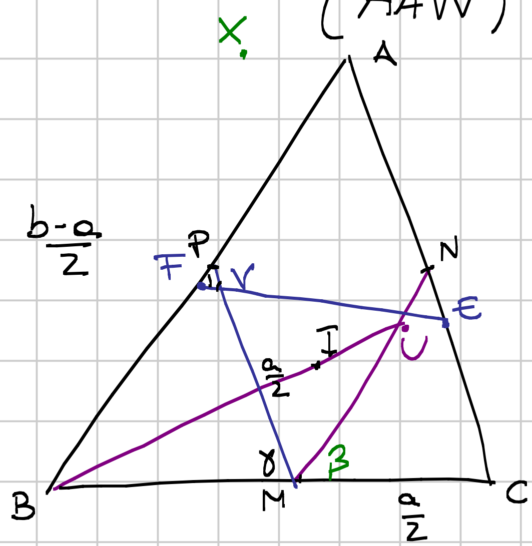
WC 2015 - GEOMETRIA CONTOSA

(AAVV)



Tesi: V, I, C allineati

PVF isoscele

$PV = PF = AF - AP = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}$

$VM = PM - PV = \frac{a}{2}$

VMC isoscele $\Rightarrow V\hat{C}M = \frac{\gamma}{2}$

$BVUC$ è ciclico di centro M

(5) X = pto medio dell'arco BC

Tesi: XI biseca UV

Complessi: M è l'origine, $B = -1$ $C = 1$

$$S = \frac{u+v}{2}$$

Calcoliamo I

Recall: $a, b, c \in \mathbb{C}$ sono allineati $\iff \frac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R} \iff \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}}$

a, b, c perp $\iff \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}}$

Ex: a, b, c, d ciclico $\iff \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}$

$a, b \in$ circonf unitaria. $e \in \overline{ab} \iff \frac{e-b}{\bar{e}-\bar{b}} = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = ab$

$\iff \bar{e} = \frac{a+b-e}{ab}$

$a, b, c, d \in$ circ. unit. Intersezione di $\overline{ab}$ e $\overline{cd}$ è

$$e = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

perchè $\begin{cases} e \in \overline{ab} \\ e \in \overline{cd} \end{cases} \iff \frac{a+b-e}{ab} = \frac{c+d-e}{cd}$ e risolvo.

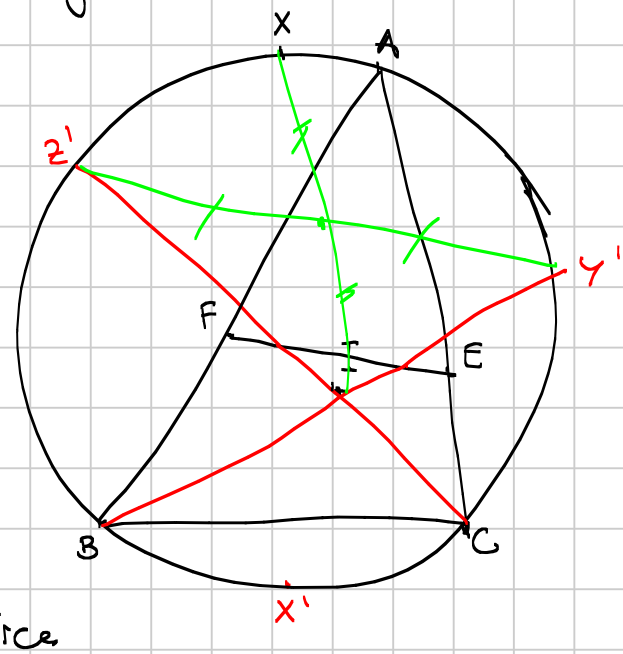
$$i = \frac{2uv + u - v}{u+v}$$

Per trovare X, osserviamo che XBC e MUV sono simili

$$\frac{u}{v} = \frac{1-x}{-1-x} \implies \text{risolvo per trovare } x = \frac{u+v}{u-v}.$$

Vogliamo s x i allineati $\frac{s-x}{i-x} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{u}{v}\right)\left(1+\frac{v}{u}\right)$

e questo numero è uguale al coniugato.



Oss: • I è ortocentro di X'Y'Z'

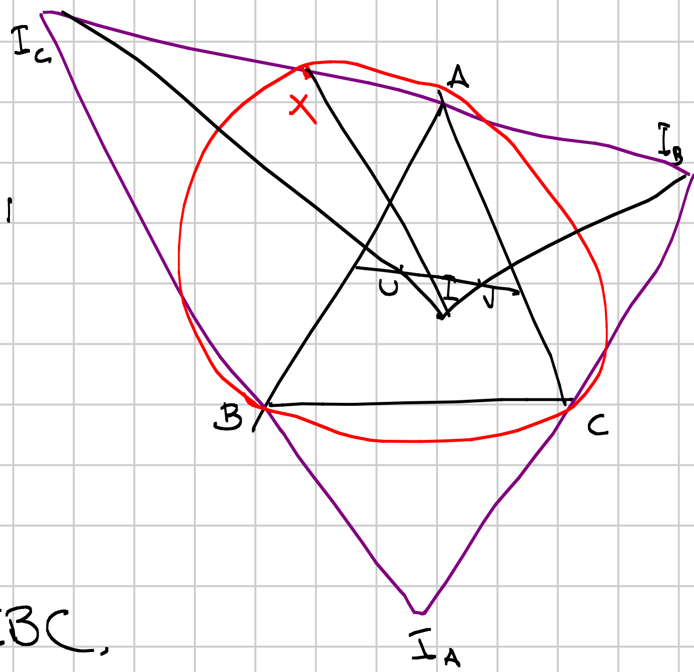
• EF // Y'Z' (angoli)

Vogliamo dire che IY'XZ' è un parallelogr.

Oss generale: in un triangolo, il simm dell'ortocentro rispetto al pto medio del lato è l'opposto del vertice

X = pto opposto di X' in $\Gamma_{X'Y'Z'} \implies$

XI biseca Z'Y'



Oss: $X \in I_B I_C \cap \Gamma_{ABC}$

I è ortocentro di $I_A I_B I_C$

$\Rightarrow \Gamma_{ABC}$ è la circonf dei 9 pti di $I_A I_B I_C$

$\Rightarrow$ X è pto medio di $I_B I_C$.

UV // $I_A I_B$. XI biseca UV.

Hint: XI è simmediana per IBC.

$B\,[0:1:0]$

$I\,[a:b:c]$

$\alpha = p-a$

$\beta = p-b$

$\gamma = p-c$

$E\,[\gamma:0:a]$

$F\,[\beta:\alpha:0]$

$M\,[0:1:1]$

$N\,[1:0:1]$

$BI \quad cx - az = 0$

$EF \quad -\alpha x + \beta y + cz = 0$

$MN \quad x + y - z = 0$

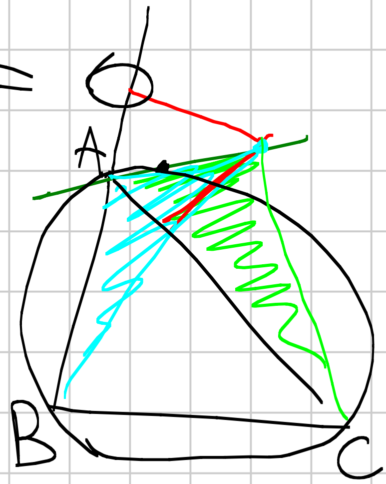
$$\begin{vmatrix} c & 0 & -a \\ -\alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-c\beta + a\alpha + a\beta - c\gamma = \beta(a-c) + a\alpha - c\gamma$$

$$\beta + \gamma = p - b + p - c = \frac{a-b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = a$$

$$\beta(\gamma-\alpha) + \alpha(\beta+\gamma) - \gamma(\alpha+\beta)$$

$$\cancel{\beta\gamma} - \cancel{\alpha\beta} + \cancel{\alpha\beta} \cancel{+\alpha\gamma} \cancel{-\gamma\alpha} \cancel{+\beta\gamma} = 0$$



$\Gamma \quad a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$

$AX \qquad P \in AX \qquad \dfrac{[AP'C]}{[APB]} = \dfrac{b}{c}$

$c[APC] = -b[APB]$

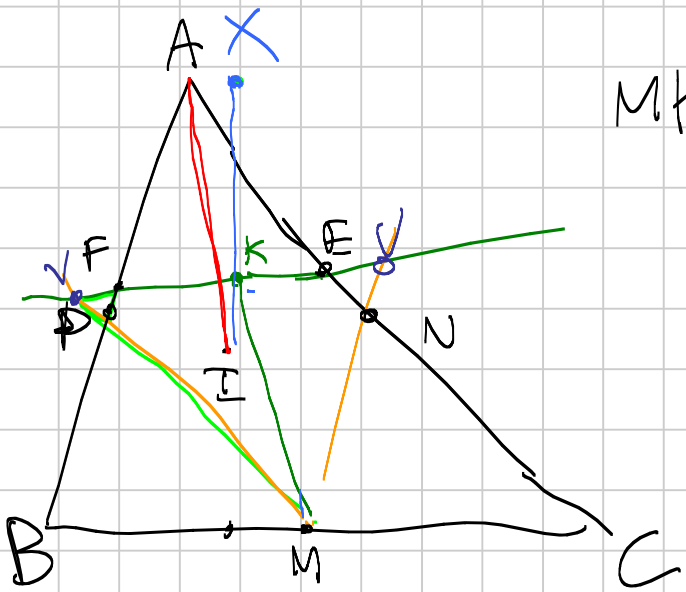
$AX \quad cy + bz$

$X\ [a^2 : b(c-b) : c(b-c)]$

$XI \cap EF =: K \qquad XI \quad bc(\gamma-\beta)x + ac\beta y - ab\gamma z = 0$

$EF \quad -\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

$K\ [ac\beta\gamma + ab\beta\gamma : ab\alpha\gamma - bc\gamma(\gamma-\beta) : bc\beta(\gamma-\beta) + ac\alpha\beta]$



$MK \parallel AI \iff$ Tesi

$\ell \qquad M \in \ell \qquad \ell \parallel AI$

$A\ [1:0:0] \qquad cy - bz = 0$

$I\ [a:b:c]$

$M\ [0:1:1] \qquad ux + vy + wz = 0$

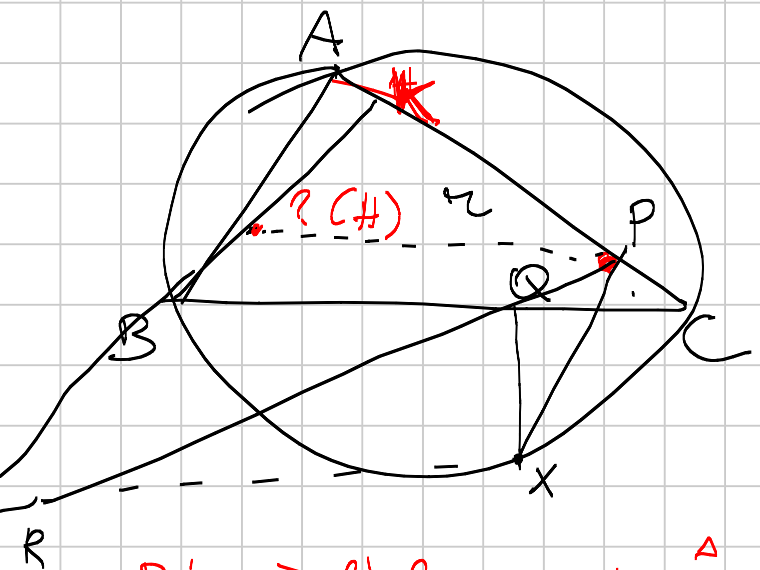
$v = -w \qquad u = 1$

$x + ky - kz = 0$ retta passante per M

$$\begin{vmatrix} 1 & K & -K \\ 0 & c & -b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad K = \frac{b+c}{b-c}$$

$$\ell \quad x + \frac{b+c}{b-c}\, y - \frac{b+c}{b-c}\, z = 0$$

$a = \beta + \gamma$
$b = \alpha + \gamma$
$c = \beta + \alpha$



$X \in \overset{\frown}{BC}$

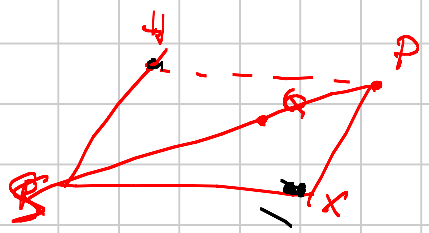
r parallela a XR passante per P passa per uno stesso punto

1 Euristica $\xRightarrow{\text{CLAIM}}$

$\Rightarrow$ Tale retta deve passare per l'ortocentro

BK è l'altezza di $\overset{\triangle}{ABC}$ relativa a B
e quindi è // a XP

Al contrario SE Dimostro che il punto S t.c.
HSXP è un parallelogramma è allineato
con P e Q ho concluso



a, b, c

$x \in \Gamma_{circ}$

$a\bar{a} = 1$
$x\bar{x} = 1$

$P = ?$

$XP \perp AC$
$P \in AC$

$$\frac{p - x}{c - a} = -\frac{\bar{p} - \bar{x}}{\bar{c} - \bar{a}}$$

$$\frac{p - a}{c - a} = \frac{\bar{p} - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{a}}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(x + a + c - \frac{ac}{x}\right)$$

In generale a su bc $\frac{1}{2}\left(a + \frac{(b-c)\bar{a} + \bar{b}c - b\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}\right)$

$$q = \frac{1}{2}\left(x + b + c - \frac{bc}{x}\right)$$

$$s = h + x - p = a + b + c + x - \frac{1}{2}\left(x + a + c - \frac{ac}{x}\right) =$$

$$= b + \frac{1}{2}\left(a + c + x + \frac{ac}{x}\right)$$

p, q, s sono allineati

$$\frac{p-q}{q-s} = \frac{\bar{p}-\bar{q}}{\bar{q}-\bar{s}} = \overline{\left(\frac{p-q}{q-s}\right)}$$

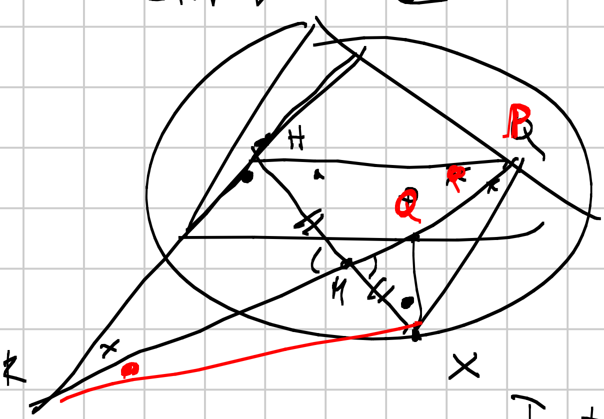
$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(a - \frac{ac}{x} - b + \frac{bc}{x}\right)}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(-b - a - \frac{ac}{x} - \frac{bc}{x}\right)} = \frac{\frac{ax - ac - bx + bc}{\cancel{x}}}{\frac{-bx - ax - ac - bc}{\cancel{x}}} =$$

$$= \frac{ax - ac - bx + bc}{-bx - ax - ac - bc} = \frac{(a-b)(x-c)}{(-x-c)(a+b)}$$

Perché?

$$\text{LUI} = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right)}{\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{(b-a)(c-x)}{(-x-c)(a+b)}$$

Simultico



La linea di Simson di X biseca XH

$XQ \parallel RH$

Int. ab, cd

$$\frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(c-d) + (a-b)(\bar{c}d - c\bar{d})}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d) + (a-b)(\bar{c}-\bar{d})}$$

9. Retta all'infinito $x+y+z=0$

Cfr circoscritta è l'isogonale di $x+y+z=0$

$P[u,v,w] \xrightarrow{iso} P'\left[\frac{a^2}{u}; \frac{b^2}{v}; \frac{c^2}{w}\right]$ $[\infty:]$

Cfr circoscritta è $a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$

Una retta in generale è $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ $[r:]$

Chi è l'intersezione di r e ∞?

È $[\beta-\gamma : \gamma-\alpha : \alpha-\beta]$

La retta // a $r: \alpha x+\beta y+\gamma z=0$

passante per $[u,v,w]$ chi è?

È la retta passante per il p.to all'infinito di r e $[u,v,w]$

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

In baricentriche? [Le circonferenze?]

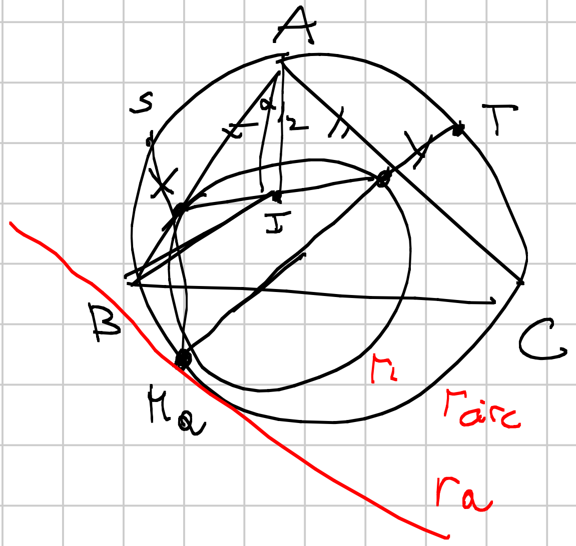
Ogni cfr è della forma

$\Gamma: \; a^2yz+b^2xz+c^2xy+(x+y+z)\underline{(lx+my+nz)}=0$

Chi sono l, m, n?

Sostituisco $A[1:0:0] \longrightarrow$ ottengo l che è dunque $pow_\Gamma A$

Dunque $lx+my+nz$ è l'asse radicale di μ e Γ_{circ} e l, m, n sono le potenze di A, B, C rispetto a Γ



$r_a = ?$

Asse radicale di Γ_1 e Γ_{circ} quindi è della forma

$$lx + my + nz = 0$$

$$l = Pow_\Gamma A = AX^2$$

$$m = Pow_\Gamma B = BX^2$$

$$n = Pow_\Gamma C = CY^2$$

Chi è il punto medio di XY? I incentro

$$AX = \frac{AI}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Chi è AI? Col th dei seni in $\triangle ABI$

$$\frac{AI}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}} = \frac{AB}{\cos\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow AI = \frac{c \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{4c \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\gamma} =$$

$$= 4R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$AX = \frac{AI}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{8R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} =$$

$$=$$

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{2} = \frac{1 - \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{2} = \frac{\frac{(a-c)^2-b^2}{2ac}}{2} = \frac{(a+b-c)(a-c-b)}{4ac}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = r$$

$$AX = \frac{2r}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\frac{a}{2R}} = \frac{4rR}{a} = \frac{4\,\frac{2S}{p}\,\frac{abc}{4S}}{a} =$$

$$= \frac{2bc}{a+b+c}$$

$$BX = c - AX = c\left(1 - \frac{2b}{a+b+c}\right) = c\,\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

$$CY = b - \underset{\overset{\shortparallel}{AX}}{AY} = b\left(1 - \frac{2c}{a+b+c}\right) = b\,\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)^2 = R^2$$

$$\underline{(l, m, n)} = \left(\frac{4b^2c^2}{R^2}, \frac{c^2(a-b+c)^2}{R^2}, \frac{b^2(a-b+c)^2}{R^2}\right)$$

$$\underline{(m-n,\ n-l,\ l-m)} = \Big(\underbrace{[(b-c)^2 + a(b+c)](c-b)}_{X_A} : \underbrace{b^2(a+b-3c)}_{X_B} : \underbrace{c^2(3b-a-c)}_{X_C}\Big)$$

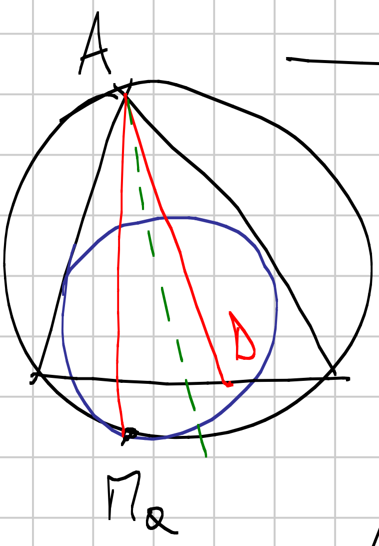
$$\begin{vmatrix} X_A & X_B & X_C \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{ X_C y - X_B z = 0$$

$$r_a \quad \begin{cases} X_C y - X_B z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \underline{\underline{[0 : X_B : X_C]}}$$

$$[0 : b^2(a+b-3c) : c^2(3b-a-c)]$$

$$[a^2(a+b-3c) : 0 : c^3(3a-b-c)]$$

$$[a^2(\cancel{c}-3b+a+c) : b^2(3a-b-c) : 0]$$



AD, AM_a simm risp. alle bisett

D = pt di tg delle ex-inscritte

$$D = [0 : p-2b : p-2c]$$

$$AD : \{ y(p-2c) = z(p-2b) \}$$

retta per A $\quad \beta y + \gamma z = 0$

β, γ

$1,0 \longrightarrow 0,1$

$0,1 \longrightarrow 1,0$

$c,-b \longrightarrow c,-b$

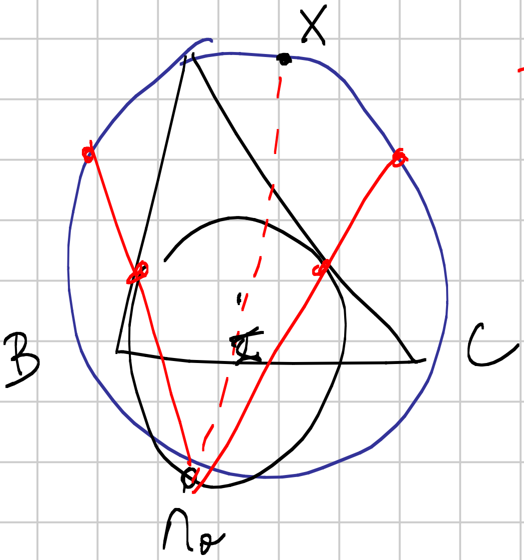
$\beta, \gamma \to (c^2\gamma : b^2\beta)$

$A\Pi_a : \{ c^2(p-2b)y = b^2(p-2c)z \}$

$$\begin{cases} A\Pi_a \\ \text{circo} \end{cases} \Rightarrow \Pi_a = \left[\frac{a}{2}, \frac{-b^2}{p-2b}, \frac{-c^2}{p-2c}\right]$$

$$r_a : \left\{ \underbrace{\left(\frac{a}{2}, \frac{-b^2}{p-2b}, \frac{-c^2}{p-2c}\right) \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{polare di } P \text{ risp. a } \Gamma} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \text{eq. di } \Gamma$$



$\Pi_a = IX \cap \Gamma$