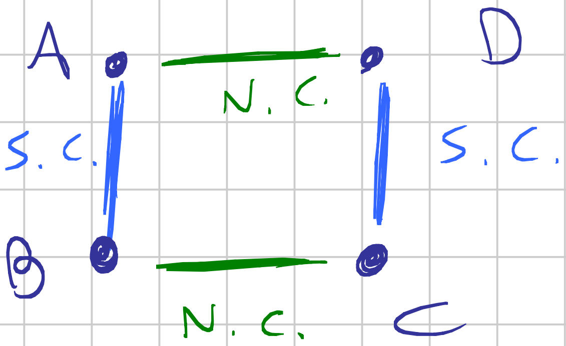
Combinatoria WC 2016

Titolo nota

C4 n persone ognuna ne conosce almeno un'altra e non ne conosce " "



Scelgo A e C a caso

riesco a completare il quadrato se

(Notaz: $C_M = \{$ persone conosciute da $M\}$)

$C_A \setminus C_C \neq \emptyset$

$C_C \setminus C_A \neq \emptyset$

In tal caso

$B \in C_A \setminus C_C$; $D \in C_C \setminus C_A$

Se non ci riesco $\Rightarrow$

wlog $C_C \subseteq C_A$

$\Rightarrow$ posso definire una relazione di "popolarità"

C è meno popolare di A

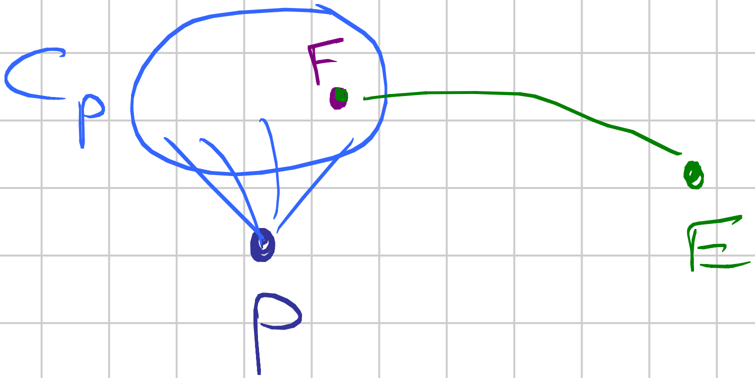
Si verifica che la popolarità

è
- riflessiva
- ~~an~~ti simmetrica (quasi)
- transitiva
- totale

$\Rightarrow \exists$ un P più popolare

Mi chiedo chi è

$U \setminus C_P$

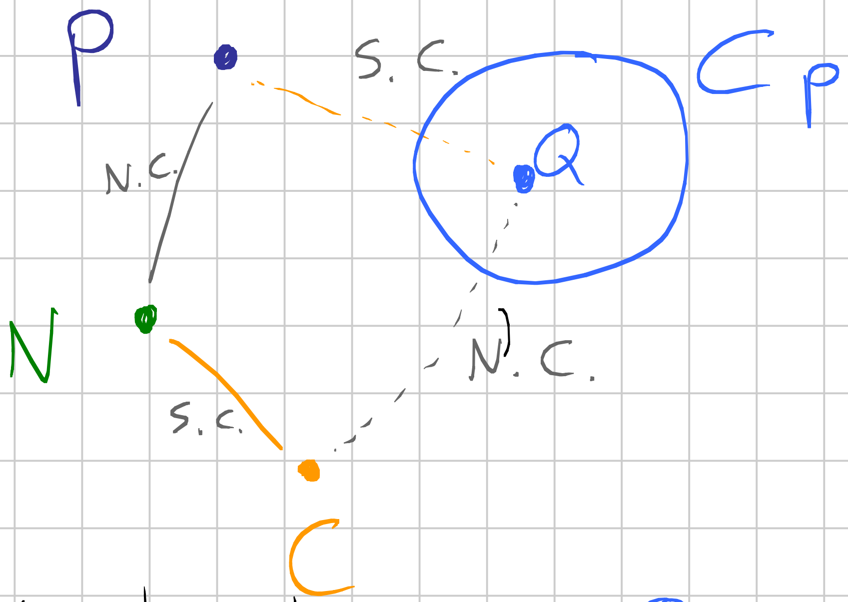


$$F \in C_E \subseteq C_P$$
$$E \in C_F \subseteq C_P$$

$\Rightarrow$ Assurdo

Soluzione B

Consideriamo P una persona con $|C_P|$ massima



Mi basta trovare $Q \in C_p$ tale che C non lo conosce

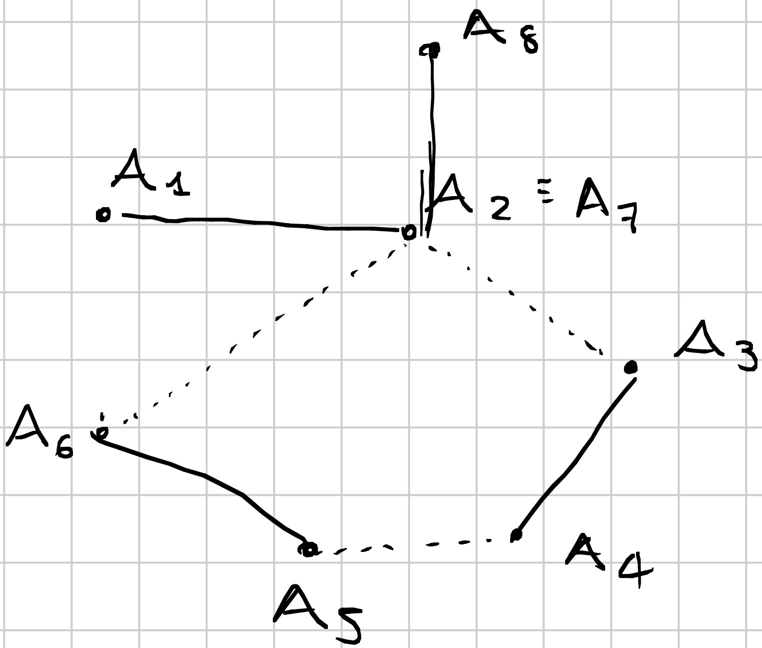
Se per assurdo non lo trovo

stimiamo $|C_c|$

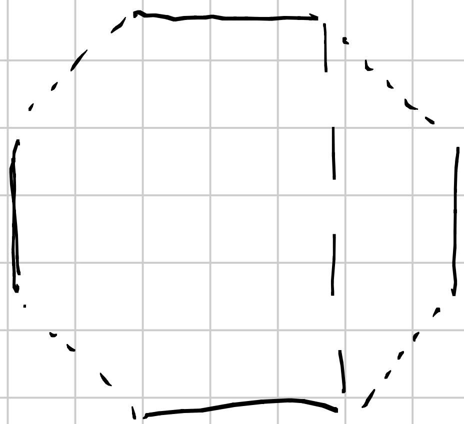
- $c \notin C_p \Rightarrow C_c \supseteq C_p$
$\ni N$
$\Rightarrow |C_c| > |C_p|$

- $c \in C_p \Rightarrow C_c \supseteq C_p \setminus \{c\}$
$\ni N$
$\ni p$
$|C_c| > |C_p|$ assurdo

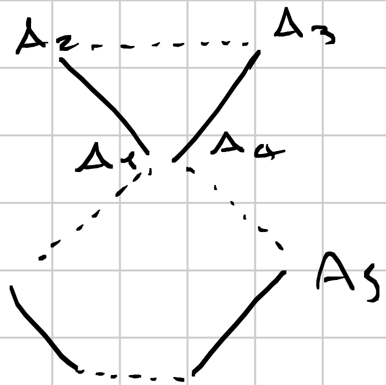
Soluzione C



Se sono fortunato, il ciclo che chiudo è semplice (non si auto-interseca)



Scelgo A_i e lo collego con A_{i+3}. In entrambi i casi, il ciclo si accorcia.



Se $A_1 \equiv A_4$ e $A_2 \equiv A_5$ allora $A_1A_2 = A_4A_5$. Ma se A_1A_2 era una conoscenza, allora A_4A_5 dev'essere non conoscenza

PROBLEMA C5

110 squadre

$\forall$ 55 squadre esiste un "campione" che perde al più 1 partite

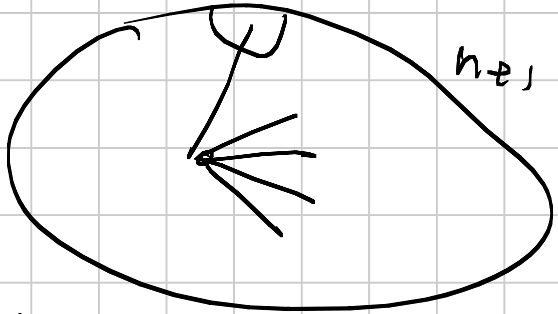
Tesi: esiste un "campione" generale

Induzione sull'ipotesi

Supponiamo che $\forall$ n squadre esiste un campione $n \geq 55$

Considero un sottoinsieme grosso $n+1$

Tolgo una squadra e ho un campione
Quindi mal che vada ho una squadra
che perde con al più 5



Quindi se tolgo a una a una tutte le squadre, ottengo almeno $\lceil \frac{n+1}{5} \rceil$ "semi-campioni", ma anche 12

Queste 12 squadre giocano tra loro, e fanno 11 partite a testa per un totale di 66 partite, ma ho al più 60 sconfitte.

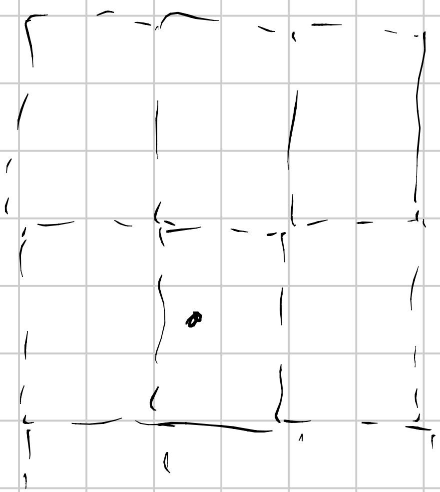
Quindi ho trovato un assurdo.

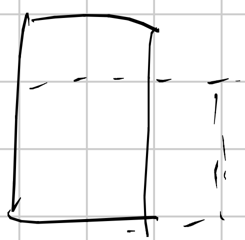
Problema C6

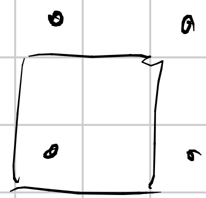
Alcune caselle del piano sono nere, le altre bianche.

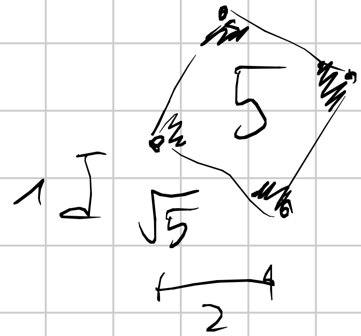
$a \le b \le 2a$ interi e sappiamo che in ogni rettangolo $a \times b$ (anche $b \times a$) c'è almeno una casella nera.

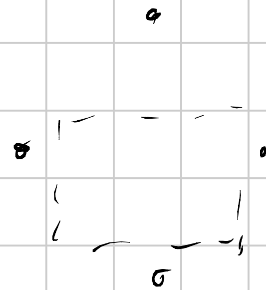
$$\max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \text{per ogni colorazione e per ogni } N>0 \text{ intero esiste (almeno) un quadrato } N\times N \text{ con } \alpha N^2 \text{ caselle nere}\}$$

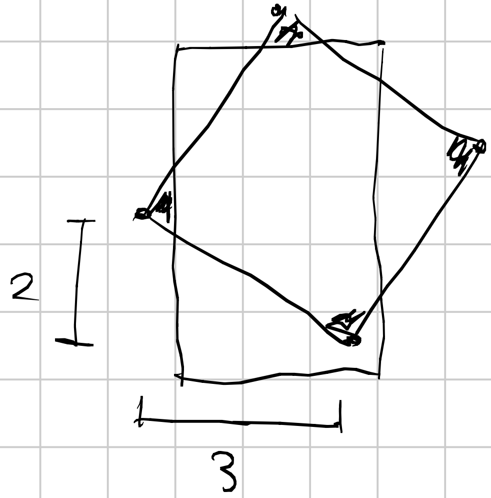






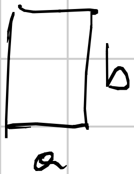






Congettura:

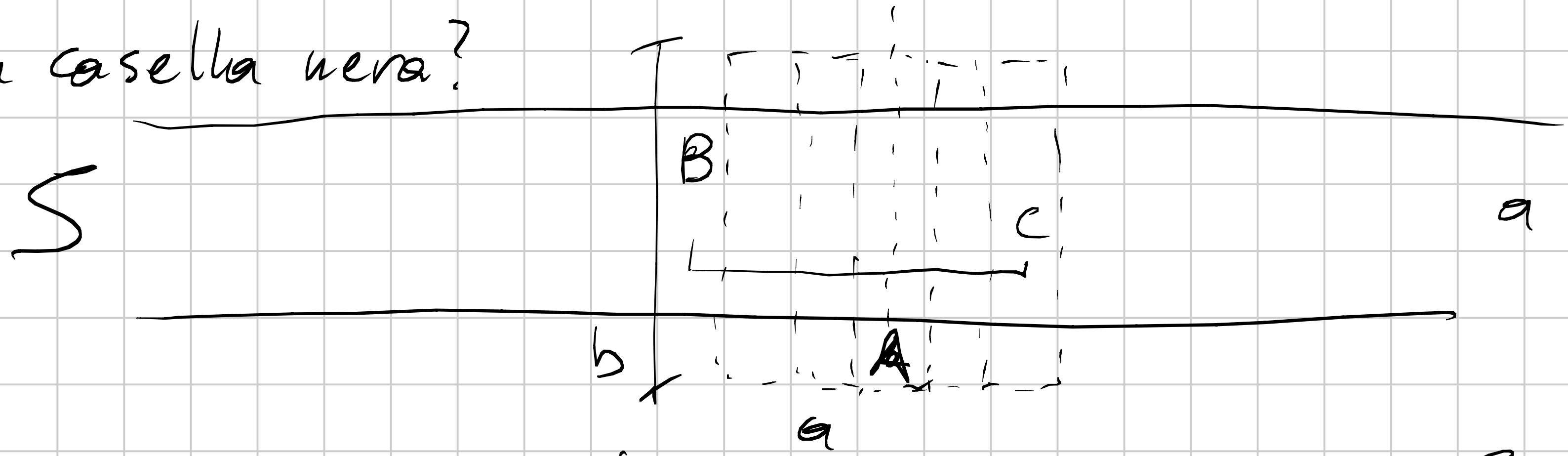
$$\alpha = \frac{1}{a^2 + (b-a)^2}$$



$\mathcal{V} = \{$ rettangoli "verticali" $\} \longrightarrow \{$ caselle nere $\} = \mathcal{N}$

$R \longmapsto$ una delle caselle nere più in alto in R

Quanti rettangoli al massimo hanno associata la stessa casella nera?



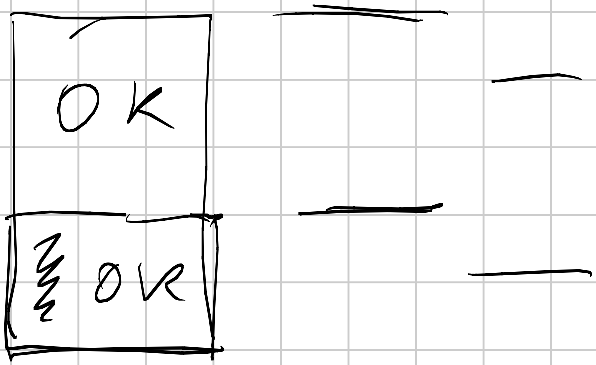
B = la casella nera più vicina a sinistra in S

C = " " " " destra in S

dist. orizz. B–C $\leq b$

i rett. verticali contenenti A "spazzano" 2a-1 colonne

A tutti i rett. vert. che non toccano tutte le righe di S può essere associata A.



2a−b colonne del rettangolo $a \times (b-a)$ in basso non vanno bene.

$$\underbrace{\boxed{a^2 + a(b-a)}}_{ab} - (2a-b)(b-a) =$$

$$= 2a^2 - 2ab + b^2 =$$

$$= a^2 + (a-b)^2 = D$$

Sia $\mathcal{C}$ una colorazione, $N>0$ e Q un quadrato di lato $(a+b)N^2 = K$

(verticali)

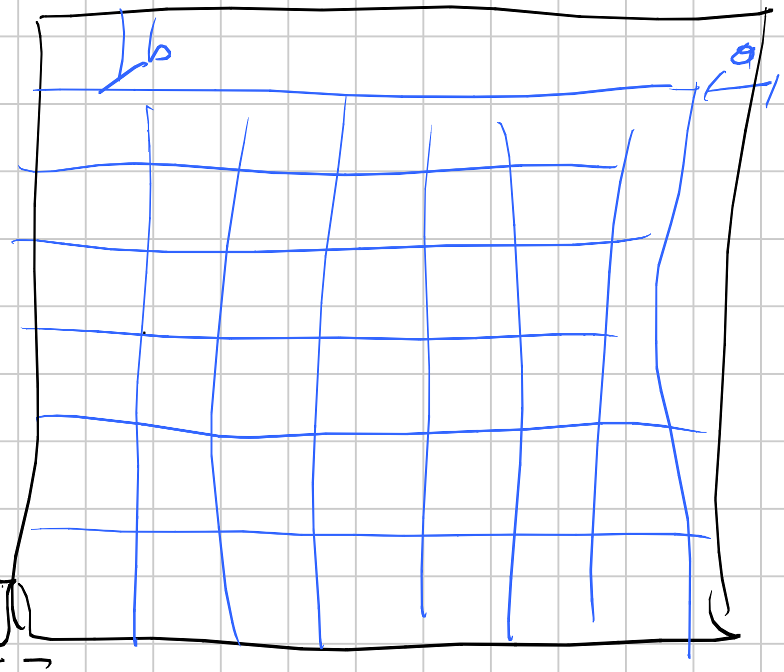
Quanti rettangoli contiene interamente Q?

$$(K-a)(K-b) > K(K-a-b):$$

Quante caselle nere al minimo in Q?

$$N_C \geq \frac{(K-a)(K-b)}{D} > \frac{(a+b)N^2 \cdot [(a+b)N^2-a-b]}{D} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 \cdot N^2 (N^2-1)}{D}$$



(disgiunti)

Quanti quadrati NxN in Q?

$$\left((a+b)N^2\right)^2 / N^2 = (a+b)^2 \cdot N^2$$

Quindi esiste almeno un quadrato $N \times N$ con dentro più di

$$\frac{N_C}{(a+b)^2 N^2} = \frac{N^2-1}{D}$$ caselle nere

$\Rightarrow$ in quel quadrato $N \times N$ ci sono $\geq \dfrac{N^2}{D} = \alpha N^2$ caselle nere.