WC 2015 – MISCELLANEA

Titolo nota 28/01/2015

M1

$$f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+ \qquad f(1) = 1$$

$$f(2n) = f(n) \qquad f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$$

1	1
2	1
3	2
4	1
5	3 = 1+2
6	2
7	3 = 2+1
8	1
9	4 = 1+3
10	3
11	5 = 3+2
12	2
13	5 = 2+3
14	3
15	4 = 3+1
16	1
17	5 = 1+4
18	4
19	7 = 4+3
20	3
21	8
22	5
23	7 = 5+2
24	2
25	7 = 2+5
26	5
27	8
28	3

... 31 → 5 = 4+1

Tesi: $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$\left| \{ m \in \mathbb{N}_+ : f(2m-1) = n \} \right| = \phi(n)$$

Ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si può scrivere come $a+b$ con $(a,b) = 1$ in esattamente $\phi(n)$ modi e tutti questi modi compaiono una e una sola volta nella tabella

Idea: considerare le COPPIE. Considero

$$g(n) = (f(n), f(n+1))$$

CLAIM:

1. l'immagine di g sono tutte le coppie di coprimi possibili
2. g è iniettiva, cioè ogni coppia viene presa una sola volta

Intermezzo: da dove arriva il 7?

Mancano il $3+4$, $1+6$, $6+1$

$(3,4) \rightsquigarrow f(28)$

$(1,6) \rightsquigarrow$

Da capire: come si comporta g

$$g(2n) = (f(2n), f(2n+1)) = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{copio la 1ª} \\ \text{comp. di } g(n)}}{f(n)}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sommo le comp.} \\ \text{di } g(n)}}{f(n) + f(n+1)})$$

$$g(2n+1) = (f(2n+1), f(2n+2)) = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sommo}}}{f(n) + f(n+1)}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{copio la 2ª di } g(n)}}{f(n+1)})$$

Di chi è figlio (1,6)?

$$\underset{g(32)}{\overset{\shortparallel}{(1,6)}} \leftarrow \underset{g(16)}{\overset{\shortparallel}{(1,5)}} \leftarrow \underset{g(8)}{\overset{\shortparallel}{(1,4)}} \leftarrow \underset{g(4)}{\overset{\shortparallel}{(1,3)}} \leftarrow \underset{g(2)}{\overset{\shortparallel}{(1,2)}} \leftarrow \underset{g(1)}{\overset{\shortparallel}{(1,1)}}$$

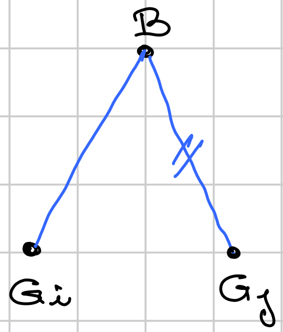
Per induzione è ovvio che si ottengono <u>solo</u> coprimi
Per dimostrare che sono <u>tutti</u> i coprimi lavoro al contrario
(va dimostrato per induzione o con il minimo intero)
Per dimostrare l'iniettività si usa il fatto che il genitore è univocamente determinato!!

$\boxed{\text{SLOGAN}}$ ESISTONO MONDI INVISIBILI DOVE LE COSE SI CAPISCONO CHE SPIEGANO MONDI VISIBILI IN CUI NON SI CAPISCE NULLA.

— o — o —

$\boxed{\text{M2 (a)}}$ $\forall$ coppia di girls $\exists$ esatt. n boys che hanno ballato con solo una (esatt.)

DOUBLE COUNTING !!!



— Ballano

$\not\!\!\!\!\!\;\;\,\#$ Non ballano

Conto questi triangoli

$\boxed{\text{Conto girl-wise}}$

$$\underbrace{\binom{2n}{2}}_{\text{coppie di girls}} \cdot \underbrace{n}_{\text{info del testo}} = \frac{2n(2n-1)}{2}\cdot n = n^2(2n-1)$$

$\boxed{\text{Conto boy-wise}}$ Alberto non sta in nessun triangolo.

Detto g_i il numero di girls con cui ha ballato il boy i

$$\text{Triangoli} = \sum_{i=2}^{2n} g_i(2n-g_i) \underset{ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\le} \sum_{i=2}^{2n} n^2 = n^2(2n-1)$$

$\parallel \leftarrow$ da sopra

$n^2(2n-1)$

Quindi il $\le$ deve essere $=$, il che accade $\Leftrightarrow g_i = n$ per ogni i

IDEA: una disuguaglianza ha prodotto $2n-1$ uguaglianze!!!

—o—o—

$\boxed{M3}$ "Trovare polinomi $P(x)$ per cui

$$\overset{I}{\overbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y^2-P(x)| \le 2|x|\}}} = \overset{I}{\overbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x^2-P(y)| \le 2|y|\}}}"$$

$\boxed{\text{STEP 1}}$ Può succedere che sia $\emptyset = \emptyset$?

$P(x) = -x^2-3000 \quad \rightsquigarrow \quad$
$$y^2+x^2+3000 > 2x$$
$$y^2+x^2-2x+1+2999 \ge 0$$
$$y^2+(x-1)^2+2999 > 0$$

Allo stesso modo con

$$P(x) = -x^2-a$$

mi faccio tutti i $P(0) < -1$.

$\boxed{\text{STEP 2}}$ $P(x) = -\frac{2}{\varepsilon}x^2-\varepsilon \rightsquigarrow$

$$y^2+\frac{2}{\varepsilon}x^2+\varepsilon = \underbrace{y^2}_{\ge 0}+\underbrace{\frac{2}{\varepsilon}x^2+\frac{\varepsilon}{2}}_{\ge 2|x|}+\frac{\varepsilon}{2} \ge 2|x|+\frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi il 1° è vuoto e il secondo idem.
Mi sono fatto tutti i negativi.

$\boxed{\text{STEP 3}}$ Ci devono essere soluzioni con $P(0) > 0$.
Vedo se ci sono simmetrie

$(x,y)\in I \iff (y,x)\in I$ (simmetria wrt)

$(x,y)\in I \iff (x,-y)\in I$ (simmetria rispetto agli assi)

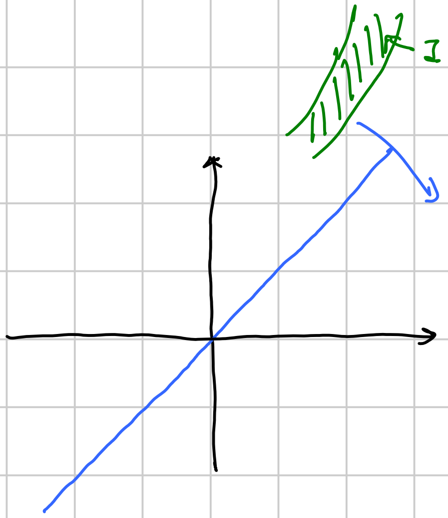
$\iff (-x,y)\in I$

$\boxed{\text{STEP 4}}$ Vedo gli $x \ge 0$ $\quad |y^2-P(x)| \le 2x$

$$-2x \le y^2-P(x) \le 2x$$

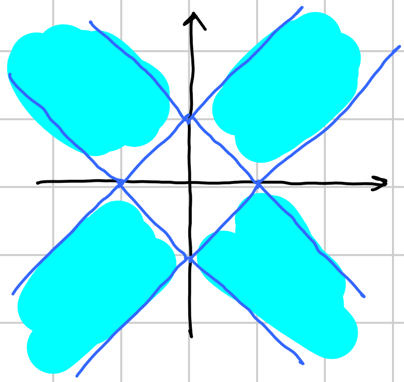
$$P(x)-2x \le y^2 \le P(x)+2x$$

Se $P(x) = x^{1000}$
dovrebbe stare da un certo p.to in poi sopra la bisettrice, ma questo viola le simmetrie.



Allo stesso modo escludo tutti i polinomi di grado ≥ 3 con coeff. positivo sul termine di grado max
e anche i pol. di 2° grado con coeff. di x^2 maggiore di 1

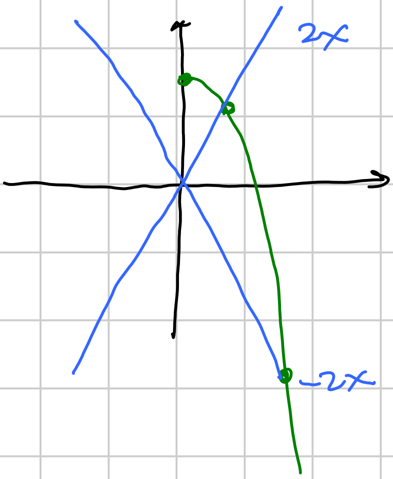
$\boxed{\text{STEP 5}}$ Con qualche calcolo noioso si vede che $P(x) = x^2+1$ va bene



$\boxed{\text{STEP 6}}$ Restano da escludere i $P(x)$ con grado ≥ 3 e coeff. negativo

$I \cap$ asse y : $y = \pm\sqrt{P(0)}$

Ma allora per simmetria l'intersezione con l'asse x la conosco.
L'intersezione con l'asse x vuol dire $y=0$, che va bene quando $P(x) = \pm 2x$



$P(x)$ incontra le rette in due p.ti distinti con $x>0$, il che vuol dire che I ha almeno 2 p.ti sul semiasse positivo delle x, il che è contro le simmetrie.

$\boxed{\text{STEP 7}}$ Per escludere i casi rimanenti, sarebbe bello sapere che $P(x)$ è pari.

Per far questo uso simmetria wrt asse y.

Prendo $a>0$

$$(a,y)\in I \iff P(a)-2a \le y^2 \le P(a)+2a$$
$$\Updownarrow$$
$$(-a,y)\in I \iff |y^2-P(-a)| \le 2a$$

$$P(-a)-2a \le y^2 \le P(-a)+2a$$

Confrontando deve essere $P(a)=P(-a)$.

Questo vale solo per gli a per cui l'estremo "alto" è >0

L'esistenza di a di questo tipo è ovvia se $P(0)>0$.

Per fortuna, basta che sia vero per un numero di a maggiore del grado.

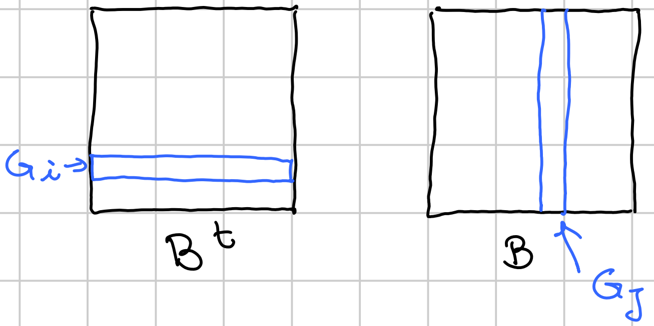
— o — o —

M2 (b)

MATRICI !!

Matrice ragazzi / ragazze con ± 1 a seconda del ballo

B = ballo $\qquad$ B^t = scambio righe e colonne



Se $i \neq j$ il prodotto fa 0

Se $i = j$ il prodotto fa $2n$

$$B^t \cdot B = 2n \, Id \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\boxed{\frac{1}{2n} B^t}}_{B^{-1}} \cdot B = Id$$

Ma allora $\quad B \cdot \left(\frac{1}{2n} B^t \right) = Id$, cioè $\underbrace{B \cdot B^t}$ $= 2n \, Id$

Fare la stessa cosa sui "vettori ragazzi"