Winter Camp 2015

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

WC 2015

ALGEBRA

Titolo nota 29/01/2015

$\boxed{A4}$ $f:\mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $\forall x,y$

$$f(xy) = f(x+y)\big(f(x)+f(y)\big) \qquad f(x)+f(y) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}$$

$f(2) = \frac{1}{2}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x}$ è una soluz.

$g(x) := \frac{1}{f(x)} \qquad h(x) := f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\boxed{g(x+y)g(x)g(y) = g(xy)\big(g(x)+g(y)\big)}$$

$y \leftarrow 1 \qquad g(x+1) = 1 + a\,g(x) \qquad a = \frac{1}{g(1)}$

$g(2) = 2 \qquad g(3) = 1+2a \qquad g(4) = 1+a+2a^2$

$$\boxed{g(n) = 1+a+\dots+a^{n-3}+2a^{n-2}}$$

$$1+a+a^2+a^3+2a^4 = g(6) = \frac{\overset{\deg=3}{g(5)}\,\overset{2}{g(2)g(3)}}{\underset{2}{g(2)}+\underset{\deg=1}{g(3)}} \quad \dots\ p(a) = 0$$

$p(1) = 0 \qquad p(x) = (x-1)\,q(x)$

Caso $a > 1$ $\qquad g(n) = a^{n-2} + \frac{a^{n-1}-1}{a-1} = \frac{2a^{n-1}-a^{n-2}-1}{a-1}$

$$\frac{1}{a-1}a^{n-1} \leq g(n) \leq \frac{2}{a-1}a^{n-1}$$

vera per n abbastanza grande

$x \leftarrow n \qquad y \leftarrow n$

$$\frac{4}{(a-1)^2}a^{3n-2} \geq g(2n)\,g(n) = 2g(n^2) \geq 2\cdot\frac{1}{a-1}a^{n^2-1}$$ assurdo per $n \gg 1$

$a < 1 \qquad n$ grande $\quad g(n) \approx \frac{1}{1-a} \qquad \frac{1}{1-a} = 2 \quad a = \frac{1}{2}$

$$x+y=xy \qquad xy-x-y=0 \qquad (x-1)(y-1)=1 \qquad y=\frac{x}{x-1}$$

$$g(x)\,g\left(\frac{x}{x-1}\right)=g(x)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\frac{p}{q}\in(1,2) \qquad \frac{p}{q}=\frac{\frac{p}{p-q}}{\frac{q}{p-q}}=\frac{\frac{p}{p-q}}{\frac{p}{p-q}-1} \qquad x=\frac{p}{p-q} \quad y=\frac{p}{q}$$

$$g(y)=\frac{g(x)}{g(x)-1} \qquad g\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{g\left(\frac{p}{p-q}\right)}{g\left(\frac{p}{p-q}\right)-1}$$

$x=3$

$$\underbrace{g(3)}_{1+2a}\,\underbrace{g\left(\tfrac{3}{2}\right)}_{1+2g\left(\frac12\right)}=\underbrace{g(3)}_{1+2a}+\underbrace{g\left(\tfrac{3}{2}\right)}_{1+2g\left(\frac12\right)} \qquad g\left(\tfrac12\right)=\frac{1}{2a^2}$$

$$x=2 \quad y=\frac12 \quad \ldots \quad 2a^2-3a+1=0 \qquad a=\frac12 \quad a=1$$

$\boxed{A5}$ $\quad a,b,c>0 \qquad \sum ab=1$

$$\sum\sqrt[4]{\frac{\sqrt3}{a}+6\sqrt3 b}\ \overset{?}{\leq}\ \frac{1}{abc}$$

$$\sum\sqrt[4]{\frac{1+6ab}{a}}\ \overset{?}{\leq}\ \frac{3^{-1/8}}{abc}$$

$$\sum\sqrt[4]{\frac{7ab+bc+ca}{a}}\ \overset{?}{\leq}\ \frac{3^{-1/8}}{abc}$$

$$\sum\sqrt[4]{a^3b^4c^4(7ab+bc+ca)}\ \overset{?}{\leq}\ 3^{-1/8} \qquad \sqrt[3]{abc}\leq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\leq\frac{a+b+c}{3}, \quad \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}=\frac{1}{\sqrt3}$$

$$\sum\sqrt[4]{bc(7ab+bc+ca)}\ \overset{?}{\leq}\ 3 \qquad (abc)^{3/4}\leq 3^{-9/8}$$

$$\sum\sqrt{bc}\ \sum\sqrt{7ab+bc+ca}\ \overset{?}{\leq}\ 9$$

$$3\underbrace{\sum bc}_{1}\cdot 3\cdot\underbrace{\sum(7ab+bc+ca)}_{9}\ \overset{?}{\leq}\ 81$$

$\boxed{A6}$ $\quad a,b,c>0 \qquad 1 \overset{?}{\le} \sum(1-a)^2 + \frac{2\sqrt{2}\,abc}{\sqrt{\sum a^2}}$

$$\underbrace{\sum a^2}_{\mathrm{II}} - 2\underbrace{\sum a}_{\mathrm{I}} \underset{0}{+2} + 2\sqrt{2}\,\underbrace{\frac{abc}{\sqrt{\sum a^2}}}_{\mathrm{III}} \overset{?}{\ge} 0$$

$$\left(\sum a^2 - 6\sqrt{\tfrac{1}{3}\sum a^2} + 2 + 2\sqrt{2}\,\frac{abc}{\sqrt{\sum a^2}} \overset{?}{\ge} 0\right)$$

$$q = \sqrt{\tfrac{1}{3}\sum a^2} \qquad \alpha = \frac{\sqrt[3]{abc}}{q} \qquad \beta = \frac{\frac{1}{3}\sum a}{q}$$

$$3q^2 - 6\beta q + 2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\alpha^3 q^2 \overset{?}{\ge} 0$$

$$\Delta \overset{?}{\le} 0 \qquad \left(3 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\alpha^3\right)q^2 - 6\beta q + 2 \ge 0$$

$$9\beta^2 - 6 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\alpha^3 \overset{?}{\le} 0$$

questa verrà omogenea in a,b,c

$$9\,\frac{\frac{1}{9}\left(\sum a\right)^2}{q^2} - 6 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{abc}{q^3} \overset{?}{\le} 0$$

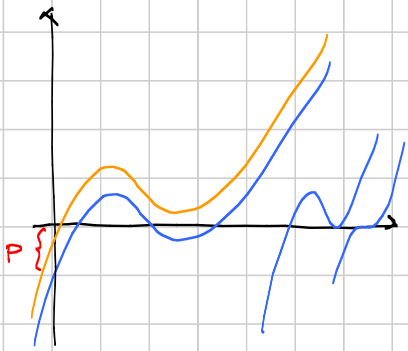
$$\underset{S,Q}{q}\,(\underbrace{\textstyle\sum a}_{S})^2 - 6\underset{S,Q}{q^3} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\underbrace{abc}_{P} \overset{?}{\le} 0 \qquad q = \sqrt{\tfrac{1}{3}\sum a^2}$$

Metodo S,P,Q (• ABC • PQR) $\qquad S = \sum a \quad P = abc \quad Q = \sum ab$

$$S^2 = \left(\sum a\right)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab = \sum a^2 + 2Q \qquad \sum a^2 = S^2 - 2Q$$

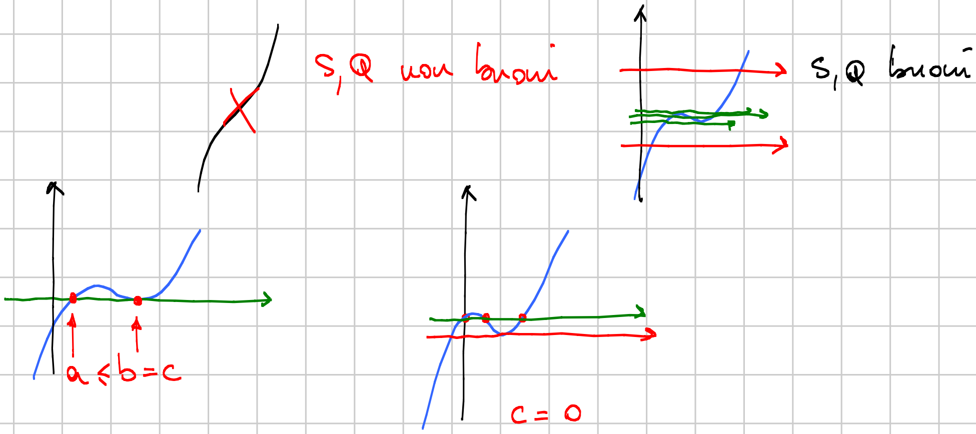
$$q = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{S^2 - 2Q}$$

$$p(x) := (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - Sx^2 + Qx - P$$



Per ogni coppia S, Q dimostro la disug. per tutti i valori di P compatibili

In questo caso basta P minimo



Caso $c=0$

$$(\Sigma a)^2 \overset{?}{\leq} 6q^2 \qquad q^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 \overset{?}{\leq} 2(a^2+b^2) \qquad \text{ok}$$

Caso $a \leq b = c$

$$q\left((\Sigma a)^2 - 6q^2\right) - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} ab^2 \overset{?}{\leq} 0 \qquad q^2 = \frac{1}{3}(a^2+2b^2)$$

$$\sqrt{a^2+2b^2}\left((a+2b)^2 - 2a^2 - 4b^2\right) - 4\sqrt{2}\,ab^2 \overset{?}{\leq} 0$$

$$a^2+4ab+\cancel{4b^2}-2a^2-\cancel{4b^2}$$

e divido per a

$$\sqrt{a^2+2b^2}\,(4b-a) - 4\sqrt{2}\,b^2 \overset{?}{\leq} 0 \qquad 0 < x := \frac{a}{b} \leq 1$$

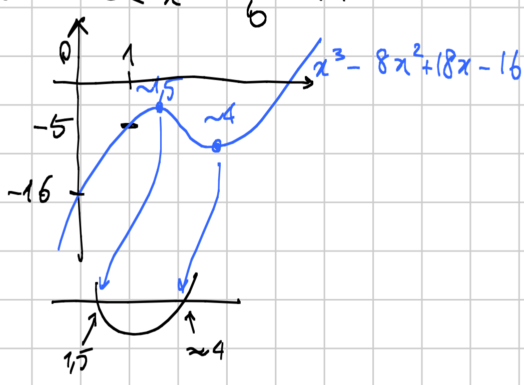
$$\sqrt{x^2+2}\,\underbrace{(4-x)}_{>0} \overset{?}{\leq} 4\sqrt{2}$$

$$(x^2+2)(16-8x+x^2) \overset{?}{\leq} 32$$

$$x^3-8x^2+18x-16 \overset{?}{\leq} 0$$

derivo : $3x^2-16x+18$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{3}$$



è crescente da $-\infty$ a $\simeq 1{,}5$ quindi anche tra 0 e 1
in 1 vale -5 in 0 vale -16

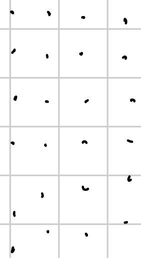
Combinatoria - WC 2015

Titolo nota 30/01/2015

C4: $\mathbb{Z}^2$

$\cup \quad \cup$

$A \quad B$



$|A| = n$

$|B| = m$

$C \sim A$ se $C = A + v \quad v \in \mathbb{Z}^2$

ha la stessa forma

$(h,k) \longmapsto f(h,k) \in \mathbb{R}$

C ha somma positiva se $\sum_{(h,k) \in C} f(h,k) > 0$

Se so che $\forall\, C \sim A$ C ha somma positiva $\Rightarrow$ $\exists\, \infty\ D \sim B$ con somma positiva.

Desiderio proibito: $E = \sum_{i=1}^{k} A + v_i = \sum_{j=1}^{h} w_j + B$

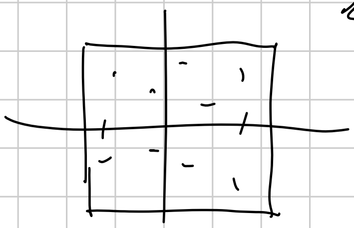
$A = \{w_1 \dots w_n\}$ $\quad B = \{v_1 \dots v_m\}$

$$\sum_{i=1}^{n} A + v_i = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{m \\ n}} w_j + v_i = \sum_{j=1}^{m} w_j + B = E$$

La somma degli $A + v_i$ è positiva $\forall\, v_i \Rightarrow$ La somma di E è positiva $\Rightarrow$ almeno un w_j fa sì che $w_j + B$ abbia somma positiva.

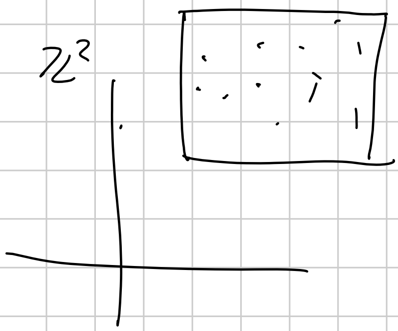
$\mathbb{Z}^2$

A:



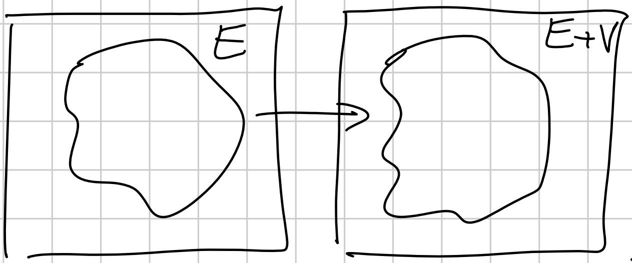
$\mathbb{Z}^2$

B:



Ma se $A \subset [a_1, a_2] \times [A_1, A_2]$
$B \subset [b_1, b_2] \times [B_1, B_2]$

$\Rightarrow w_j + B \subset [b_1 + a_1, b_2 + a_2] \times [B_1 + A_1, B_2 + A_2] \supset E$



V appropriato
anche $E+V$ è
somma di traslati
di A e di $B \Rightarrow$
trovo un altro
traslato di B
con somma positiva,
e così via.

$A \longmapsto$ polinomio con monomi $x^{a_1^j} y^{a_2^j}$ se $(a_1^j, a_2^j) \in A$
$p(x)$ $\quad j = 1 \dots m$

$B \longmapsto q(x)$

$E \longmapsto p(x)\, q(x)$

Per assurdo con un ragionamento analogo, basterà dim. che un traslato a somma positiva di B si può trovare fuori da un insieme finito fissato.

Es 5 n carte, scelte A e B
so dire quale è preferibile.

Il mazzo viene diviso tra Alberto e Barbara
mostrano la carta al proprio
chi ha quella pref. vince l'altra, e le ripone in fondo
al proprio nell'ordine che vuole

Domanda: il può finire?

Soluzione:

Oss: il "gioco" è un solitario

Idea: provo l'esistenza in modo non costruttivo:

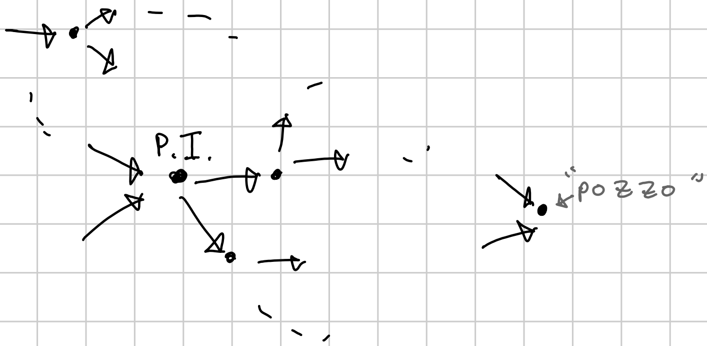
per assurdo: che succede se non c'è modo di finire?

Idea: considerare il grafo delle configurazioni:
i nodi sono tutte le configurazioni dei 2 mazzetti
e i lati sono orientati in modo da collegare
A a B se con una mossa posso andare da A a B
(A, B config.)

Fatto: è facile capire il grado entrante e uscente di
ogni vertice.

grado uscente: se entrambi i mazzetti hanno almeno una
carta, 2 config. raggiungibili possibili;
altrimenti sono su un nodo senza via di scampo.

grado entrante: per tornare indietro, prendo le ultime 2
carte di uno dei giocatori e le rimetto
in cima in un solo modo → ho 2 scelte
altrimenti le carte sono (quasi) tutte su
un solo mazzetto → ho 1 scelta



Oss: riesco a finire se c'è un cammino da P.I. a un pozzo

per Assurdo, la componente connessa $C(PI)$ che parte da P.I. non ha pozzi

Quindi, se questa componente ha n vertici, la somma dei gradi uscenti $d_+(PI) = 2n$
E il grado entrante $n \leq d_-(PI) \leq 2n$

Di sicuro, non riesco ad uscire, quindi, contando le frecce che hanno almeno un estremo in $C(PI)$ ottengo che $d_+(PI) \leq d_-(PI)$
$2n \leq d_-(PI) \leq 2n$
$\Rightarrow$ ogni vertice in $C(PI)$ ha grado entrante $= 2$

$\Rightarrow$ $C(PI)$ è sconnessa (non si esce, non si entra) cioè è chiusa anche per cammini a ritroso

Oss: ho un modo per spostarmi all'indietro verso un nodo con grado entrante $= 1$
Basta muovere spostando le 2 carte sempre dallo stesso mazzo. Ad ogni passo, quel mazzo perde una carta: in un numero finito di mosse, mi ritrovo ad avere una sola carta. Allora avrei grado entrante $= 1$, assurdo!

C6: Operazione su insiemi finiti di numeri positivi

$$A = \{a_1 \dots a_n\} \xmapsto{\;*\;} A^* \, (a_1+a_2, a_1+a_3, \dots a_1+a_n, a_2+a_3, \dots, a_{n-1}+a_n)$$

$n>1$ $\qquad$ N-pla $\qquad N = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

"quasi uguali"

2 N-ple $\sim$ se sono uguali a meno dell'ordine

Problema: se $A^* = B^*$ ma $A \neq B$ (a meno dell'ordine)

allora $|A| = |B| = 2^k$ per qualche $k \geq 1$

Esistono controesempi per $|A| = |B| = 2^k$, $A \neq B$ ma $A^* = B^*$?

$|A| = |B|$ se $A^* \sim B^*$ ovvio perché $N = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

$$A \longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i} \qquad f(1) = n$$

$$B \longmapsto g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i} \qquad g(1) = n$$

$$A^* \longleftrightarrow f(x)^2 - f(x^2) = \sum_{a_i^* \in A^*} x^{a_i^*}$$

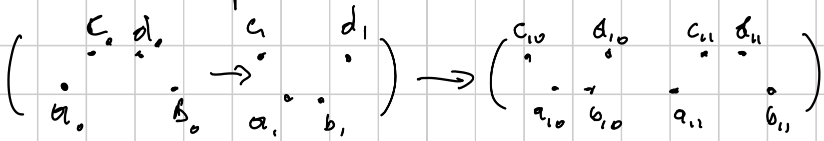
$$A^* = B^* \qquad f(x)^2 - f(x^2) = g(x)^2 - g(x^2)$$

$$\underbrace{(f(x) - g(x))}_{= (x-1)^k h(x)} (f(x) + g(x)) = \underbrace{f(x^2) - g(x^2)}_{= (x^2-1)^k h(x^2)}$$

$$f(x) + g(x) = (x+1)^k \frac{h(x^2)}{h(x)} \qquad \text{calcolo in } 1.$$

$$n + n = 2^k \cdot 1 \implies n = 2^{k-1}$$

Contro esempio: $a+b = c+d \qquad a \neq c \qquad a < c$ WLOG



P. Erdős

Forse possibile alternativa

ispirazione $A = (1, 4, 6, 7)$, $B = (2, 3, 5, 8)$ $\rightsquigarrow$ $1^2+4^2+6^2+7^2 = 2^2+3^2+5^2+8^2$

più facile: $1+4+6+7 = 2+3+5+8$

Fatto: se so che $A^* = B^*$

allora la somma degli elementi di A^* = " " B^*

allora " dei quadrati " A^* = " " " B^*

$$\sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 = (n-1)\sum_i a_i^2 + 2\sum_{i \neq j} a_i a_j = \left(\sum_i a_i\right)^2 + (n-2)\sum a_i^2$$

Abbozzo: $S_n = \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^n$

$\Rightarrow$ per il Th fond. sulle funzioni sym. $\exists$ p_n polinomio t.c. $S_n = p_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

dove i σ_i sono i coefficienti di

$\sigma_i := [t^{n-i}](t+a_1)(t+a_2) \cdot \quad \cdot (t+a_n)$

Oss. $\deg S_n = n$, $\deg \sigma_n = n$ $\Rightarrow$

$$p_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = p_n'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) + \lambda_n \sigma_n$$

Hope: λ_n sia un polinomio in n che si annulla solo se n è potenza di 2.

se Hope è vera

$\sigma_i(a_1, \dots, a_n) = \sigma_i(b_1, \dots, b_n) \quad \forall i$

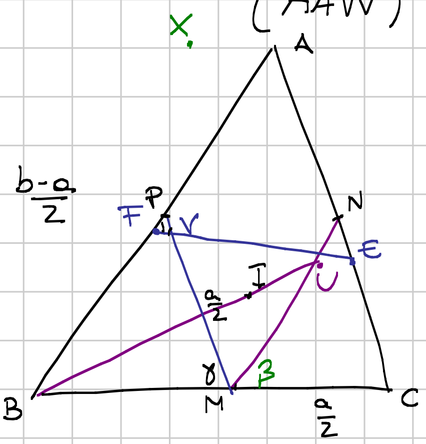
allora $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ sono radici dello stesso polinomio $t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$

WC 2015 - GEOMETRIA CONTOSA

Titolo nota 29/01/2015

(AAVv)

Tesi: V, I, C allineati



PVF isoscele

$PV = PF = AF - AP = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}$

$VM = PM - PV = \frac{a}{2}$

VMC isoscele $\Rightarrow V\hat{C}M = \frac{\gamma}{2}$

$BVUC$ è ciclico di centro M

(5) X = pto medio dell'arco BC

Tesi: XI biseca UV

Complessi: M è l'origine, $B = -1$ $C = 1$

$S = \frac{u+v}{2}$

Calcoliamo I

Recall: $a, b, c \in \mathbb{C}$ sono allineati $\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}}$

a, b, c perp $\Leftrightarrow \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}}$

Ex: a, b, c, d ciclico $\Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}$

$a, b \in$ circonf unitaria. $e \in \overline{ab} \Leftrightarrow \frac{e-b}{\bar{e}-\bar{b}} = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = ab$

$\Leftrightarrow \bar{e} = \frac{a+b-e}{ab}$

$a, b, c, d \in$ circ. unit. Intersezione di $\overline{ab}$ e $\overline{cd}$ è

$$e = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

perchè $\begin{cases} e \in \overline{ab} \\ e \in \overline{cd} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a+b-e}{ab} = \frac{c+d-e}{cd}$ e risolvo.

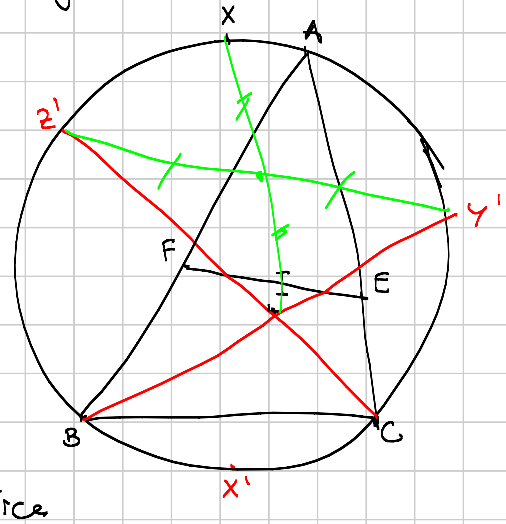
$i = \frac{2uv + u - v}{u+v}$

Per trovare X, osserviamo che XBC e MUV sono simili

$$\frac{u}{v} = \frac{1-x}{-1-x} \implies \text{risolvo per trovare } x = \frac{u+v}{u-v}.$$

Vogliamo s x i allineati $\frac{s-x}{i-x} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{u}{v}\right)\left(1+\frac{v}{u}\right)$

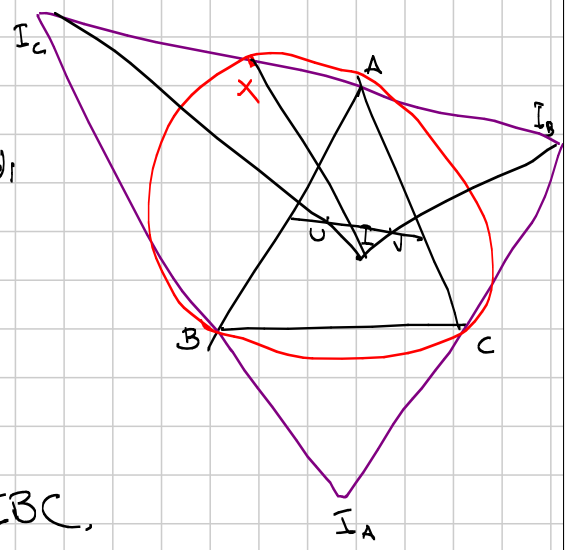
e questo numero è uguale al coniugato.



Oss: • I è ortocentro di X'Y'Z'
• EF // Y'Z' (angoli)

Vogliamo dire che IY'XZ' è un parallelogr.

Oss generale: in un triangolo, il simm dell'ortocentro rispetto al pto medio del lato è l'opposto del vertice
X = pto opposto di X' in $\Gamma_{X'Y'Z'} \implies$
XI biseca $Z'Y'$



Oss: $X \in I_B I_C \cap \Gamma_{ABC}$
I è ortocentro di $I_A I_B I_C$
$\implies \Gamma_{ABC}$ è la circonf dei 9 pti di $I_A I_B I_C$
$\implies X$ è pto medio di $I_B I_C$.

$UV \parallel I_A I_B$. XI biseca UV.

Hint: XI è simmediana per IBC.

$B\,[0:1:0]$
$I\,[a:b:c]$

$E\,[\gamma:0:\alpha]$
$F\,[\beta:\alpha:0]$

$M\,[0:1:1]$
$N\,[1:0:1]$

$\alpha = p-a$
$\beta = p-b$
$\gamma = p-c$

$BI \quad cx - az = 0$

$EF \quad -\alpha x + \beta y + cz = 0$

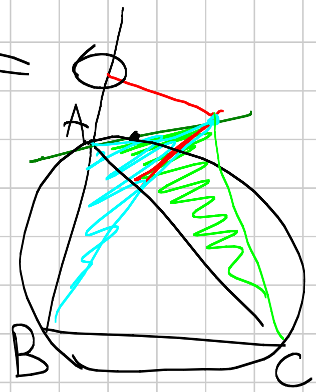
$MN \quad x + y - z = 0$

$$\begin{vmatrix} c & 0 & -a \\ -\alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-c\beta + a\alpha + a\beta - c\gamma = \beta(a-c) + a\alpha - c\gamma$$

$$\beta+\gamma = p-b+p-c = \frac{a-b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = a$$

$$\beta(\gamma-\alpha) + \alpha(\beta+\gamma) - \gamma(\alpha+\beta)$$
$$\cancel{\beta\gamma} - \cancel{\alpha\beta} + \cancel{\alpha\beta} + \cancel{\alpha\gamma} - \cancel{\gamma\alpha} - \cancel{\beta\gamma} = 0$$



$\Gamma \quad a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$

$AX \qquad P \in AX \qquad \frac{[APC]}{[APB]} = \frac{b}{c}$

$c\,[APC] = -b\,[APB]$

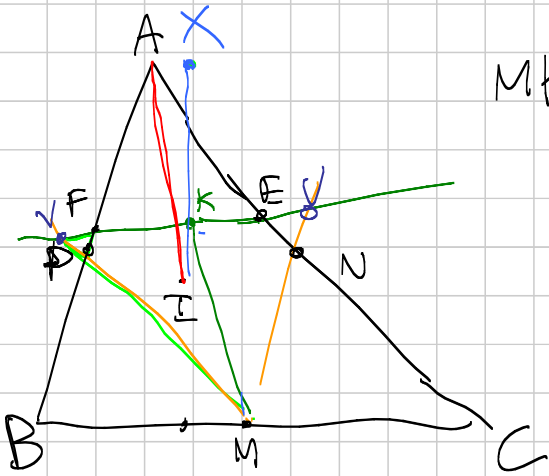
$AX \quad cy+bz$

$X\left[a^2 : b(c-b) : c(b-c)\right]$

$XI \cap EF =: K \qquad XI \quad bc(\gamma-\beta)x + ac\beta y - ab\gamma z = 0$

$EF \quad -\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

$K\left[ac\beta\gamma + ab\beta\gamma : ab\alpha\gamma - b^2c\,\gamma(\gamma-\beta) : bc\beta(\gamma-\beta) + ac\,\alpha\beta\right]$



$MK \parallel AI \Leftrightarrow$ Tesi

$\ell \qquad M \in \ell \qquad \ell \parallel AI$

$A\ [1:0:0]$

$I\ [a:b:c]$ $\qquad cy - bz = 0$

$M\ [0:1:1] \qquad ux + vy + wz = 0$

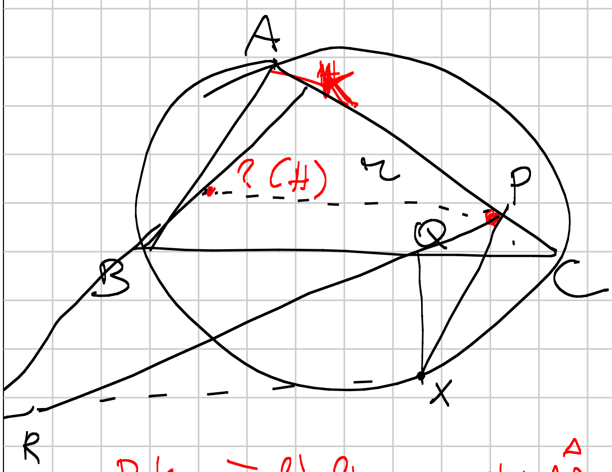
$v = -w \qquad u = 1$

$x + ky - kz = 0$ retta passante per M

$$\begin{vmatrix} 1 & K & -K \\ 0 & c & -b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad K=\frac{b+c}{b-c}$$

$$\ell \quad x+\frac{b+c}{b-c}y-\frac{b+c}{b-c}z=0$$

$a=\beta+\gamma$
$b=\alpha+\gamma$
$c=\beta+\alpha$



$X \in \widehat{BC}$

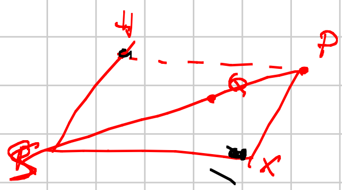
r parallela a XR passante per P passa per uno stesso punto

1 Euristica $\xrightarrow{\text{CLAIM}}$

$\Rightarrow$ Tale retta deve passare per l'ortocentro

BH è l'altezza di $\hat{ABC}$ relativa a B e quindi è // a XP

Al contrario SE Dimostro che il punto S t.c. HSXP è un parallelogramma è allineato con P e Q ho concluso



a, b, c

$x \in \Gamma_{circ}$

$a\bar{a}=1$
$x\bar{x}=1$

$P=?$

$XP \perp AC$

$P \in AC$

$$\frac{p-x}{c-a}=-\frac{\bar p-\bar x}{\bar c-\bar a}$$

$$\frac{p-a}{c-a}=\frac{\bar p-\bar a}{\bar c-\bar a}$$

$$p=\frac{1}{2}\left(x+a+c-\frac{ac}{x}\right)$$

In generale a su bc $\frac{1}{2}\left(a+\frac{(b-c)\bar{a}+\bar{b}c-b\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}\right)$

$$q=\frac{1}{2}\left(x+b+c-\frac{bc}{x}\right)$$

$$s=h+x-p=a+b+c+x-\frac{1}{2}\left(x+a+c-\frac{ac}{x}\right)=$$

$$=b+\frac{1}{2}\left(a+c+x+\frac{ac}{x}\right)$$

p, q, s sono allineati

$$\frac{p-q}{q-s}=\frac{\bar{p}-\bar{q}}{\bar{q}-\bar{s}}=\overline{\left(\frac{p-q}{q-s}\right)}$$

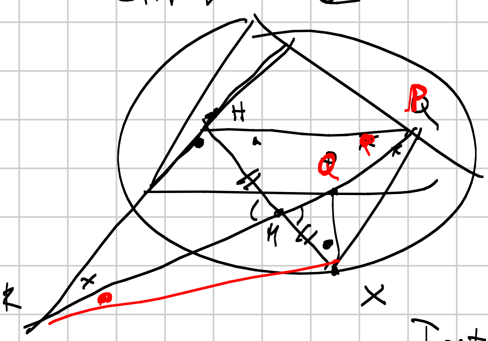
$$\frac{\frac{1}{2}\left(a-\frac{ac}{x}-b+\frac{bc}{x}\right)}{\frac{1}{2}\left(-b-a-\frac{ac}{x}-\frac{bc}{x}\right)}=\frac{\frac{ax-ac-bx+bc}{x}}{\frac{-bx-ax-ac-bc}{x}}=$$

$$=\frac{ax-ac-bx+bc}{-bx-ax-ac-bc}=\frac{(a-b)(x-c)}{(-x-c)(a+b)}$$

Perché?

$$\text{LUI}=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right)}{\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\frac{(b-a)(c-x)}{(-x-c)(a+b)}$$

Simletica



La linea di Simson di X biseca XH

$XQ \parallel RH$

Int. ab, cd

$$\frac{(\bar{a}b-a\bar{b})(c-d)+(a-b)(\bar{c}d-c\bar{d})}{(\bar{a}-\bar{b})(c-d)+(a-b)(\bar{c}-\bar{d})}$$

9. Retta all'infinito $x+y+z=0$

Cfr circoscritta è l'isogonale di $x+y+z=0$

$P[u,v,w] \xrightarrow{iso} P'\left[\frac{a^2}{u}; \frac{b^2}{v}, \frac{c^2}{w}\right]$ $[\infty:]$

Cfr circoscritta è $a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$

Una retta in generale è $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ $[r:]$

Chi è l'intersezione di r e ∞?

È $[\beta-\gamma : \gamma-\alpha : \alpha-\beta]$

La retta // a $r: \alpha x+\beta y+\gamma z=0$
passante per $[u,v,w]$ chi è?

È la retta passante per il p.to all'infinito di r
e $[u,v,w]$

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

In baricentriche? [Le circonferenze?]

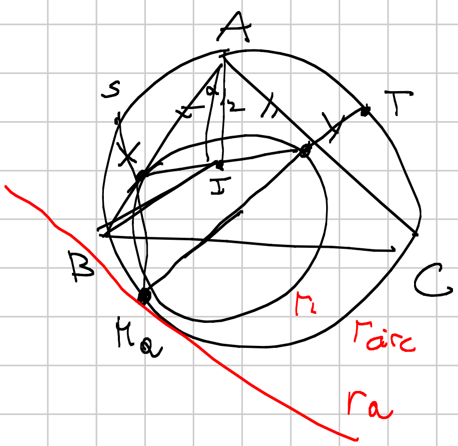
Ogni cfr è della forma

Γ: $a^2yz+b^2xz+c^2xy+(x+y+z)\underline{(lx+my+nz)}=0$

Chi sono l, m, n?

Sostituisco $A[1:0:0] \longrightarrow$ ottengo l che
è dunque $Pow_\Gamma A$

Dunque $lx+my+nz$ è l'asse radicale di
μ e Γ circ e l, m, n sono le
potenze di A, B, C rispetto a Γ



$r_a = ?$

Asse rad. di Γ_1 e Γ_{circ}

quindi è della forma

$lx + my + nz = 0$

$l = Pow_\Gamma A = AX^2$

$m = Pow_\Gamma B = BX^2$

$n = Pow_\Gamma C = CY^2$

Chi è il punto medio di XY? I incentro

$AX = \frac{AI}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ Chi è AI? Col th dei seni in $\overset{\triangle}{ABI}$

$$\frac{AI}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}} = \frac{AB}{\cos\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow AI = \frac{c \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{4c\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\gamma} =$$

$$= 4R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$AX = \frac{AI}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{8R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} =$$

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{2} = \frac{1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{2} = \frac{\frac{(a-c)^2-b^2}{2ac}}{2} = \frac{(a+b-c)(a-c-b)}{4ac}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = r$$

$$AX = \frac{2r}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\frac{a}{2R}} = \frac{4rR}{a} = \frac{4\,\frac{2\cancel{S}}{p}\,\frac{\cancel{a}bc}{4\cancel{S}}}{\cancel{a}} =$$

$$= \frac{2bc}{a+b+c}$$

$$BX = c - AX = c\left(1 - \frac{2b}{a+b+c}\right) = c\,\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

$$CY = b - \underset{AX}{\underset{\shortparallel}{AY}} = b\left(1 - \frac{2c}{a+b+c}\right) = b\,\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)^2 = R^2$$

$$\underline{(\ell, m, n)} = \left(\frac{4b^2c^2}{R^2}, \frac{c^2(a-b+c)^2}{R^2}, \frac{b^2(a-b+c)^2}{R^2}\right)$$

$$\underline{(m-n, n-\ell, \ell-m)} = \Big(\underbrace{[(b-c)^2 + a(b+c)](c-b)}_{X_A} : \underbrace{b^2(a+b-3c)}_{X_B} : \underbrace{c^2(3b-a-c)}_{X_C}\Big)$$

$$\begin{vmatrix} X_A & X_B & X_C \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{ X_C y - X_B z = 0$$

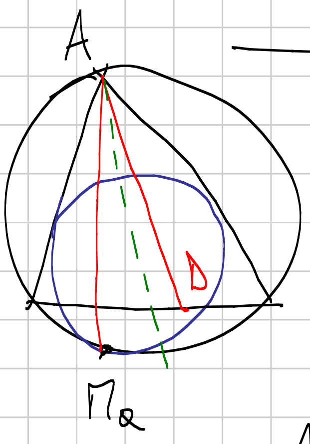
$$S_a \quad \begin{cases} X_C y - X_B z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \underline{\underline{[0 : X_B : X_C]}}$$

$$[0 : b^2(a+b-3c) : c^2(3b-a-c)]$$

$$[a^2(a+b-3c) \quad 0 : c^2(3a-b-c)]$$

$$[a^2(-3b+a+c) : b^2(3a-b-c) : 0]$$

———— ∘ ————



AD, AM_a simm. risp. alle bisett.

D = pt di tg delle ex-inscritte

$$D = [0 : p-2b : p-2c]$$

$$AD : \{ y(p-2c) = z(p-2b) \}$$

retta per A $\beta y + \gamma z = 0$

β, γ
$1,0 \longrightarrow 0,1$
$0,1 \longrightarrow 1,0$
$c,-b \longrightarrow c,-b$

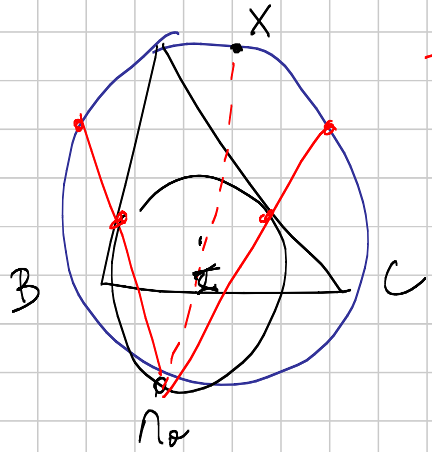
$\beta, \gamma \rightarrow (c^2\gamma : b^2\beta)$

$A\Pi_a : \{ c^2(p-2b)y = b^2(p-2c)z \}$

$$\begin{cases} A\Pi_a \\ \text{circo} \end{cases} \Rightarrow \Pi_a = \left[\frac{a}{2}, \frac{-b^2}{p-2b}, \frac{-c^2}{p-2c}\right]$$

$$r_a : \left\{ \underbrace{\left(\frac{a}{2}, \frac{-b^2}{p-2b}, \frac{-c^2}{p-2c}\right) \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0}_{\text{polare di } P \text{ risp. a } \Gamma} \right\}$$

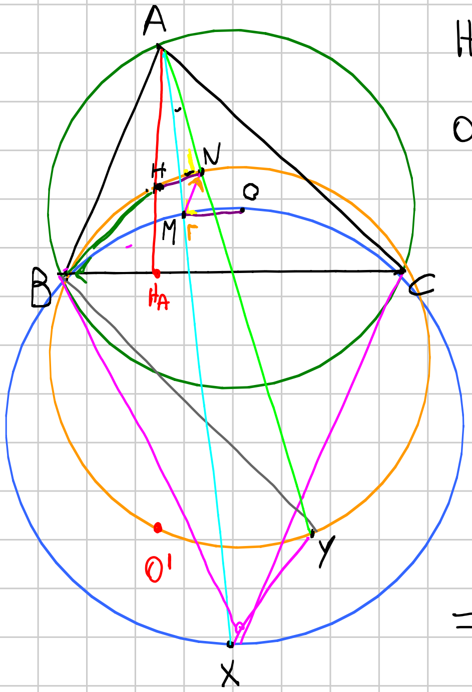
$(x,y,z)\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow$ eq. di Γ



$\Pi_a = IX \cap \Gamma$

GEOMETRIA - SINTETICA

Titolo nota 30/01/2015



H diam. opposto di Y su ω_2

O " " " X su ω_1

AX simmediana $BX \perp BO$

$CX \perp CO$

$H\hat{B}Y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow BY \parallel AC$

$H\hat{C}Y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CY \parallel AB$

ABYC parallelogramma.

$\Rightarrow$ AY mediana

Inversione in A raggio $\sqrt{bc}$ + simm. rispetto AI

$\triangle ANM \sim \triangle AYX \iff NM \parallel XY$ (perchè $N\hat{A}M = Y\hat{A}X$)

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AY}{AX} \iff AM \cdot AY = AN \cdot AX$$

$$AO' = \frac{bc}{AO} = \frac{bc}{\frac{b}{2\sin B}} = 2c\sin B = 2AH_A$$

$B \leftrightarrow C \qquad O \to O' \qquad AO \cdot AO' = bc$

O' = simm. di A rispetto BC. $\quad O' \in \omega_2$ (perchè ω_2 è simm di Γ_{ABC} risp. BC)

$\omega_1 \leftrightarrow$ circ. per $B'C'O' = \omega_2$. $\quad M = \omega_1 \cap$ simm. $\to \omega_2 \cap$ med $= Y \Rightarrow AM \cdot AY = AB \cdot AC$

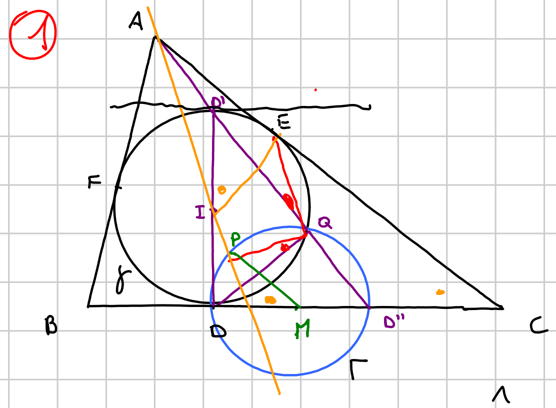
$N = \omega_2 \cap$ med $\to \omega_1 \cap$ simm $= X \Rightarrow AN \cdot AX = AB \cdot AC \Rightarrow AM \cdot AY = AN \cdot AX$

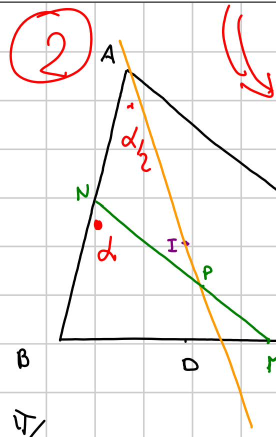
Sessione: Geometria sintetica

Con rif. alla fig. 2

$\overset{\triangle}{ANP}$ è isoscele $\Longrightarrow AN = NP = \frac{c}{2} \Longrightarrow MP = MN - NP = \frac{b}{2} - \frac{c}{2}$

Quanto vale MD? $MD = BM - BD = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b}{2} - \frac{c}{2}$





⟺ MN interseca AI in un punto P t.c. MP = MD

Voglio mostrare che $\widehat{PQE} = \pi/2$

$AQ \cap \gamma = D'$ è il diam.-opposto di D in γ

Chi è $AQ \cap BC$ = ?

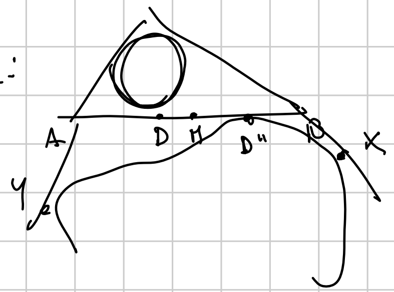
Traccio 2 ∥ BC pass. per D'

γ è exinscritta al triangolo che viene a formarsi, con OMOTETIA

$D' \longrightarrow AD' \cap BC = D'' \Rightarrow$ il p.to di tangenza dell'exinscritta relativa ad A con BC

$\Rightarrow$ DD'' ha come p.to medio M

RECALL:



$AD = ?$ $\quad p - a = \frac{b+c-a}{2}$

$BD'' = ?$

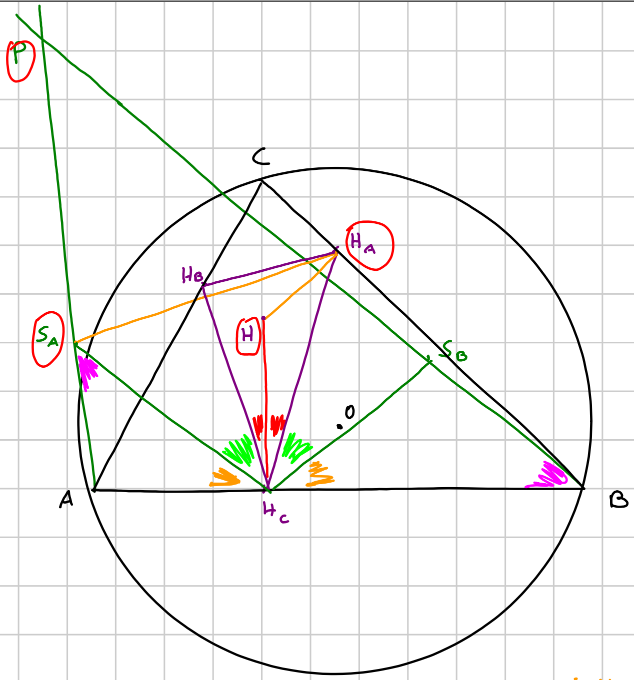
$\|$

$BX = CX - CB = p - a$

$\Rightarrow BD'' = AD \longrightarrow DD''$ ha come p.to medio M

Su Γ ci sono D, D'', P, Q
perché $MQ = \frac{DD''}{2}$ essendo il triangolo DQD'' rettangolo

Th $\iff \widehat{D'QE} \cong \widehat{PQD} \iff \widehat{PMD} \cong \widehat{EID'} \iff \widehat{PMD} \cong \gamma \iff PM \parallel AC$
(Γ per ciclicità)



Premesse:

- quadrilateri ciclici...
- $A\hat{H}_B H_C \sim A\hat{B}C$ ...
- H incentro di $H_A \hat{H}_B H_C$

$\boxed{1}$ ANGOLI, ANGOLI, ...

1a) $A\overset{\Delta}{H}_C S_A \sim S_B \overset{\Delta}{H}_C B$

$$\frac{AH_C}{H_C H_A} = \frac{H_C H_B}{BH_C}$$

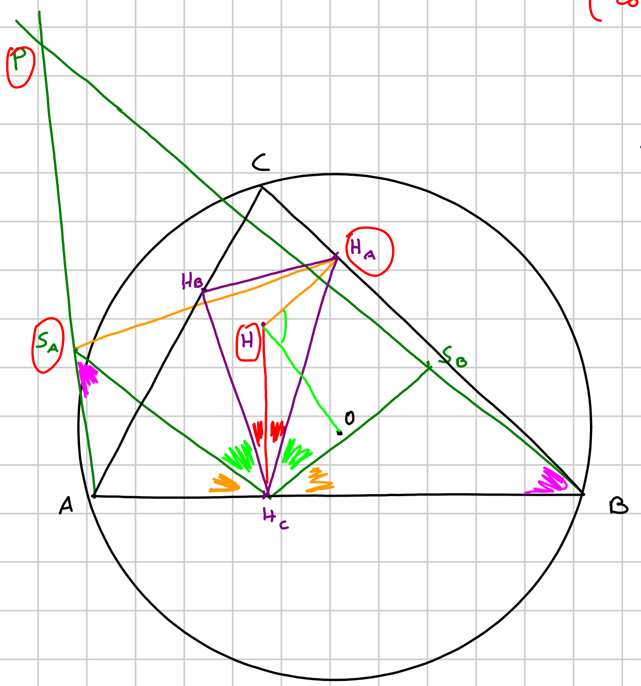
$S_A H_C$ $\qquad$ $H_C S_B$

1b) $PS_A H_C B$ ciclico

1c) $PS_A H H_A$ ciclico

$AH \cdot AH_A = AH_C \cdot AB = AS_A \cdot AP$

(contenti perché togliamo S_B)

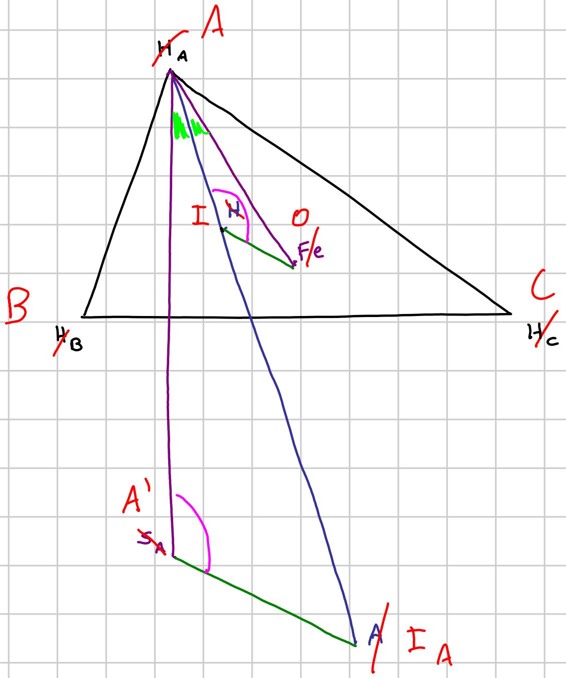


1d) Th1 $\Longleftarrow$ $A\hat{S}_A H_A = O\hat{H} H_A$

$O\hat{H}H_A \overset{?}{=} 180 - H_A \hat{H} P =$

$= 180 - H_A \hat{S}_A P = A\hat{S}_A H_A$

(contenti perché togliamo P)



$\boxed{2}$ CAMBIARE TRIANGOLO

$$Th1 \iff A\hat{A}'I_A = A\hat{I}O$$

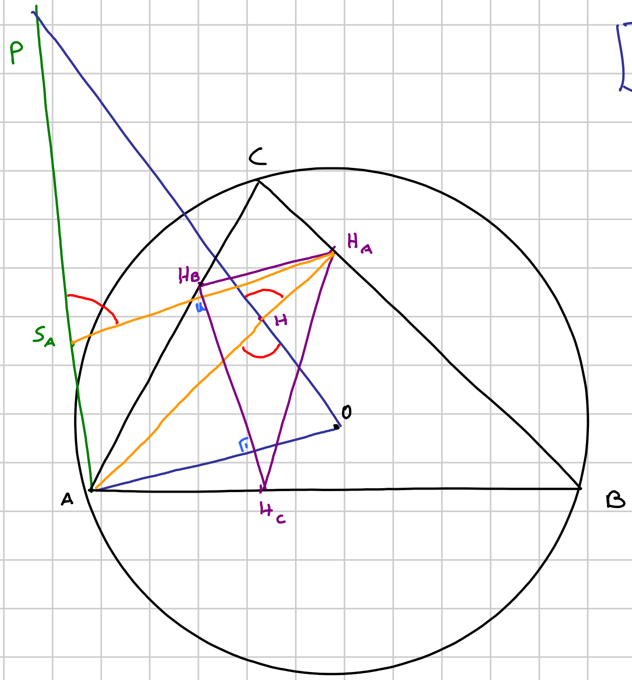
$$\iff A\overset{\triangle}{A}'I_A = A\overset{\triangle}{I}O \iff$$

$$\iff \frac{AA'}{AI_A} = \frac{AI}{AO} \iff$$

$$\iff \underbrace{AA'\cdot AO}_{=\,bc} = \underbrace{AI\cdot AI_A}_{=\,bc}$$

$A\overset{\triangle}{B}A' \sim A\overset{\triangle}{O}C$

$A\overset{\triangle}{B}I \sim A\overset{\triangle}{I_A}C$



$\boxed{3}$ THE END

$Th\ 2 \iff OH \cdot OP = OA^2$

$\iff O\hat{H}A = O\hat{A}P$

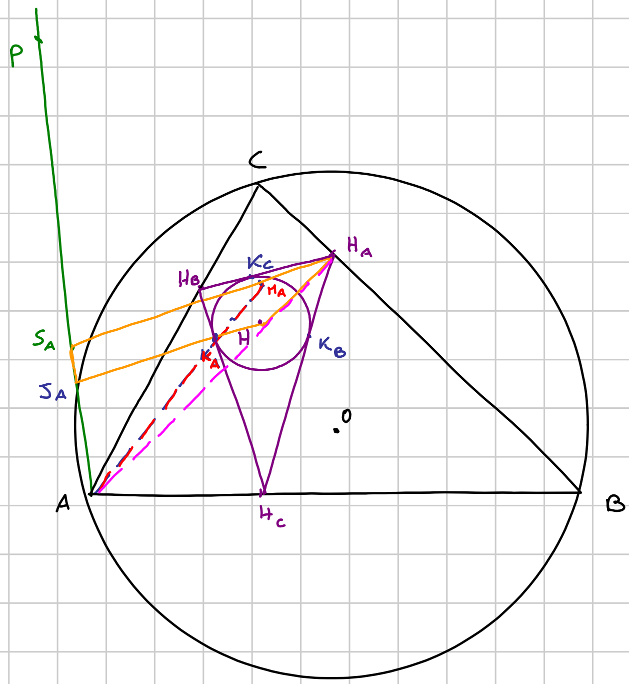
$O\hat{H}A = H_A\hat{H}P = H_A\hat{S}_AP$

$H_A\hat{S}_AP = O\hat{A}P$

$\Updownarrow$

$AO \parallel S_AH_A$

vero perché $\perp H_BH_C$



- $K_AK_BK_C$ omotetico a ABC
- M_A pt medio altezza del triangolo ortico
- M_A, K_A, A allineati
- $J_A = HK_A \cap AP$
- $\dfrac{HJ_A}{HK_A} = \dfrac{H_AM_A}{H_AS_A} = 4$
- $J_AJ_BJ_C$ omotetico di ABC
- P centro omotetia

– O, H "circocentri"

– P, O, H allineati

R, r raggi di $H_A H_B H_C$

$$Th \iff OH \cdot OP = 4R^2$$

$$\frac{PH}{PO} = \frac{2r}{R}$$

$$\frac{OH}{OP} = 1 - \frac{2r}{R} = \frac{R-2r}{R}$$

$$Th \iff OH^2 \cdot \frac{R}{R-2r} = 4R^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{OH}{2}\right)^2 = R(R-2r)$$

$HF_e^{\,2}$

OI^2 nel triangolo ortico

WC 2015 – TdN

Titolo nota 28/01/2015

N4 $2p^2 - 3p - 1 = n^3$ $\quad p$ primo, $n > 0$.

$$p(2p-3) \mid n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$$

$p \mid n+1$ oppure $p \mid n^2-n+1$

Caso $p \mid n+1$: $\quad n^3 < 2p^2 \leq p^3 \implies n < p$

$p \geq n+1$

$\implies p = n+1$.

Sostituiamo : si ottiene

$$0 = n^3 - 2n^2 - n + 2 = (n-2)(n+1)(n-1)$$

sol. intere positive : $n = 1, 2 \implies p = 2, 3$

FUNZIONANO

—

Caso $p \mid n^2-n+1$:

$\boxed{n^2 - n + 1 = kp}$ $\qquad p(2p-3) = (n+1)(n^2-n+1)$

$= (n+1)kp$

Eliminando p, ottengo

$$p = \frac{(n+1)k+3}{2}$$

Oss: k, $n+1$ DISPARI.

Sostituiamo in $\boxed{}$

Otteniamo un'equazione di 2° grado in :

$$2n^2 - (k^2+2)n - (k^2+3k-2) = 0.$$

Ci vuole Δ = quadrato.

$$\Delta = k^4 + 12k^2 + 24k - 12$$

$$\Delta \approx (k^2+6)^2 = k^4 + 12k^2 + 36$$

$(k^2+6)^2 < \Delta$ se $k \geq 3$

$\Delta < (k^2+7)^2$ se $2k^2 - 24k + 61 > 0$

sicuramente per $k \geq 9$.

$k \geq 9 \Rightarrow \Delta \neq \square$

Basta considerare i valori di k dispari e < 9.

Otteniamo la tabella

$k=1$ $\Delta = 25$

$k=3$ $\Delta = \cancel{249}$ $\neq \square$

$k=5$ $\Delta = \cancel{1033}$ $\neq \square$

$k=7$ $\Delta = 3\cancel{265}$ $\neq \square$

Sostituendo $k=1$, l'equazione di 2° grado diventa

$$2n^2 - 3n - 2 = 0$$

UNICA SOL. INTERA positiva è $n=2$ $\rightarrow p=7$

GIÀ VISTA!!

$\boxed{\text{NS}}$ Alcuni tentativi iniziali.

$n = 30$

n non funziona se $\exists\, p \nmid n$ tale che $p^2 < n$.

Se cerco $m > 30$ "buono", m deve essere divisibile per 30

$2^2 < m$ $3^2 < m$ $5^2 < m$

Quindi $m \geq 60 \Rightarrow 7 \mid m$ $(7^2 = 49 < m)$

Un eventuale numero m buono > 30 sarebbe multiplo di $2, 3, 5, 7$

Induttivamente, se

$p_{n+1}^2 < p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$ $n \geq 4$

devo aggiungere anche il fattore p_{n+1}.
DISUGUAGLIANZA VERA SEMPRE $\Rightarrow$ devo aggiungere tutti i primi, assurdo. (e si otterrebbe che il massimo n cercato è 30).

Postulato di Bertrand : $\forall n \ \exists p$ con $n < p \leq 2n$
↓ TEOREMA

$$p_{n+1}^2 < (2p_n)^2 = 4p_n^2$$

Quindi basta vedere che

$$4p_n^2 < p_1 p_2 \cdots p_n \quad , \quad 4p_n < p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$$

$4p_n < 8p_{n-1}$: quindi basta

$$8p_{n-1} < p_1 \cdots p_{n-1}$$
$$8 < p_1 \cdots p_{n-2}$$

VERO $n-2 \geq 3$ $\quad n \geq 5$

$n = 4$ SI CONTROLLA $\quad p_5 = 11$

$$p_{n+1}^2 < p_1 \cdots p_n = (p_1 \cdots p_k)(p_{k+1} \cdots p_n)$$

Se prendo $k \leq n/2$ $\quad p_1 \cdots p_k < p_{k+1} \cdots p_n$

Quindi basta $p_{n+1} < p_1 \cdots p_k$

$n - k = k$ (pari) $\qquad n-k = k+1$ (dispari)

IDEA Trovare un numero $m < p_1 \cdots p_k$ NON divisibile per nessuno dei $p_1, p_2, \dots, p_n$
In questo caso, m ha un fattore primo $\neq p_1, \dots, p_n$ e quindi $\geq p_{n+1}$ $\quad (p_{n+1} \leq m < p_1 \cdots p_k)$

"COSTRUZIONE" : considero i numeri

$$a_1 = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} \cdot 1 - 1$$
$$a_2 = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} \cdot 2 - 1$$

$a_{p_k} = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} \cdot p_k - 1$

Abbiamo p_k numeri, tutti minori di $p_1 \cdots p_k$
e tutti relativamente primi con $p_1, \ldots, p_{k-1}$

Per ogni primo $p \in \{p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n\}$
al massimo uno degli a_i è divisibile per p
(sono a due a due non congrui modulo p)

$n-k+1$ primi $\quad \# a_i = p_k$.

Ne devo eliminare al massimo $n-k+1$
se $n-k+1 < p_k$ ne resta uno libero

Ricordo che in ogni caso $n-k \leq k+1$
Mi basta

$$k+2 < p_k$$

vero per $k \geq 4 \quad (6<7)$
$(n \geq 9)$

CASI INIZIALI: VERIFICA IMMEDIATA.

$\boxed{N6}$ $p > 5$

<u>Hp</u>: $\exists k$ tale che $p \mid k^2+5$.

<u>Ts</u>: $\exists m, n > 0$ $\quad p^2 = m^2+5n^2$

1º passo: trovare interi non nulli a, b tali che
$a^2+5b^2 = $ "h" con h "piccolo".

<u>Osservazione</u> $\quad p \mid a^2+5b^2 \iff p \mid a^2-k^2b^2$
$(a^2+5b^2-a^2+k^2b^2 = (k^2+5)b^2$ div. per $p)$

Ora $\quad a^2-k^2b^2 = (a+kb)(a-kb)$.
Quindi voglio trovare a, b non nulli, tali che $p \mid a+kb$

Principio dei cassetti:

CONSIDERO $s = [\sqrt{p}]$

$$X = \{ x + ky \mid 0 \le x, y \le s \}$$

$$|X| = (s+1)^2 > p. \qquad \text{(OK per } k \text{ grande)}$$

Ci sono due elementi distinti di X che sono congrui modulo p. $x_1 + ky_1 \equiv x_2 + ky_2 \pmod p$

Prendo la differenza

$$0 \ne a + kb = (x_1 - x_2) + k(y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod p$$

Oss. a e b sono entrambi diversi da zero.
(Se uno fosse divisibile per p, lo sarebbe anche l'altro)
cioè 0 cioè 0

$$|a|, |b| < s < \sqrt{p}$$

$$a^2 + 5b^2 < p + 5p = 6p$$

Ho i casi $a^2 + 5b^2 = p, 2p, 3p, 4p, 5p$

– caso $a^2 + 5b^2 = p$. Manipolando, ottengo

$$(a^2+5b^2)^2 = \underbrace{(a^2 - 5b^2)}_{m}{}^2 + 5\,\underbrace{(2ab)}_{n}{}^2 = p^2$$

– caso $a^2 + 5b^2 = 4p$ $\to$ a e b sono pari.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{b}{2}\right)^2 = p \quad \to \text{caso precedente}$$

– caso $a^2 + 5b^2 = 5p$ $\to$ $5 \mid a$

Divido per 5 $\quad 5\left(\frac{a}{5}\right)^2 + b^2 = p$ $\to$ caso precedente

– caso $a^2 + 5b^2 = 2p$ $\to$ a e b sono DISPARI

$$\frac{(a^2+5b^2)^2}{4} = \left(\frac{a^2 - 5b^2}{2}\right)^2 + 5(ab)^2 = p^2$$

– caso $a^2 + 5b^2 = 3p$ $\to$ a e b non sono divisibili per 3

$a+b \equiv 0 \pmod 3$ oppure $a-b \equiv 0 \pmod 3$

Formule : $\left(\frac{a-5b}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = 2p$

$\left(\frac{a+5b}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = 2p$ $\rightarrow$ caso precedente

— o —

$\boxed{\text{N7}}$ $(2^n-1)(3^n-1) \neq \square$.

PER ASSURDO : $\exists n$ tale che viene un quadrato.

Oss. (facile) : n è pari.

(Se n è dispari $2 \parallel 3^n-1$)

$n = 2k$

L'equazione diventa

$$\left((2^k)^2-1\right)\left((3^k)^2-1\right) = \square$$

Ne segue che $\exists\, r, s, d$ (d libero da quadrati) tali che

$$(2^k)^2-1 = dr^2 \qquad (3^k)^2-1 = ds^2$$

Consideriamo l'equazione di Pell * (* $d \neq 1$)

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Questa equazione ha per soluzioni

$$(2^k, r) \qquad (3^k, s)$$

Sol. positive di Pell sono

$$(1,0) = (a_0, b_0), \ (a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \ldots$$

dove $(a_n + b_n\sqrt{d}) = (a_1 + b_1\sqrt{d})^n$.

Soddisfano una ricorrenza:

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{d} = (a_n + b_n\sqrt{d})(a_1 + b_1\sqrt{d})$$

$$= (a_na_1 + b_nb_1d) + (a_nb_1 + b_na_1)\sqrt{d}$$

$$\overset{\shortparallel}{a_{n+1}} \qquad \overset{\shortparallel}{b_{n+1}}$$

Cambiando indice, ho $b_n = a_{n-1} b_1 + b_{n-1} a_1$

$$b_n b_1 d = a_{n-1} b_1^2 d + b_{n-1} a_1 b_1 d$$
$$= a_{n-1} (\cancel{a}_1^2 - 1) + a_1 (a_n - \cancel{a_{n-1} a_1})$$
$$= a_{n-1} + a_1 a_n$$

RICORRENZA: $a_{n+1} = 2 \underset{a}{\underset{\shortparallel}{a_1}} a_n - a_{n-1}$

- $a = a_1$: a deve essere pari.
  (se a fosse dispari, tutti gli a_i sarebbero dispari). NON VOGLIO (voremo $a_i = 2^k$)

- $a_{n+1} \equiv a_{n-1} \pmod 2$ $\quad a_{2h} \equiv 1 \pmod 2$
  $\quad a_{2h+1} \equiv 0 \pmod 2$

- congruenza modulo a: $\quad a_{2h} \equiv \pm 1 \pmod a$
  $a_{n+1} \equiv -a_{n-1} \pmod a$ $\quad a_{2h+1} \equiv 0 \pmod a$

Ne segue che $a_{2h+1} = 2^k \implies a = 2^r$

Per concludere, voglio dimostrare che $3 \mid a$
che contraddice $a = 2^r$.

- $a \equiv 1 \pmod 3$
  sono entrambi assurdi
- $a \equiv 2 \pmod 3$

Se $a \equiv 1 \pmod 3$ la successione mod 3 è
$(1, 1, 1, 1, \ldots \quad \ldots \to$ NESSUNA POTENZA DI 3.

Se $a \equiv 2 \pmod 3$ la successione mod 3 è
$1, 2, 1, 2, \ldots \quad \to$ NESSUNA POTENZA DI 3.

$a \equiv 1 \ (3) \qquad a_{n+1} \equiv 2a_n - a_{n-1}$
$a \equiv 2 \ (3) \qquad a_{n+1} \equiv 4a_n - a_{n-1} \equiv a_n - a_{n-1}$

$a_0 \equiv 1$ $a_1 \equiv 1$ $a_2 \equiv 1$

$a_0 \equiv 1$ $a_1 \equiv 2$ $a_2 \equiv 1$

ok !!

WC 2015 — MISCELLANEA

Titolo nota 28/01/2015

$\boxed{M1}$

$f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+ \qquad f(1) = 1$

$f(2n) = f(n) \qquad f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$

n	$f(n)$
1	1
2	1
3	2
4	1
5	3 = 1+2
6	2
7	3 = 2+1
8	1
9	4 = 1+3
10	3
11	5 = 3+2
12	2
13	5 = 2+3
14	3
15	4 = 3+1
16	1
17	5 = 1+4
18	4
19	7 = 4+3
20	3
21	8
22	5
23	7 = 5+2
24	2
25	7 = 2+5
26	5
27	8
28	3 ... 31 → 5 = 4+1

Tesi: $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$|\{m \in \mathbb{N}_+ : f(2m-1) = n\}| = \phi(n)$$

Ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si può scrivere come $a+b$ con $(a,b) = 1$ in esattamente $\phi(n)$ modi e tutti questi modi compaiono una e una sola volta nella tabella

Idea: considerare le COPPIE. Considero

$$g(n) = (f(n), f(n+1))$$

CLAIM:

① l'immagine di g sono tutte le coppie di coprimi possibili

② g è iniettiva, cioè ogni coppia viene presa una sola volta

Intermezzo: da dove arriva il 7?

Mancano il $3+4$, $1+6$, $6+1$

$(3,4) \rightsquigarrow f(28)$

$(1,6) \rightsquigarrow$

Da capire: come si comporta g

$$g(2n) = (f(2n), f(2n+1)) = (f(n), f(n) + f(n+1))$$

copio la 1ª comp. di $g(n)$ — sommo le comp. di $g(n)$

$$g(2n+1) = (f(2n+1), f(2n+2)) = (f(n) + f(n+1), f(n+1))$$

sommo — copio la 2ª di $g(n)$

Di chi è figlio $(1,6)$?

$$\underset{g(32)}{(1,6)} \leftarrow \underset{g(16)}{(1,5)} \leftarrow \underset{g(8)}{(1,4)} \leftarrow \underset{g(4)}{(1,3)} \leftarrow \underset{g(2)}{(1,2)} \leftarrow \underset{g(1)}{(1,1)}$$

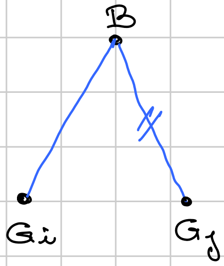
Per induzione è ovvio che si ottengano solo coprimi
Per dimostrare che sono tutti i coprimi lavoro al contrario
(va dimostrato per induzione o con il minimo intero)
Per dimostrare l'iniettività si usa il fatto che il genitore è univocamente determinato!!

$\boxed{\text{SLOGAN}}$ ESISTONO MONDI INVISIBILI DOVE LE COSE SI CAPISCONO CHE SPIEGANO MONDI VISIBILI IN CUI NON SI CAPISCE NULLA.

— o — o —

$\boxed{\text{M2 (a)}}$ $\forall$ coppia di girls $\exists$ esatt. n boys che hanno ballato con solo una (esatt.)

DOUBLE COUNTING !!!



— Ballano

$\not\!\!-$ Non ballano

Conto questi triangoli

$\boxed{\text{Conto girl-wise}}$

$$\underbrace{\binom{2n}{2}}_{\text{coppie di girls}} \cdot \underbrace{n}_{\text{info del testo}} = \frac{2n(2n-1)}{2}\cdot n = n^2(2n-1)$$

$\boxed{\text{Conto boy-wise}}$ Alberto non sta in nessun triangolo.

Detto g_i il numero di girls con cui ha ballato il boy i

$$\text{Triangoli} = \sum_{i=2}^{2n} g_i(2n-g_i) \le \sum_{i=2}^{2n} n^2 = n^2(2n-1)$$

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$\| \leftarrow$ da sopra

$n^2(2n-1)$

Quindi il $\le$ deve essere $=$, il che accade $\Leftrightarrow g_i = n$ per ogni i

IDEA: una disuguaglianza ha prodotto $2n-1$ uguaglianze !!!

— o — o —

$\boxed{M3}$ "Trovare polinomi $P(x)$ per cui

$$\overset{I}{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y^2-P(x)|\le 2|x|\}} = \overset{I}{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x^2-P(y)|\le 2|y|\}}"$$

$\boxed{\text{STEP 1}}$ Può succedere che sia $\emptyset = \emptyset$?

$$P(x) = -x^2-3000 \rightsquigarrow \quad y^2+x^2+3000 > 2x$$
$$y^2+x^2-2x+1+2999 \ge 0$$
$$y^2+(x-1)^2+2999 > 0$$

Allo stesso modo con

$$P(x) = -x^2-a$$

mi faccio tutti i $P(0) < -1$.

$\boxed{\text{STEP 2}}$ $P(x) = -\frac{2}{\varepsilon}x^2-\varepsilon \rightsquigarrow$

$$\underbrace{y^2}_{\ge 0}+\frac{2}{\varepsilon}x^2+\varepsilon = y^2+\underbrace{\frac{2}{\varepsilon}x^2+\frac{\varepsilon}{2}}_{\ge 2|x|}+\frac{\varepsilon}{2} \ge 2|x|+\frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi il 1° è vuoto e il secondo idem.
Mi sono fatto tutti i negativi.

$\boxed{\text{STEP 3}}$ Ci devono essere soluzioni con $P(0)>0$.
Vedo se ci sono simmetrie

$(x,y)\in I \Leftrightarrow (y,x)\in I$ (simmetria wrt)

$(x,y)\in I \Leftrightarrow (x,-y)\in I$ (simmetria rispetto agli assi)

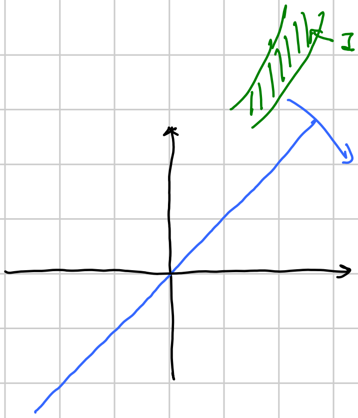
$\Leftrightarrow (-x,y)\in I$

$\boxed{\text{STEP 4}}$ Vedo gli $x\ge 0$ $\quad |y^2-P(x)|\le 2x$

$$-2x \le y^2-P(x) \le 2x$$

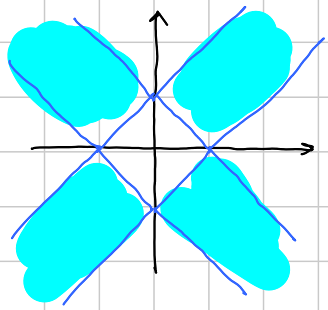
$$P(x)-2x \le y^2 \le P(x)+2x$$

Se $P(x) = x^{1000}$
dovrebbe stare da un certo p.to
in poi sopra la bisettrice, ma
questo viola le simmetrie.



Allo stesso modo escludo tutti i
polinomi di grado ≥ 3 con
coeff. positivo sul termine di grado
max
e anche i pol. di 2° grado con coeff. di x^2 maggiore di 1

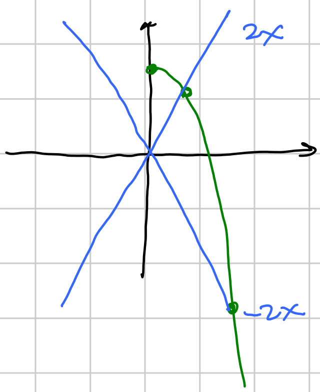
$\boxed{\text{STEP 5}}$ Con qualche calcolo noioso si vede che $P(x) = x^2+1$
va bene



$\boxed{\text{STEP 6}}$ Restano da escludere i
$P(x)$ con grado ≥ 3 e coeff.
negativo

$I \cap$ asse y : $y = \pm\sqrt{P(0)}$

Ma allora per simmetria l'intersezione con l'asse x la conosco.
L'intersezione con l'asse x vuol dire $y=0$, che va bene
quando $P(x) = \pm 2x$



$P(x)$ incontra le rette in due p.ti
distinti con $x>0$, il che vuol dire
che I ha almeno 2 p.ti sul
semiasse positivo delle x, il che è
contro le simmetrie.

$\boxed{\text{STEP 7}}$ Per escludere i casi rimanenti, sarebbe bello sapere che $P(x)$ è pari.

Per far questo uso simmetria wrt asse y.

Prendo $a>0$

$$(a,y)\in I \iff P(a)-2a \le y^2 \le P(a)+2a$$

$$\Updownarrow$$

$$(-a,y)\in I \iff |y^2-P(-a)| \le 2a$$

$$P(-a)-2a \le y^2 \le P(-a)+2a$$

Confrontando deve essere $P(a)=P(-a)$.

Questo vale solo per gli a per cui l'estremo "alto" è >0

L'esistenza di a di questo tipo è ovvia se $P(0)>0$.

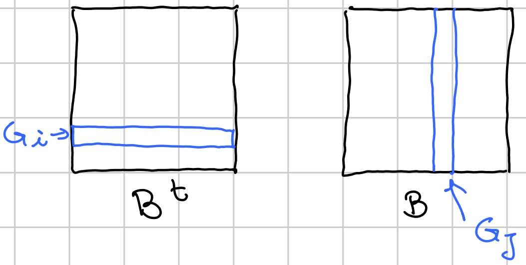
Per fortuna, basta che sia vero per un numero di a maggiore del grado.

— o — o —

$\boxed{\text{M2 (b)}}$ MATRICI !!

Matrice ragazzi / ragazze con ± 1 a seconda del ballo

B = ballo $\qquad B^t$ = scambio righe e colonne



Se $i \neq j$ il prodotto fa 0
Se $i = j$ il prodotto fa $2n$

$$B^t \cdot B = 2n \, Id \implies \underbrace{\boxed{\frac{1}{2n} B^t}}_{B^{-1}} \cdot B = Id$$

Ma allora $\quad B \cdot \left(\frac{1}{2n} B^t\right) = Id$, cioè $\underbrace{B \cdot B^t}_{} = 2n \, Id$

Fare la stessa cosa sui "vettori ragazzi"