: provo l'esistenza in modo non costruttivo:

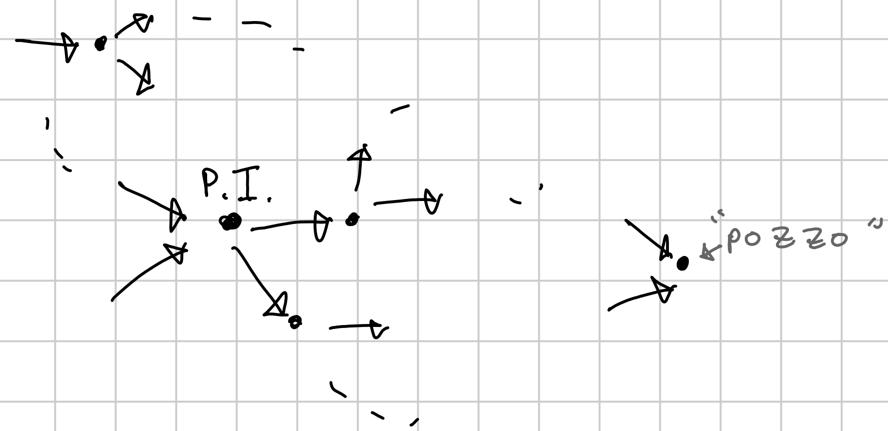
per assurdo: che succede se non c'è modo di finire?

Idea: considerare il grafo delle configurazioni:
i nodi sono tutte le configurazioni dei 2 mazzetti
e i lati sono orientati in modo da collegare
A a B se con una mossa posso andare da A a B
(A, B config.)

Fatto: è facile capire il grado entrante e uscente di
ogni vertice.

grado uscente: se entrambi i mazzetti hanno almeno una
carta, 2 config. raggiungibili possibili;
altrimenti sono su un nodo senza via di scampo.

grado entrante: per tornare indietro, prendo le ultime 2
carte di uno dei giocatori e le rimetto
in cima in un solo modo → ho 2 scelte
altrimenti le carte sono (quasi) tutte su
un solo mazzetto → ho 1 scelta



Oss: riesco a finire se c'è un cammino da P.I. a un pozzo

per Assurdo, la componente connessa $C(PI)$ che parte da P.I. non ha pozzi

Quindi, se questa componente ha n vertici, la somma dei gradi uscenti $d_+(PI) = 2n$

E il grado entrante $n \leq d_-(PI) \leq 2n$

Di sicuro, non riesco ad uscire, quindi, contando le frecce che hanno almeno un estremo in $C(PI)$ ottengo che

$$d_+(PI) \leq d_-(PI)$$
$$2n \leq d_-(PI) \leq 2n$$

$\Rightarrow$ ogni vertice in $C(PI)$ ha grado entrante $= 2$

$\Rightarrow$ $C(PI)$ è sconnessa (non si esce, non si entra) cioè è chiusa anche per cammini a ritroso

Oss: ho un modo per spostarmi all'indietro verso un nodo con grado entrante $= 1$
Basta muovere spostando le 2 carte sempre dallo stesso mazzo. Ad ogni passo, quel mazzo perde una carta: in un numero finito di mosse, mi ritrovo ad avere una sola carta. Allora avrei grado entrante $= 1$, assurdo!

C6: Operazione su insiemi finiti di numeri positivi

$$A = \{a_1 \dots a_n\} \xrightarrow{*} A^* (a_1+a_2, a_1+a_3, \dots a_1+a_n, a_2+a_3, \dots, a_{n-1}+a_n)$$

$n>1$ $\qquad$ N-pla $\qquad N = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

"quasiuguali"

2 N-ple $\sim$ se sono uguali a meno dell'ordine

Problema: se $A^*=B^*$ ma $A\neq B$ (a meno dell'ordine) allora $|A|=|B|=2^k$ per qualche $k\geq 1$

Esistono controesempi per $|A|=|B|=2^k$, $A\neq B$ ma $A^*=B^*$?

$|A|=|B|$ se $A^*\sim B^*$ ovvio perché $N=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

$$A \longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i} \qquad f(1)=n$$

$$B \longmapsto g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i} \qquad g(1)=n$$

$$A^* \longleftrightarrow f(x)^2 - f(x^2) = \sum_{a_i^*\in A^*} x^{a_i^*}$$

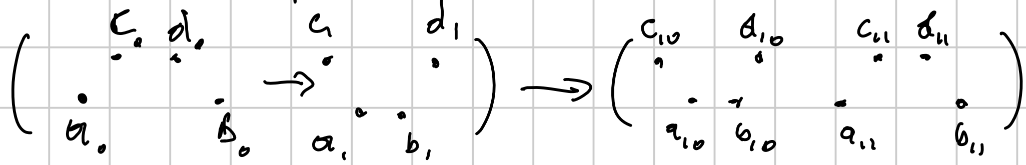
$$A^*=B^* \qquad f(x)^2 - f(x^2) = g(x)^2 - g(x^2)$$

$$\underbrace{(f(x)-g(x))}_{=(x-1)^k h(x)}(f(x)+g(x)) = \underbrace{f(x^2)-g(x^2)}_{=(x^2-1)^k h(x^2)}$$

$$f(x)+g(x) = (x+1)^k \frac{h(x^2)}{h(x)} \qquad \text{calcolo in } 1:$$

$$n+n = 2^k\cdot 1 \implies n=2^{k-1}$$

Contro esempio: $\quad a+b=c+d \quad a\neq c \quad a<c$ WLOG



P. Erdős

Forse possibile alternativa

ispirazione $A=(1, 4, 6, 7)$ $B=(2,3,5,8)$ $\rightsquigarrow$ $1^2+4^2+6^2+7^2=$
$2^2+3^2+5^2+8^2$

più facile: $1+4+6+7=$
$2+3+5+8$

Fatto: se so che $A^* = B^*$
allora la somma degli elementi di A^* =
" " B^*
allora " dei quadrati " A^* =
" " " B^*

$$\sum_{i\neq j}(a_i+a_j)^2 = (n-1)\sum_i a_i^2 + 2\sum_{i\neq j} a_i a_j = \left(\sum_i a_i\right)^2 + (n-2)\sum a_i^2$$

Abbozzo: $S_n = \sum_{i\neq j}(a_i+a_j)^n$

$\Rightarrow$ per il Th fond. sulle funzioni sym.
$\exists$ p_n polinomio t.c. $S_n = p_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

dove i σ_i sono i coefficienti di
$\sigma_i := [t^{n-i}](t+a_1)(t+a_2)\cdot \quad \cdot(t+a_n)$

Oss. $\deg S_n = n$, $\deg \sigma_n = n \Rightarrow$

$$p_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = p_n'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) + \lambda_n \sigma_n$$

Hope: λ_n sia un polinomio in n che si annulla solo se n è potenza di 2.

se Hope è vera
$\sigma_i(a_1, \dots, a_n) = \sigma_i(b_1, \dots, b_n) \quad \forall i$

allora $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ sono radici dello stesso polinomio $t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$