WC 2016 — MISCELLANEA

Titolo nota 27/01/2016

$\boxed{\text{M3}}$ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(n + f(m)) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2000$

$$f(n + \underbrace{f(m)}_{a}) = f(n) + \underbrace{f(3m) - f(m) + 2000}_{b}$$

In generale: $f(n+a) = f(n) + b \rightsquigarrow f(ka) = f(0) + kb \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
(induzione avanti e indietro)

Brutalmente: f sulla succ. ka va all'infinito come $f(x) \sim \frac{b}{a} x$

$\rightsquigarrow$ Fisso $m_1 \rightsquigarrow$ ottengo a_1 e b_1
Fisso $m_2 \rightsquigarrow$ " a_2 e b_2 $\quad \rightsquigarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = c$

$\rightsquigarrow$ fatto su tutti gli m $\rightsquigarrow$ $\boxed{f(3m) - f(m) + 2000 = c\, f(m)}$

Uso la relazione con a_1 e b_1 $\quad f(ka_1) = f(0) + kb_1 \quad k = a_2$
a_2 e b_2 $\quad f(ka_2) = f(0) + kb_2 \quad k = a_1$

$a_2 b_1 = a_1 b_2 \rightsquigarrow$ se posso dividere ottengo $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = c \in \mathbb{Q}$

Devo poter dividere... Pongo $c = \frac{b_1}{a_1}$ e voglio dim. che $b_2 = c a_2$

A meno di cambiare c sappiamo che $\boxed{f(3m) = (c+1) f(m) - 2000}$

$$f(n + f(m)) = f(n) + c\, f(m)$$

$\boxed{\text{2ª parentesi}}$ $\quad f(3m) = \alpha f(m) - 2000 \rightsquigarrow$

$$f(3^k m) = \alpha^k f(m) - 2000 \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1}$$

Mettiamo anche che $\alpha = 3$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{f(n + f(m)) = f(n) + 2f(m)}$

Tutte le funzioni $f(x) = 2x + b$ risolvono, ma NON sono le uniche

$\boxed{n = 0}$ $\quad f(f(m)) = f(0) + 2f(m) \rightsquigarrow f(x) = 2x + f(0) \quad \forall x \in \mathrm{Im}$

$n = f(k) \rightsquigarrow f(f(k) + f(m)) = 2f(k) + 2f(m) + f(0) \quad f(x) = 2x + f(0)$
$\forall x \in \mathrm{Im} + \mathrm{Im}$

Ci sono soluzioni non rette, ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \text{ è pari} \\ 2x+6 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

Conclusione: serve interazione tra

$$f(3^k m) = \alpha^k f(m) - 2000 \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} \quad \text{e}$$

$$f(m + f(m)) = f(m) + (\alpha-1) f(n) \rightsquigarrow f(m + k f(n)) = f(m) + (\alpha-1) k f(n)$$

$$f(3^k m) = f(3^k m - m + m) = f(m + \underbrace{(3^k-1)m}_{})$$

se fosse multiplo di un qualche $f(n)$

$$\boxed{\alpha^k f(m) - 2000 \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1}} \quad \boxed{= f(m) + (\alpha-1)(3^k-1)m}$$

Come concludo: scelgo n quasi a caso, e poi scelgo k in modo tale che

$(3^k - 1)$ sia multiplo di $f(n)$

Questo è possibile purché $f(n)$ NON sia multiplo di 3.

Procedura diretta:

- → scelgo n t.c. $3 \nmid f(n)$
- → scelgo k t.c. $(3^k - 1)$ è multiplo di $f(n)$
- → con progressioni aritm. e geom. trovo $f(x) = Ax + B \quad \forall x \in \mathbb{Z}$
- → sostituisco e trovo A e B $\quad f(x) = 2x + 1000.$

$\boxed{41}$ $P(n)$ = più grande primo di n

$$P(n^4+n^2+1) = P((n+1)^4+(n+1)^2+1)$$

Fattorizzazione !! $\quad n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$

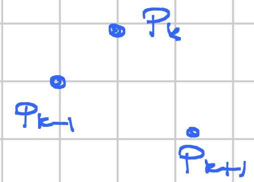
$(n-1)^2+(n-1)+1$

$$P_k = P(k^2+k+1)$$

$$P_{k^2} = \max\{P_k, P_{k-1}\}$$
$$P_{(k+1)^2} = \max\{P_{k+1}, P_k\}$$

Se per caso fosse $P_k \geq P_{k-1}$ e $P_k \geq P_{k+1}$, allora k è OK ☺

Mi servono ∞ p.ti di "massimo locale" per P_k



Basta escludere che P_k sia
- definitiv. strett. decrescente (assurdo)
- " " crescente (assurdo perché $P_{k^2} = \max\{P_k, P_{k-1}\}$)

(a) $(a^2+1)((a+1)^2+1) = ((a^2+a+1)^2+1)$ e la conclusione è la stessa

$P_k = P(k^2+1)$ e come prima.

<u>Soluz. alternative</u>

① $(a^2+1) = 2(b^2+1) \rightsquigarrow$ Pell $\quad a^2-2b^2=1$

Sia p il massimo primo $\qquad x^2+1 \equiv 0 \pmod p$
ha soluzioni perché $p \equiv 1 \pmod 4$ per i soliti motivi
Ha 2 soluzioni minori di p. Dette x e y queste soluz. per forza

$$P(x^2+1) = P(y^2+1) = p$$

Se fosse $\{x, y\} = \{a, b\}$, allora $a+b = x+y = p$

Quindi OK se la Pell ha ∞ soluzioni con $a+b$ non primo.
(si può anche con $a+b$ multiplo di 5)

$a^2 - 2b^2 = 1$ $\qquad (3+2\sqrt{2})^k (3-2\sqrt{2})^k = 1$

$$\rotatebox{90}{$=$}$$

$$(a_k + b_k\sqrt{2})(a_k - b_k\sqrt{2})$$

$a_{k+1} = \dots a_k + \dots b_k$

$b_{k+1} = \dots b_k + \dots a_k$

② $p \equiv 1 \ (4)$ $\qquad x^2+1 \equiv y^2+1 \equiv 0 \ (p) \qquad 0<x<y<p$

$P(x^2+1) = P(y^2+1) = p$ $\qquad$ spero che $P((p+x)^2+1) = p$

?

Sia $q = P((p+x)^2+1)$ vorrei tanto che $\boxed{p+x<q}$

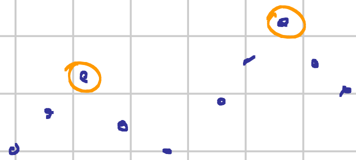
Se fosse vero, allora

$$(p+x)^2+1 \geq 2pq > 2p(p+x)$$
$$\cancel{p^2} + \cancel{2px} + x^2+1 > \cancel{2}p^2 + \cancel{2px} \qquad \text{Assurdo}$$

Considero $p+x-q$. Questo è $< x$. Se è negativo, allora ok.
Se è positivo, allora

$$(p+x-q)^2+1 \equiv 0 \mod q$$

Allora .... Ad ogni x pari associo $P(x^2+1)$. Questa successione assume infiniti valori. Prendo x in maniera tale che $P(x)$ sia massimo fra tutti i valori visti fino a quel momento



Se x è di questo tipo, non può esistere un numero $0 \le p+x-q < x$ tale che

$$P((p+x-q)^2+1) = q > P.$$

$\boxed{M2}$ Fatto generale 1: in $n 2^n$ passaggi posso ordinare un vettore lungo 2^n. MERGE SORT

(Faccio 2 pile, ordino dalle 2 parti, e poi metto insieme togliendone uno per volta:

$$S(k+1) = 2S(k) + 2^{k+1} \rightsquigarrow k2^k$$

(a) ok con $4 \cdot n \cdot 2^n$

Con $n \cdot 2^n = 2n \cdot 2^{n-1}$ passaggi li ordino $\leq \dots$ poi chiedo disug. opposte su ogni coppia consecutiva

(b) Idea: prendo 2 successioni che sono permutazioni della stessa

$$\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$$

Quanti sono? $(2^n)!$

Quante sono le possibili risposte? $2^{n 2^{n-1}} < (2^n)!$

si dimostra

$\rightsquigarrow$ esistono due permutazioni che avrebbero le stesse risposte

$$\begin{array}{ccccc} & & & +1 & \\ a_1 & \boxed{a_2} & a_3 & \dots & \boxed{a_{2^n}} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{2^n} \\ 3 & 1 & & 2 & \text{scende} \end{array}$$

Voglio: modificare la 1ª ottenendo una succ. $c_1, c_2, \dots, c_{2^n}$ che ottiene le stesse risposte di a_k e b_k e ha 2 elementi uguali.

Esistono due indici i e j t.c.

$$a_j = a_i + 1 \quad \text{ma} \quad b_j < b_i$$

La domanda $k_i < k_j$ non è mai stata fatta

Sostituisco a_i con a_j (o viceversa) e la cosa funziona.