Winter Camp 2016

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

ALGEBRA

F. MORANDIN   WC. 2016

Titolo nota   29/01/2016

$\boxed{A4}$ $p(x)=\sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$ tale che

1) $\alpha \le a_i \le \alpha+1 \quad \forall i=0,1,\dots,2n \qquad \alpha = 2015$

2) $\exists\, \xi \in \mathbb{R} : \ p(\xi)=0$

determinare il più piccolo n per cui tale polinomio esiste

$\rightarrow \xi < 0 \qquad \zeta = -\xi$

$$0 = p(\xi) = p(-\zeta) = a_{2n}\zeta^{2n} + a_{2n-2}\zeta^{2n-2} + \dots + a_0 - \left(a_{2n-1}\zeta^{2n-1} + \dots\right)$$

$$a_{2n}\zeta^{2n} + \dots + a_0 = a_{2n-1}\zeta^{2n-1} + \dots + a_1\zeta \qquad (*)$$

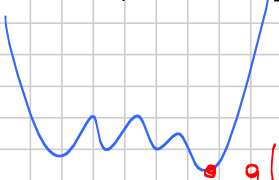
$\rightarrow$ basta studiare $q(x) = \alpha\left(x^{2n} + \dots + x^2 + 1\right) - (\alpha+1)\left(x^{2n-1} + \dots + x\right)$

a) se q soddisfa 2) ok

b) se $\exists\, p$ che soddisfa 1) e 2) allora anche q soddisfa 2)

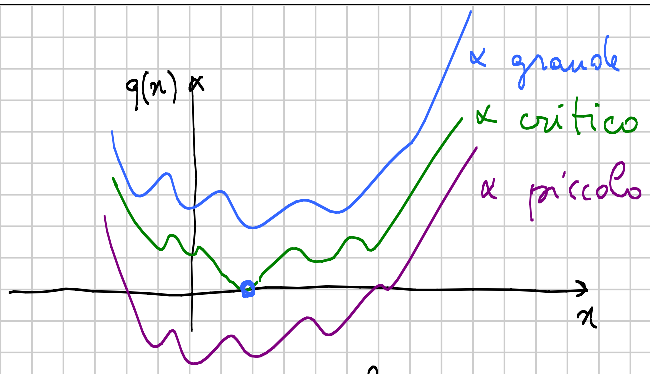
suppongo vera $(*)$ e calcolo $q(\zeta) \qquad \zeta > 0$

$$q(\zeta) = \alpha\left(1+\zeta^2+\dots\right) - (\alpha+1)\left(\zeta+\zeta^3+\dots\right) \le$$
$$\le \left(a_0 + a_2\zeta^2 + \dots\right) - \left(a_1\zeta + a_3\zeta + \dots\right) = 0$$



$q(\zeta) \le 0 \Rightarrow \exists$ radice reale

★ Rovescio la logica: a n fissato cerco gli α per cui esiste p (= per cui q funziona)



hope: una sola radice doppia

q palindromo se ξ è radice, ξ^{-1} pure

La radice doppia potrebbe essere 1

$$q(1) = \alpha(n+1) - (\alpha+1)\cdot n \overset{!}{=} 0 \qquad \alpha = n$$

dovrebbe essere il valore critico

$\boxed{\alpha \leq n \text{ va bene di sicuro}}$

$q_\alpha(x)$ con $\alpha = n$ $\qquad q_n(x) = n(1+x^2+\dots+x^{2n}) - (n+1)(x+\dots+x^{2n-1})$

$$q_n(x) = (x-1)\left(nx^{2n-1} - x^{2n-2} + (n-1)x^{2n-3} - 2x^{2n-4} + (n-2)\dots + x - n\right)$$

$$= (x-1)^2\left(nx^{2n-2} + (n-1)x^{2n-3} + (2n-2)x^{2n-4} + (2n-4)x^{2n-5} + (3n-6)x^{2n-6} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + (n-1)x + n\right)$$

$n \quad n-1 \quad 2n-2 \quad 2n-4 \quad 3n-6 \quad 3n-9 \quad 4n-12 \quad 4n-16$

$kn-k^2+k \quad kn-k^2$

$q_n(x) = (x-1)^2 r(x) \qquad r(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

$$\alpha > n \qquad q_\alpha(x) = \underbrace{q_n(x)}_{\substack{\geq 0 \\ =0\ x=1}} + \underbrace{(\alpha - n)}_{>0}\underbrace{(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2n})}_{= \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}} > 0 \quad \forall x$$

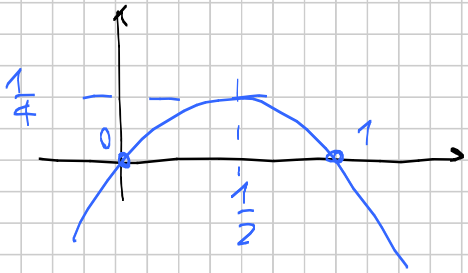
$\geq 0 \quad > 0 \quad x = 1$

$\boxed{A5}$ Per quali $a \in \mathbb{R}$ $\exists f : (0,1] \to \mathbb{R}$ tale che f non costante

$$a + f(x+y-xy) + f(x)f(y) \le f(x) + f(y) \qquad \forall x,y \in (0,1]$$

$x = y = 1$

$$a + f(1) + f(1)^2 \le 2f(1) \qquad a \le f(1)(1-f(1)) \le \frac{1}{4}$$



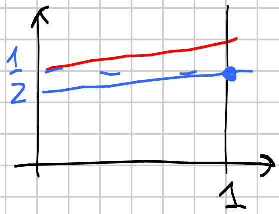
$y = 1$

$$a + \cancel{f(1)} + f(x)f(1) \le f(x) + \cancel{f(1)}$$

$$a \le f(x)[1-f(1)] \qquad \forall x \in (0,1]$$

$$a \le \inf_x f(x)\,[1-f(1)]$$

Cerchiamo f con massimo in 1 e vicina alla $f \equiv \frac{1}{2}$



$$\left(f(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon(x-1)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon x$$

$$a + \frac{1}{2} + \cancel{\varepsilon x} + \cancel{\varepsilon y} - \varepsilon xy + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon y + \varepsilon^2 xy \le 1 + \cancel{\varepsilon x} + \cancel{\varepsilon y}$$

$$a \le \underbrace{\frac{1}{4} - \varepsilon\left(\frac{x+y}{2} - xy\right) - \varepsilon^2 xy}_{\text{cerco il minimo su } [0,1]\times[0,1]} \qquad \forall x,y$$

$(0,0)$ $\frac{1}{4}$ $\qquad$ $(0,1)$ $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$

$(1,1)$ $\frac{1}{4} - \varepsilon^2$

Se $a = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$ con $\varepsilon < \frac{1}{2}$ allora $a \le \underbrace{\qquad\qquad\qquad}$ $\forall x,y$

Quindi $\forall\, a < \frac{1}{4}$ $\exists\, f$ che soddisfa

$2\left(\frac{1}{4} - a\right) = \varepsilon > 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon x$ ecc ecc

Manca $a = \frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(1)(1 - f(1)) = \frac{1}{4} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

$a \leq f(x)(1 - f(1)) \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}$

RPA. $\exists\, x_0 : f(x_0) > \frac{1}{2}$

$h(x) = 1 - f(1-x) \qquad f(x) = 1 - h(1-x)$

$$a + \cancel{1} - h(1 - x - y + xy) + \cancel{1} - h(\cancel{1}-x) - h(\cancel{1}-y) + h(1-x)h(1-y)$$
$$\leq \cancel{2} - h(\cancel{1}-x) - h(1-\cancel{y})$$

$a \leq h((1-x)(1-y)) - h(1-x)h(1-y)$ $\qquad x, y \in [0,1)$

$x = 1 - u$
$y = 1 - v$

$\frac{1}{4} \leq h(uv) - h(u)h(v)$ $\qquad u, v \in (0,1]$

$h(u) \leq \frac{1}{2} \quad \forall u$

RPA $\exists\, u_0 : h(u_0) = \frac{1}{2} - d_0 < \frac{1}{2}$

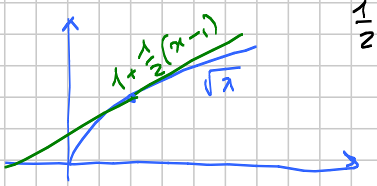
$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

$u = v = \sqrt{u_n}$ $\qquad \frac{1}{4} \leq h(u_n) - h(\sqrt{u_n})^2$

$$h(u_{n+1}) = h(\sqrt{u_n}) \leq \sqrt{h(u_n) - \frac{1}{4}}$$

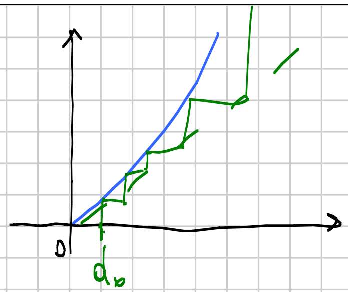
$$d_{n+1} = \frac{1}{2} - h(u_{n+1}) \geq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} - d_n - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - d_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + d_n}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - d_n}} = \frac{2 d_n}{1 + \sqrt{1 - 4 d_n}} \geq \frac{2 d_n}{1 + 1 - 2 d_n} = \frac{d_n}{1 - d_n}$$



$\sqrt{1+y} \leq 1 + \frac{1}{2} y$

$$y = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$$



$$d_{n+1} > d_n$$

$$\frac{d_n}{1-d_n} > \frac{d_n}{1-d_0}$$

$$d_{n+1} > d_n \lambda \qquad \lambda = \frac{1}{1-d_0} > 1$$

$$d_n > \lambda^n d_0$$

$\boxed{A6}$ $a, b, c > 0$, $a+b+c = abc$

$$abc \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1} \geq K \sum_{cyc} \frac{a}{a^2+1}$$

(determinare il max K per cui è vera)

$a=b=c \qquad 3a = a^3 \qquad a = \sqrt{3}$

hope: K si ha con $a=b=c=\sqrt{3}$

Titu: $\sum \frac{a}{x} \geqslant \frac{(\sum \sqrt{a})^2}{\sum x}$

$$\sum \frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1} \geq 3 \sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}} \overset{?}{\geqslant} \frac{K}{abc} \sum \frac{a}{a^2+1}$$

$$abc = \sum a \qquad abc(a^2+1) = a^2(a+b+c) + abc = a(a+b)(a+c)$$

$$\sum \frac{a}{a^2+1} = abc \sum \frac{1}{(a+b)(a+c)} = abc \frac{2\sum a}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2(abc)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$abc(ab+1) = ab(a+b+c) + abc = ab(a+b+2c)$$

$$c(ab+1) = a+b+2c$$

$$abc\prod_c (ab+1) = \prod_c \big(c(ab+1)\big) = \prod_c (a+b+2c)$$

$$= \underbrace{2\sum a^3}_{3} + \underbrace{7\sum_s a^2b}_{6} + \underbrace{16abc}_{1}$$

$$3^3\sqrt{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}\,(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3$$

$$\geq K^3\, 8(abc)^3\Big[2\sum a^3 + 7\sum_s a^2b + 16abc\Big]$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 2abc + \sum_s a^2b \geq 8abc$$

$$(abc)^3 = \Big(\sum a\Big)^3 = \sum a^3 + 3\sum_s a^2b + 6abc$$

$$= \frac{27}{64}\Big[\frac{64}{27}\sum a^3 + \frac{64}{9}\sum_s a^2b + \frac{128}{9}abc\Big]$$

$$\geq \frac{27}{64}\Big[2\sum a^3 + 7\sum_s a^2b + 16abc\Big]$$

bunching

diff : $\displaystyle \frac{10}{27}\sum a^3 + \frac{1}{9}\sum_s a^2b \geq \frac{16}{9}abc$

$$10\sum a^3 + 3\sum_s a^2b \geq 48abc$$

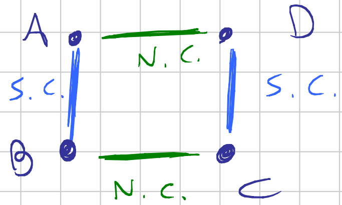
$$\text{LHS} \geq \text{cost}\,(abc)^7 \geq K^3(abc)^2 \geq \text{RHS}$$

$$abc = \sum a \geq 3\sqrt[3]{abc} \qquad (abc)^3 \geq 3^3 abc \qquad abc \geq 3^{3/2}$$

Combinatoria : WC 2016

Titolo nota

C4 n persone ognuna ne conosce almeno un'altra e non ne conosce
″ ″



Scelgo A e C a caso

riesco a completare il quadrato se

(Notaz: $C_M = \{$ persone conosciute da $M\}$)

$C_A \setminus C_C \neq \emptyset$ — In tal caso

$C_C \setminus C_A \neq \emptyset$ — $B \in C_A \setminus C_C$; $D \in C_C \setminus C_A$

Se non ci riesco $\Rightarrow$

wlog $C_C \subseteq C_A$

$\Rightarrow$ posso definire una relazione di "popolarità"

C è meno popolare di A

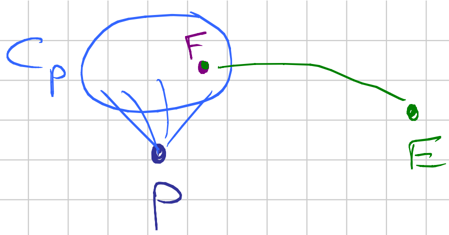
Si verifica che la popolarità

è
- riflessiva
- anti simmetrica (quasi)
- transitiva
- totale

$\Rightarrow$ $\exists$ un P più popolare

Mi chiedo chi è

$U \setminus C_P$



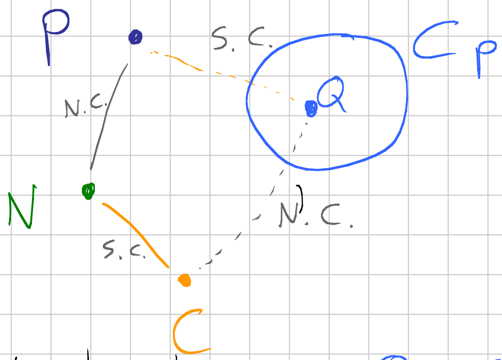
$F \in C_E \subseteq C_P$

$E \in C_F \subseteq C_P$

$\Rightarrow$ Assurdo

Soluzione B

Consideriamo P una persona con $|C_P|$ massima



Mi basta trovare $Q \in C_p$ tale che

C non lo conosce

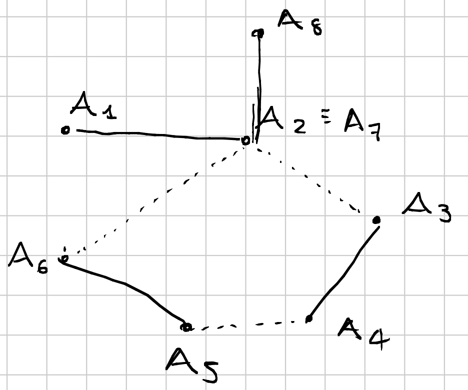
Se per assurdo non lo trovo

stimiamo $|C_c|$

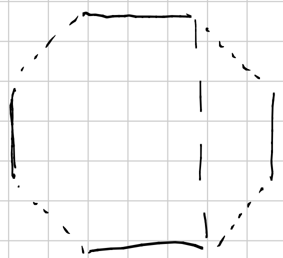
- $C \notin C_p \Rightarrow C_c \supseteq C_p$
  $\qquad \ni N$
  $\Rightarrow |C_c| > |C_p|$

- $C \in C_p \Rightarrow C_c \supseteq C_p \setminus \{C\}$
  $\qquad \ni N$
  $\qquad \ni P$
  $|C_c| > |C_p|$ assurdo

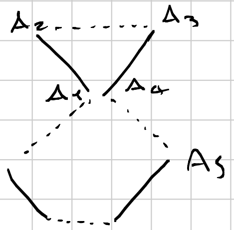
Soluzione C



Se sono fortunato, il ciclo che chiudo è semplice (non si auto-interseca)



Scelgo A_i e lo collego con A_{i+3}. In entrambi i casi, il ciclo si accorcia.



Se $A_1 \equiv A_4$ e $A_2 \equiv A_5$ allora $A_1A_2 = A_4A_5$. Ma se A_1A_2 era una conoscenza, allora A_4A_5 deve essere non conoscenza

PROBLEMA C5

110 squadre

$\forall$ 55 squadre esiste un "campione" che perde al più 4 partite

Tesi: esiste un "campione" generale

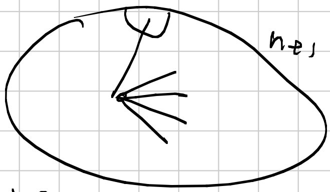
Induzione sull'ipotesi

Supponiamo che $\forall$ n squadre esiste un campione $n \geq 55$

Considero un sottoinsieme grosso $n+1$

Tolgo una squadra e ho un campione

Quindi mal che vada ho una squadra che perde con al più 5



Quindi se tolgo a una a una tutte le squadre, ottengo almeno $\lceil \frac{n+1}{5} \rceil$ "semi-campioni", ma anche 12

Queste 12 squadre giocano tra loro, e fanno 11 partite a testa per un totale di 66 partite, ma ho al più 60 sconfitte.

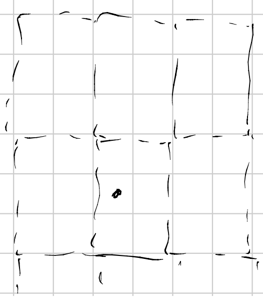
Quindi ho trovato un assurdo.

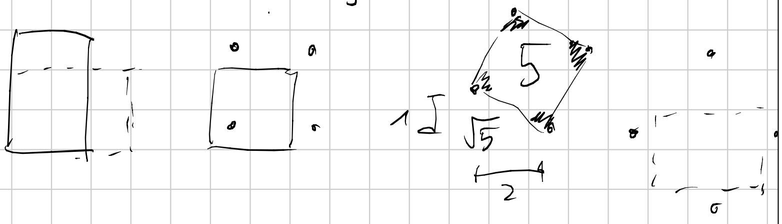
Problema C6

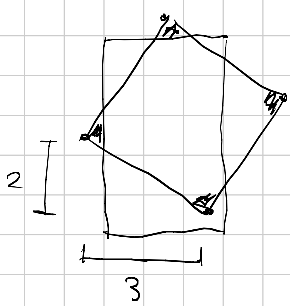
Alcune caselle del piano sono nere, le altre bianche.

$a \le b \le 2a$ interi e sappiamo che in ogni rettangolo $a \times b$ (anche $b \times a$) c'è almeno una casella nera.

$\max \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid$ per ogni colorazione e per ogni $N > 0$ intero esiste (almeno) un quadrato $N \times N$ con αN^2 caselle nere $\}$





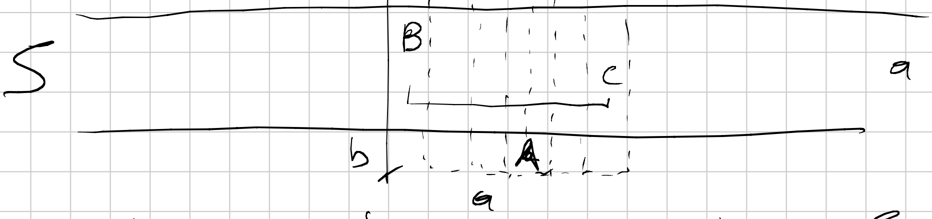


Congettura:
$$\alpha = \frac{1}{a^2 + (b-a)^2}$$

$V = \{$ rettangoli "verticali" $\} \longrightarrow \{$ caselle nere $\} = \mathcal{N}$

$R \longmapsto$ una delle caselle nere più in alto in R

Quanti rettangoli al massimo hanno associata la stessa casella nera?



B = la casella nera più vicina a sinistra in S

C = " " " " destra in S

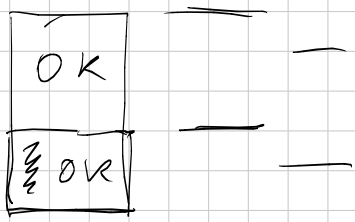
dist. orizz. $B-C \le b$

i rett. verticali contenenti A "spazzano" $2a-1$ colonne

A tutti i rett. vert. che non toccano tutte le righe di S

---

può essere associata A.



$2a-b$ colonne del rettangolo $a\times(b-a)$ in basso non vanno bene.

$$\underbrace{\boxed{a^2+a(b-a)}}_{ab}-(2a-b)(b-a)=$$

$$=2a^2-2ab+b^2=$$

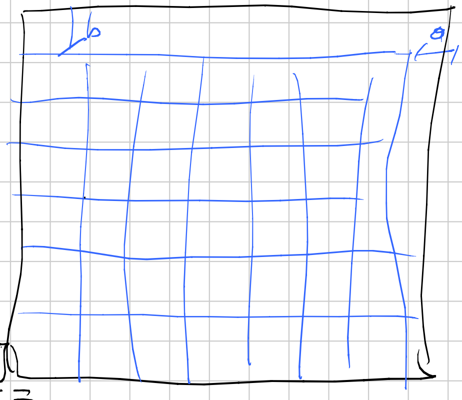
$$=a^2+(a-b)^2=D$$

Sia C una colorazione, $N>0$ e Q un quadrato di lato $(a+b)N^2=K$

(verticali)

Quanti rettangoli contiene interamente Q?

$(K-a)(k-b) > K(K-a-b)$:



Quante caselle nere al minimo in Q?

$$N_C \geqslant \frac{(K-a)(K-b)}{D} > \frac{(a+b)N^2\cdot[(a+b)N^2-a-b]}{D} =$$

$$= \frac{(a+b)^2\cdot N^2(N^2-1)}{D}$$

(disgiunti)

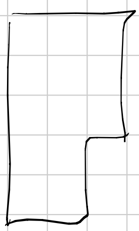
Quanti quadrati $N\times N$ in Q?

$$\left((a+b)N^2\right)^2 / N^2 = (a+b)^2\cdot N^2$$

Quindi esiste almeno un quadrato $N\times N$ con dentro più di

$$\frac{N_C}{(a+b)^2N^2} = \frac{N^2-1}{D} \quad \text{caselle nere}$$

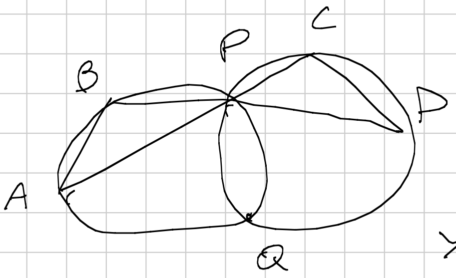
$\Rightarrow$ in quel quadrato $N\times N$ ci sono $\geqslant \frac{N^2}{D} = \alpha N^2$ caselle nere.



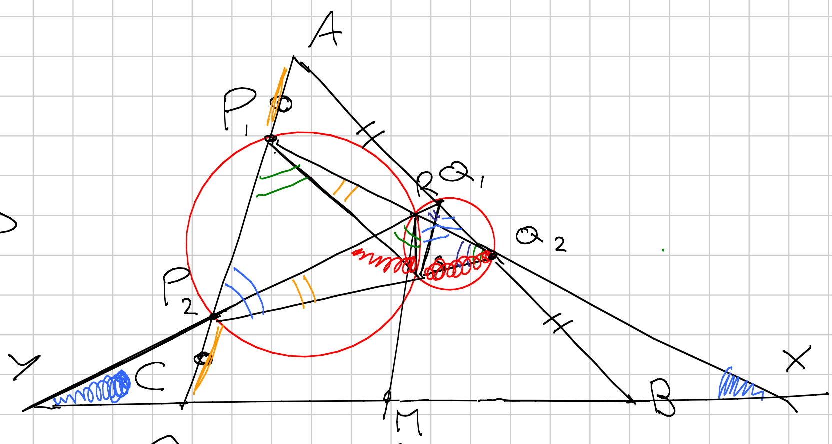
WC 2016 - GEOMETRIA (sintetica)

Titolo nota

Problema 1.



$A \to C$ | $A \to B$
$B \to D$ | $C \to D$

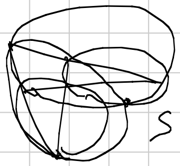


$\widehat{P_2 S Q_1} \sim \widehat{P_1 S Q_2}$

$P_2 S P_1 \sim Q_1 S Q_2$

$P_2 S Q_1 A$

$Q_2 S P_1 A$



$P_2 S P_1 \to Q_1 S Q_2$

$$\frac{P_2 S}{S Q_1} = \frac{\sin \widehat{S Q_1 P_2}}{\sin \widehat{Q_1 P_2 S}}$$

$$\boxed{\boxed{\frac{\sin \widehat{P_2 R S}}{\sin \widehat{S R Q_2}}} = \frac{P_2 S}{P_1 S} = \frac{Q_1 P_2}{P_1 Q_2}}$$

$$\frac{AP_1}{P_1 C} \frac{CX}{XB} \frac{BQ_2}{Q_2 A} = 1$$

$$\frac{AQ_1}{Q_1 B} \frac{BY}{YC} \frac{CP_2}{P_2 A} = 1$$

$$\frac{AP_1}{P_1 C} \cdot \frac{BQ_2}{Q_2 A} = \frac{CP_2}{P_2 A} \frac{AQ_1}{Q_1 B}$$

$$\frac{yC}{yB} = \frac{xB}{xC} \qquad xC = xB + BC$$
$$yB = yC + BC$$

$$\frac{yB}{yC} = \frac{xC}{xB} \iff \frac{yC+BC}{yC} = \frac{xB+BC}{xB}$$

$$\cancel{1} + \frac{BC}{yC} = \cancel{1} + \frac{BC}{xB}$$

M pto medio di xy

T seni:

$$\widehat{xBQ_2} \Rightarrow \frac{xB}{BQ_2} = \frac{\sin \widehat{xQ_2B}}{\sin \widehat{BxQ_2}}$$

$$\widehat{AP_1Q_2} \Rightarrow \frac{P_1Q_2}{P_1A} = \frac{\sin \widehat{P_1AQ_2}}{\sin \widehat{P_1Q_2A}}$$

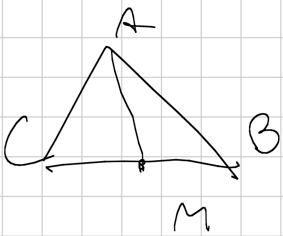
$$\widehat{P_1Q_2A} = \widehat{xQ_2B}$$

$$\frac{\sin \widehat{P_1AQ_2} \cdot P_1A}{P_1Q_2} = \sin \widehat{P_1Q_2A} = \sin \widehat{xQ_2B} = \frac{\sin \widehat{BxQ_2}\, xB}{BQ_2}$$

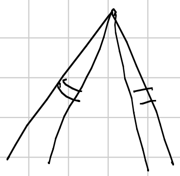
$$\frac{\sin \widehat{Q_1AP_2} \cdot Q_1A}{Q_1P_2} = \frac{\sin \widehat{CYP_2} \cdot YC}{CP_2}$$

$$\frac{\sin \widehat{P_1AQ_2} \cdot \boxed{P_1A} \cdot Q_1P_2}{\sin \widehat{Q_1AP_2} \cdot \boxed{Q_1A} \cdot P_1Q_2} = \frac{\sin \widehat{BXQ_2} \cdot \boxed{XB} \cdot \boxed{CP_2}}{\sin \widehat{CYP_2} \cdot \boxed{YC} \cdot \boxed{BQ_2}}$$

$$\boxed{\frac{\sin \widehat{BXQ_2}}{\sin \widehat{CYP_2}}} = \frac{Q_1P_2}{P_1Q_2} = \boxed{\frac{\widehat{P_2RS}}{\widehat{SRQ_2}}}$$



$$\frac{\sin \widehat{CAM}}{\sin \widehat{MAB}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$



SOLUZIONE ALTERNATIVA

RS e RM sono simmetriche rispetto ad una bisettrice

RP_2Q_2 $\quad a = P_2Q_2 \quad b = RQ_2 \quad c = RP_2$

$\alpha = RQ_1 \quad \cancel{Q_1} = (c+\alpha, -\alpha, 0)$

$\beta = RP_1 \quad P_1 = (b+\beta, 0, -\beta)$

$P_1P_2 : \ x\beta + z(\beta + b) = 0$

$Q_1Q_2 : \ x\alpha + y(c+\alpha) = 0$

$A = \left(-(b+\beta)(c+\alpha), \alpha(b+\beta), \beta(c+\alpha)\right)$

$\sum_A x = \alpha\beta - bc$

$A + B = Q_1 + Q_2$

$B = \left(\beta(c+\alpha)^2, -\alpha\beta(c+\alpha), -c^2(b+\beta)\right)$

$C = (\alpha(b+\beta)^2, -b^2(c+\alpha), -\alpha\beta(b+\beta))$

$M = (b\beta(c+\alpha)^2 + \alpha c(b+\beta)^2, -b(c+\alpha)(\alpha\beta+bc),$
$, -c(b+\beta)(\alpha\beta+bc))$

$RM: zb(c+\alpha) - yc(b+\beta) = 0$

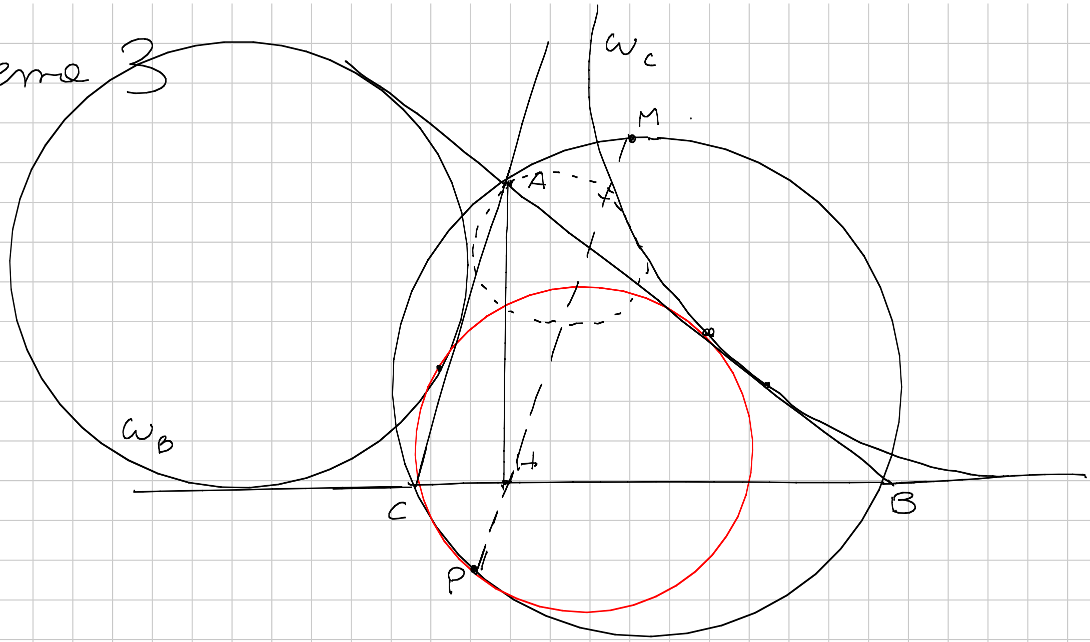
$\sum_{cyc} a^2yz = (x+y+z)(bz)(b+\beta)$

$RS: bz(b+\beta) - cy(c+\alpha) = 0$

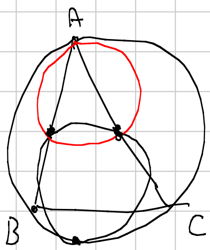
$dz + ey = 0$

$b^2ez + c^2dy = 0$

Problema 3



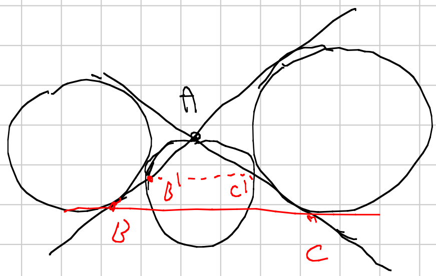
SIMILE NELLO SPIRITO:
(ma non nella soluzione)



Consideriamo la cfr. γ che tange (ABC), ω_B, ω_C (l'altra)

Claim: tange (ABC) in A

parallel tangent LEMMA



γ': passa per A e tange ω_B, ω_C

voglio che γ' tanga (ABC)

se $\gamma' \cap AB, AC = B', C'$

basta che $BC \parallel B'C'$

DIM.: esiste un'inversione + simmetria nella bis. $B\hat{A}C$ che scambia ω_B e ω_C; sia essa φ

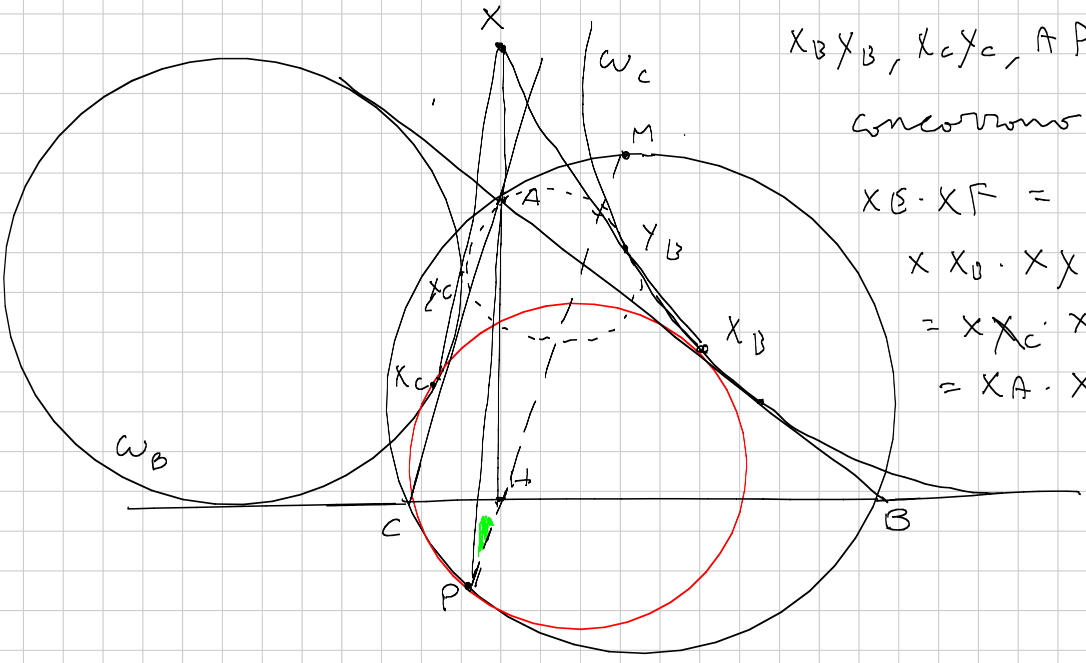
chi è $\varphi(\gamma')$? in una retta tangente a $\varphi(\omega_B)$, $\varphi(\omega_C)$, ovvero ω_B, ω_C

si vede che è BC.

allora $C = \varphi(B')$ e $B = \varphi(C')$

e dunque $AB' \cdot AC = AC' \cdot AB$

$\Rightarrow \dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$ come voluto $\square$



$X_B Y_B$, $X_c Y_c$, AP

concorrono in X

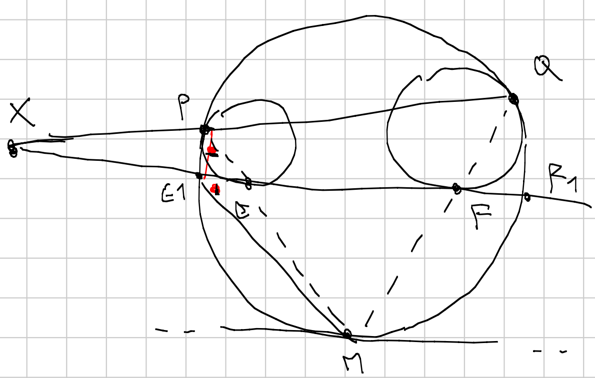
$XE \cdot XF =$

$X X_B \cdot X Y_B$

$= X X_c \cdot X Y_c$

$= XA \cdot XP$

LEMMA (2) :

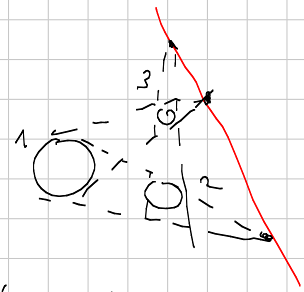


PQFE è ciclico

$M\widehat{E_1}E = E_1\widehat{P}E \Rightarrow ME_1^2 = ME \cdot MP$

$MF_1^2 = MF \cdot MQ$

MONGE :



ex(O_1, O_2)

ex(O_2, O_3) o in(O_2, O_3)

ex(O_1, O_3) in(O_1, O_3)

allineati

□

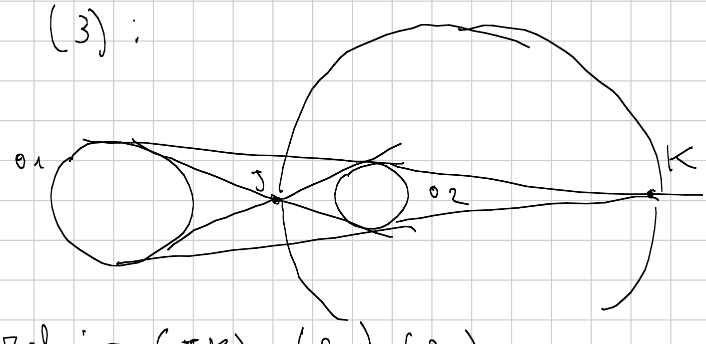
AX_BY_BP, AX_CY_CP sono ciclici

OSS: X sarà il centro radicale di $\omega_B, \omega_C, (ABC)$

in particolare sta sull'asse radicale di ω_B, ω_C

IDEA: costruiamo un cerchio coassiale a ω_B, ω_C che passa per A, P

LEMMA (3):



il cerchio (JK), (O_1), (O_2)

il luogo dei P t.c. $\dfrac{pow_{(O_1)}(P)}{pow_{(O_2)}(P)} = cost.$

è un cerchio coassiale a (O_1), (O_2)

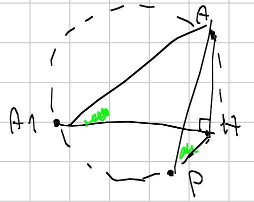
(nel caso $cost. = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$) $\square$

il centro di simm. esterna di ω_B, ω_C appartiene a BC e alla bisettrice esterna di $B\hat{A}C$.

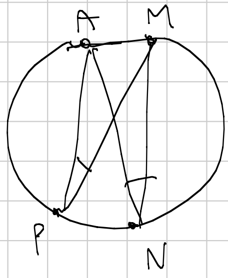
Sia esso A_1. Allora (AA_1), ω_B, ω_C sono coassiali $\Rightarrow P \in (A, A_1)$.

Ma di certo $H \in (A, A_1)$.

$\Rightarrow H\hat{P}A = H\hat{A_1}A$



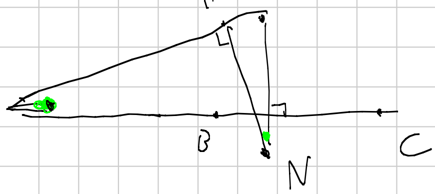
se N è il punto medio dell'arco BC non contenente A, vale $M\hat{P}A = M\hat{N}A$

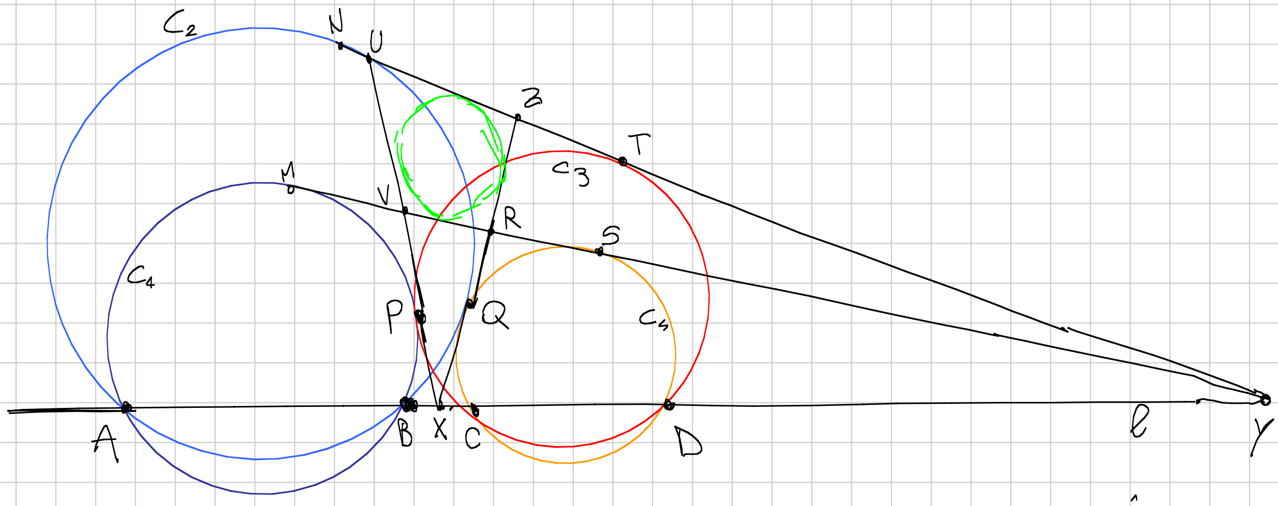


Ma $MN \perp BC$ (è l'asse)

$\Rightarrow M\hat{N}A = H\hat{A_1}A$

$\Rightarrow$ Ts.





$X = \text{tang}(C_1, C_3) \cap \ell$

$\text{pow}_{C_1}(X) = \text{pow}_{C_3}(X)$

$\text{pow}_{C_2}(X) = \text{pow}_{C_1}(X)$

$\text{pow}_{C_3}(X) = \text{pow}_{C_4}(X)$

$\begin{cases} XP = XQ \\ YS = YT \end{cases}$ $\quad Y = \text{tang}(C_2, C_3) \cap \ell$

$XU - UP = XR - RQ$

$YU - UT = YR - RS$

$XU - YU = XR - YR \Rightarrow \boxed{XU + YR = YU + XR}$

Si conclude che ZUVR è circoscrivibile a una circ. dal lemma finale.

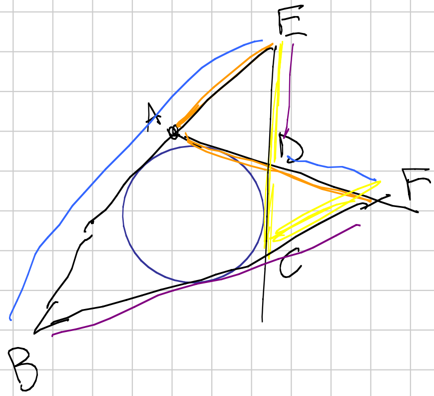
$YZ + ZN = YV + VM$

$XZ - ZQ = XV - VP$

$\boxed{YZ + XZ = YV + XV}$

$ZQ = ZN$

$VP = VM$



$EA + AF = EC + CF \iff$

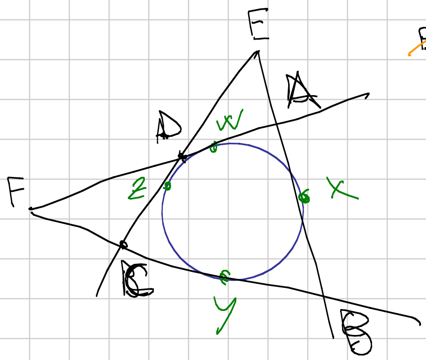
ABCD è circoscrivibile a O

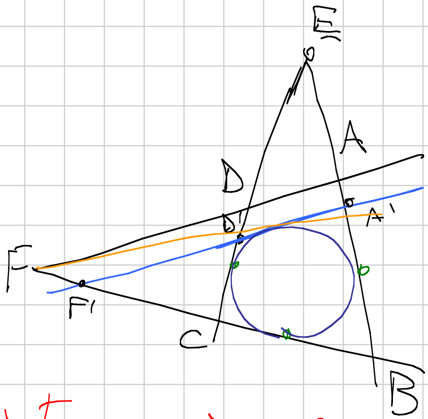
$\Updownarrow$

$EB + DF = DE + BF$

$EA + AF = FC + CE$

$\cancel{EX} - \cancel{XA} + \cancel{AW} + \cancel{WF} = \cancel{FY} - \cancel{YC} + \cancel{CZ} + \cancel{ZE}$





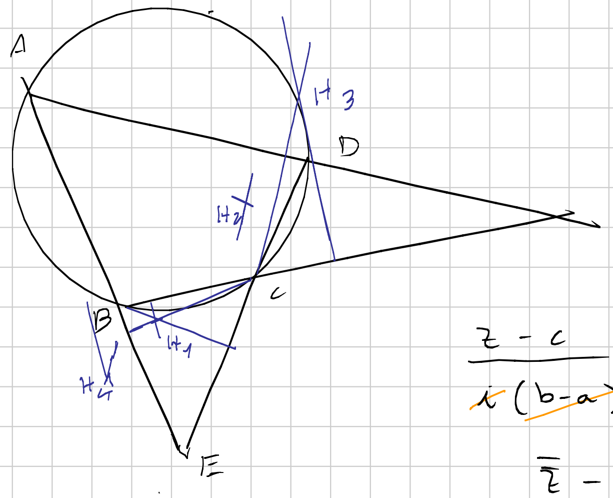
$EA' + A'F' = F'C + CE$

$EA + AF \neq FC + CF$

Non c'è tempo ⇒ esercizio.

Titolo nota

WC2016 - GEOMETRIA (contosa)



$$z = c + i\lambda(b-a)$$

$$\lambda = \frac{z-c}{i(b-a)}$$

$$\frac{z-c}{\cancel{i}\,\cancel{(b-a)}} = \frac{\bar z - \bar c}{-i(\bar b - \bar a)} = \frac{\bar z - \bar c}{-i\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)} = \frac{\bar z - \bar c}{\cancel{i}\,\cancel{(b-a)}}\cdot ab$$

$$r_{CH_1}: z - c = (\bar z - \bar c)\cdot ab \rightsquigarrow \bar z = \frac{z-c}{ab} + \bar c$$

$$r_{BH_1}: z - b = (\bar z - \bar b)\cdot cd$$

$$\frac{z-b}{cd} = \frac{z-c}{ab} + \bar c - \bar b$$

$$abz - ab^2 = cdz - c^2d + ab\,\cancel{c}\,\cancel{\bar c}\,d - a\,\cancel{b}\,\cancel{\bar b}\,cd$$

$$z = \frac{ab^2 - c^2d + abd - acd}{ab - cd} = h_1$$

$$h_2 = \frac{a^2 b - cd^2 + abc - bcd}{ab - cd}$$

$$h_3 = \frac{ad^2 - c^2 b + abd - abc}{ad - bc}$$

$$h_4 = \frac{a^2 d - cb^2 + acd - bcd}{ad - bc}$$

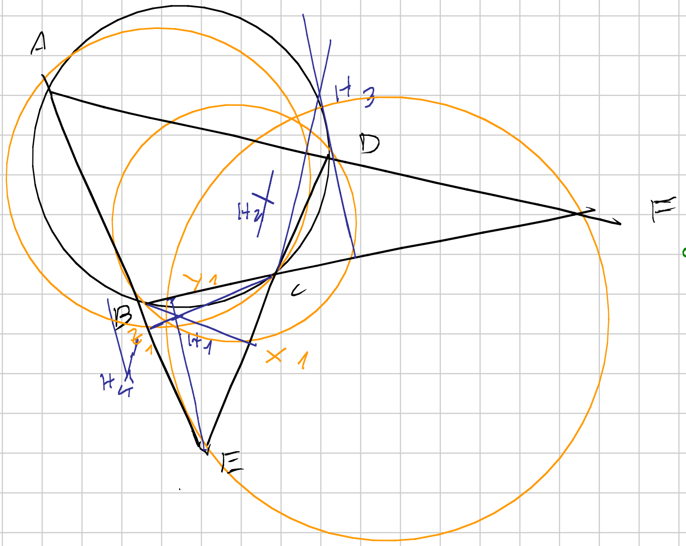
Th : $|h_3 - h_1| = |h_2 - h_4|$

$$(h_3 - h_1)(\bar{h}_3 - \bar{h}_1) = (\text{- - - —.})$$

HOPE $\rightsquigarrow$ $h_3 - h_1 \overset{?}{=} h_2 - h_4$

$$h_3 + h_4 \overset{?}{=} h_1 + h_2$$

$$\frac{(ab-cd)(a+b+c+d)}{(ab-cd)} \qquad \frac{(ad-bc)(a+b+c+d)}{(ad-bc)}$$



PASSO 1

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ di diametro AC, BD, EF

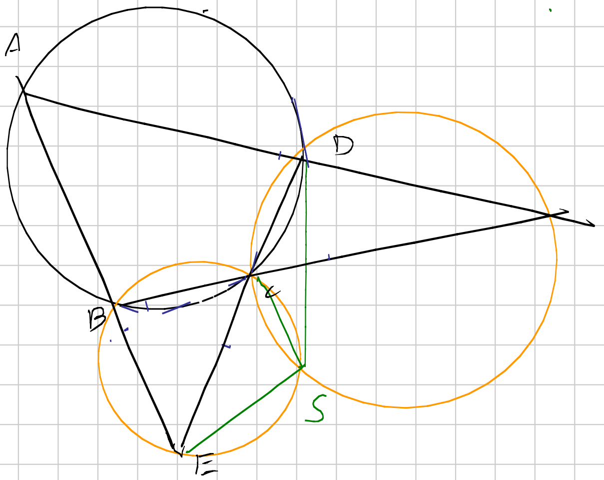
$\Downarrow$

H_1 ha la stessa potenza rispetto a $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$pow_{\omega_3}(H_1) = H_1Y_1 \cdot H_1E$ $\quad pow_{\omega_1}(H_1) = H_1Z_1 \cdot H_1C$

$pow_{\omega_2}(H_1) = H_1B \cdot H_1X_1$

- $H_1\ H_2\ H_3\ H_4 \to$ allineati
- $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \to$ coassiali
- "centri" $\to$ allineati

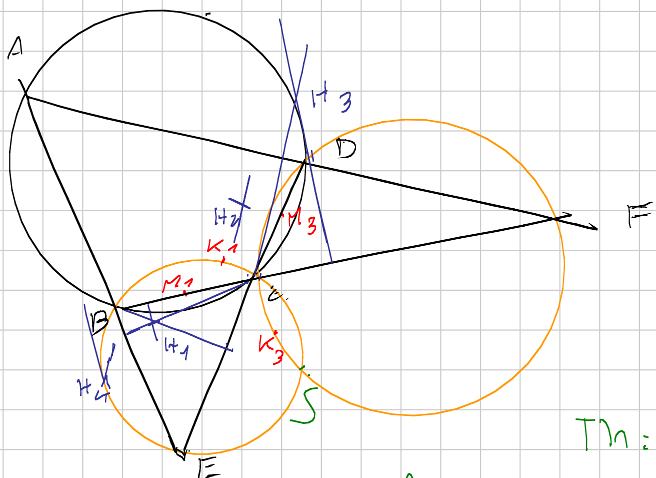


PASSO 2 (Miquel)

(BCE), (CDF), (BFA), (ADE)

↓

concorrono in S



PASSO 3

$M_1 \to$ pt medio di BC

$K_1 \to$ simm di H_1 risp a M_1

M_3, K_3 analoghi

Th: $K_1 K_3 S$ allineati

$$C\hat{S}K_1 = C\hat{B}K_1 = B\hat{C}H_1 = 90 - C\hat{B}E$$

$$C\hat{S}K_3 = \ldots = 90 - C\hat{D}A$$

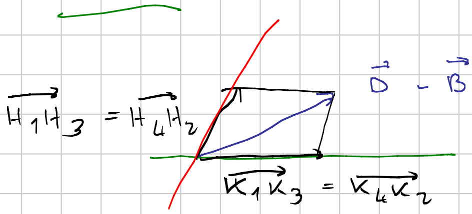
=

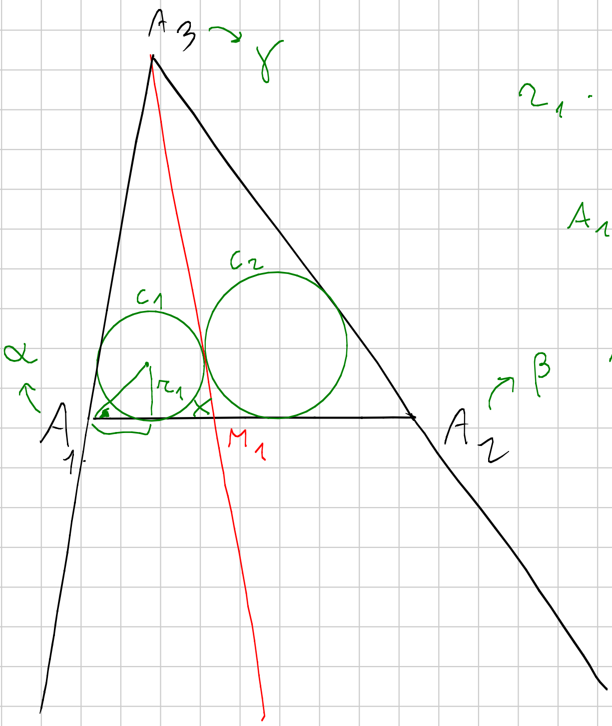
$S\ K_1\ K_2\ K_3\ K_4$ allineati

$$\vec{M_3} - \vec{M_1} = \frac{\vec{H_3} + \vec{K_3}}{2} - \frac{\vec{H_1} + \vec{K_1}}{2} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{H_1H_3}}{2} + \frac{\overrightarrow{K_1K_3}}{2}$$

$$\overrightarrow{H_1H_3} + \overrightarrow{K_1K_3} = \vec{D} - \vec{B} = \overrightarrow{H_4H_2} + \overrightarrow{K_4K_2}$$



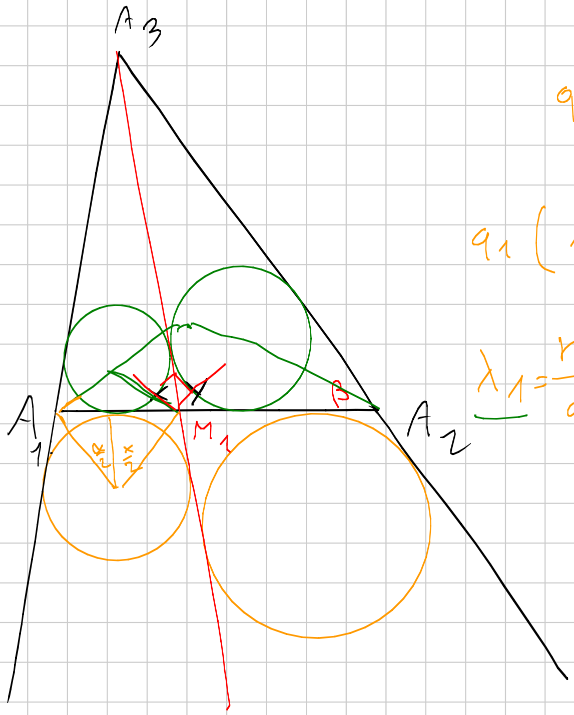


$$r_1 \cdot \cot\frac{\alpha}{2} + r_1 \cdot \cot\frac{x}{2} = A_1M_1$$

$$A_1M_1 = r_1\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{x}{2}\right)$$

$$A_1M_1 = r_1\left(\frac{1}{\underbrace{\tan\frac{\alpha}{2}}_{A=}} + \frac{1}{\underbrace{\tan\frac{x}{2}}_{X}}\right) =$$

$$= r_1\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{X}\right)$$



$$q_1 \cdot tg\frac{\alpha}{2} + q_1 \cdot tg\frac{x}{2} = A_1M_1$$

$$q_1(A+X) = A_1M_1 = r_1\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{X}\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{r_1}{q_1} = \frac{A+X}{\frac{1}{A}+\frac{1}{X}} = A\cdot X$$

$$\lambda_2 = B\cdot Y$$

$$\boxed{tg\frac{X}{2}\cdot tg\frac{Y}{2} = 1}$$

$$\lambda_1\cdot\lambda_2 = A\cdot X\cdot B\cdot Y = A\cdot B = tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2} =$$

$$= \frac{r}{t_3} = S_3$$

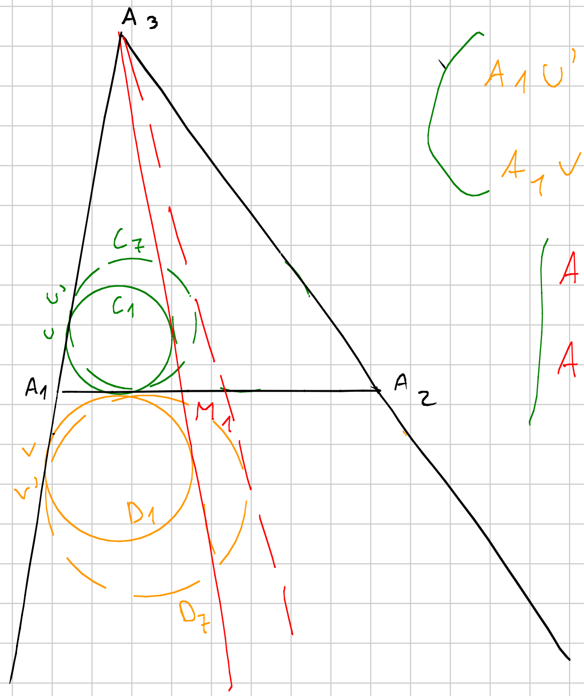
$$\lambda_2 = \frac{S_3}{\lambda_1}$$

$$\lambda_3 = \frac{S_1}{\lambda_2} = \frac{S_1}{S_3}\cdot\lambda_1$$

$$\lambda_4 = \frac{S_2}{\lambda_3} = \frac{S_2\cdot S_3}{S_1}\cdot\frac{1}{\lambda_1}$$

$$\lambda_7 = \frac{S_2\cdot S_3}{S_1}\cdot\frac{1}{\lambda_4}$$

$$\boxed{\lambda_7} = \frac{\cancel{S_2}\cdot\cancel{S_3}}{\cancel{S_1}}\cdot\frac{\cancel{S_1}}{\cancel{S_2}\cdot\cancel{S_3}}\cdot\boxed{\lambda_1}$$



$$\begin{cases} A_1U' > A_1U \\ A_1V' > A_1V \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3U' < A_3U \\ A_3V' > A_3V \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{r_1}{q_1} = \frac{A_3U}{A_3V}$$

$$\lambda_7 = \frac{r_7}{q_7} = \frac{A_3U'}{A_3V'}$$

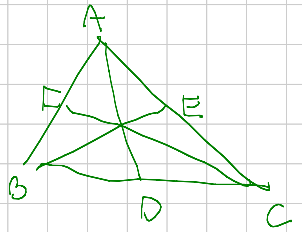
$$A_3U > A_3U'$$

$$A_3V < A_3V'$$

$$\frac{A_3U}{A_3V} > \frac{A_3U'}{A_3V'}$$

ASSURDO

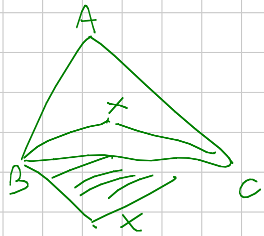
Soluzione esercizio 3



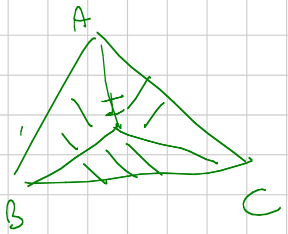
O circocentro
I incentro

Th. $N_{DEF} \in OI$

BARICENTRICHE



$$\left(\frac{[BXC]}{[BAC]} : \frac{[CXA]}{[BAC]} : \frac{[AXB]}{[BAC]} \right) = (\alpha : \beta : \gamma)$$



$I = (a, b, c)$

Es.

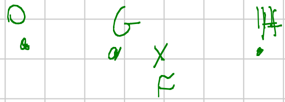
$O = (a^2 S_A, b^2 S_B, c^2 S_C)$

$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ e cicliche

$H = (S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B)$

- Thread from
- Paul Yiu, Introduction to the Geometry of Triangle
- Evan Chen

Problema



Risolviamo il problema

$ON \perp$ asse radicale fra la circoscritta e Feuerbach$_{DEF}$ (r_1)

$OI \perp$ asse radicale fra inscritta e circoscritta (r_2)

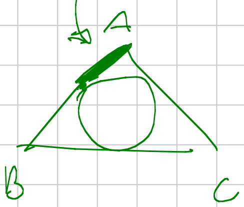
$NGOI \iff r_1 // r_2$

Oss.
Asse radicale fra Γ (circoscritta) e γ (a caso)

$$p\,x + q\,y + r\,z = 0$$

$$\mathrm{Pow}_A\gamma \qquad \mathrm{Pow}_B\gamma \qquad \mathrm{Pow}_C\gamma$$

$p-a \; \left(= \frac{b+c-a}{2}\right)$



Asse radicale fra Γ e inscritta è

$$(p-a)^2 x + (p-b)^2 y + (p-c)^2 z = 0 \qquad (t)$$

$x+y+z=0$ retta all'∞

Oss 2 $\quad px+qy+rz=0$

$\infty = (q-r,\ r-p,\ p-q)$

$\infty_E = ((p-b)^2-(p-c)^2 : cyc)$

$(a(c-b) : cyc)$

Sia $\frac{\alpha}{a}x+\frac{\beta}{b}y+\frac{\gamma}{c}z=0\ (r)$ l'asse radicale fra Γ e Feuerbach

Th: $\infty_E \in (r)$

$$\sum_{cyc}\alpha(c-b)=0$$

L'eq. della cfr in generale è

$$a^2yz+b^2xz+c^2xy+(x+y+z)\left(\frac{\alpha}{a}x+\frac{\beta}{b}y+\frac{\gamma}{c}z\right)=0$$

- $D(0,b,c)$
  $E(a,0,c)$
  $F(a,b,0)$
- $M_{DE}(a(b+c),b(a+2b+c),c(a+b))$
- $M_{EF}(a(2a+b+c),b(a+c),c(a+b))$

  ''
- $a^2bc(a+c)(a+b)+b^2ac(2a+b+c)(a+b)+c^2ab((a+b+c)(a+c))=2(a+b)(a+c)[\alpha(2a+b+c)+\beta(a+c)+\gamma(a+b)]$

$$\alpha(2a+b+c)+\beta(a+c)+\gamma(a+b) = P = \cancel{abc[a(a+c)(a+b) + b(2a+b+c) + c((a+c)(2a}$$

$$\alpha(b+c)+\beta(a+2b+c)+\gamma(a+b) = Q \ (\mathrm{cyc}_{\to} P)$$

$$\alpha(b+c)+\beta(a+c)+\gamma(a+b+2c) = R \ (\mathrm{cyc}_{\to} Q)$$

$$\alpha = \frac{\begin{pmatrix} P & a+c & a+b \\ Q & a+2b+c & a+b \\ R & a+c & a+b+2c \end{pmatrix} \ (*)}{\underbrace{\begin{pmatrix} 2a+b+c & a+c & a+b \\ b+c & a+2b+c & a+b \\ b+c & a+c & a+b+2c \end{pmatrix}}} = \frac{}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

solo sapere che è det è simmetrico in a

$$(*) \ 2[P(b+c)(a+b+c) - Qc(a+c) - Rb(a+b)]$$

$$\beta = \frac{\begin{pmatrix} 2a+b+c & P & a+b \\ b+c & Q & a+b \\ b+c & R & a+b+2c \end{pmatrix}}{4(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2[Q(c+a)(a+b+c)\ldots]}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\mathrm{Th} \iff \sum \alpha(b-c) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc} P(b+c)(b-c)(a+b+c) - Qc(b-c)(a+c) - Rb(b-c)(a+b) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc} P[(b+c)(b-c)(a+b+c) - c(b-c)(a+c) - b(b-c)(a+b)] = 0$$

$$\Updownarrow$$

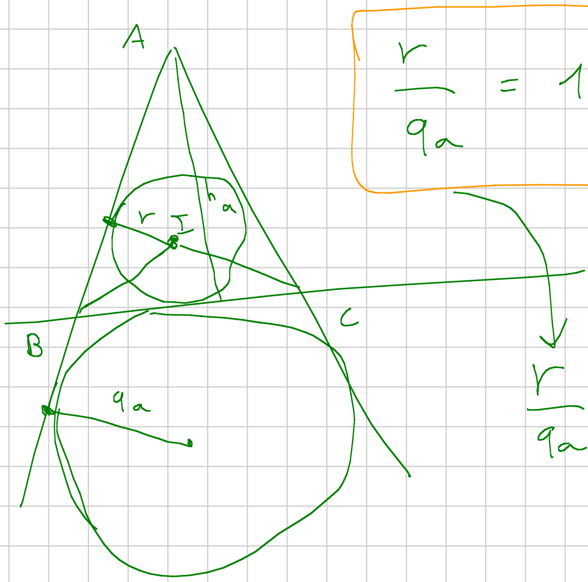
$$\sum_{cyc} p\,(b^2-c^2)(b+c) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc} (b+c)^2(b^2-c^2)\big[a(a+c)(a+b)+b(a+b)(2a+b+c)+c(a+c)(2a+b+c)\big] = 0$$

$$\Updownarrow$$

Vero!

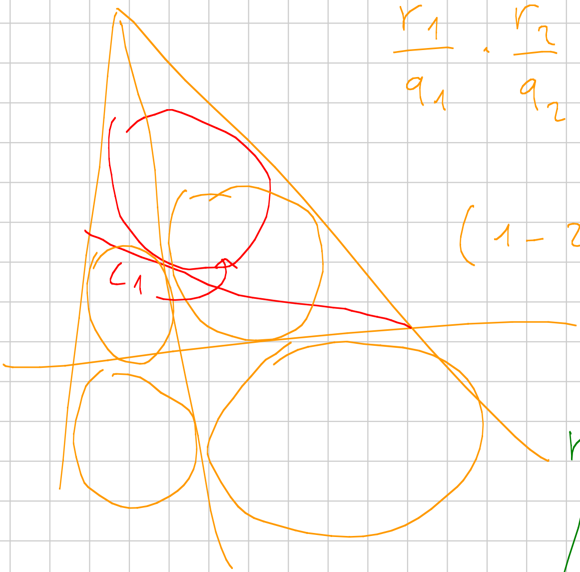


$$\boxed{\frac{r}{q_a} = 1 - 2\frac{r}{h_a}}$$

$$\frac{r}{q_a} = \frac{b+c-a}{b+c+a}$$

$$\frac{r}{h_a} = \frac{[IBC]}{[ABC]} = \frac{ar}{ar+br+cr} = \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{b+c-a}{b+c+a} = 1 - 2\frac{a}{a+b+c}$$



$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{q_a}$$

$$\left(1 - 2\frac{r_1}{h_a}\right)\left(1 - 2\frac{r_2}{h_a}\right) = \left(1 - 2\frac{r}{h_a}\right)$$

$$r_2 = h_a \cdot \frac{r - r_1}{h_a - 2r_1}$$

$$r_3 = h_b \cdot \frac{r - r_2}{h_b - 2r_2} =$$

$$= h_b \, \frac{r_1(h_a - 2r)}{2r_1(h_a - h_b) + h_a(h_b - 2r)}$$

$$r_4 = h_c \cdot \frac{r - r_3}{h_c - 2r_3}$$

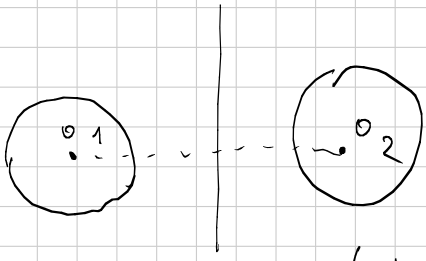
$$r_4 = \frac{h_a h_c (h_b - 2r)(r - r_1)}{h_a h_c (h_b - 2r) + 2r_1\left(h_a h_c + h_b(2r - h_a - h_c)\right)}$$

$r_1 \to r_0 \to r_{-1} \to r_{-2}$

$r_{-2} \overset{?}{=} r_4$ ci basta che r_4 simmetrico h_a, h_c

SOL. ALTERNATIVA 3

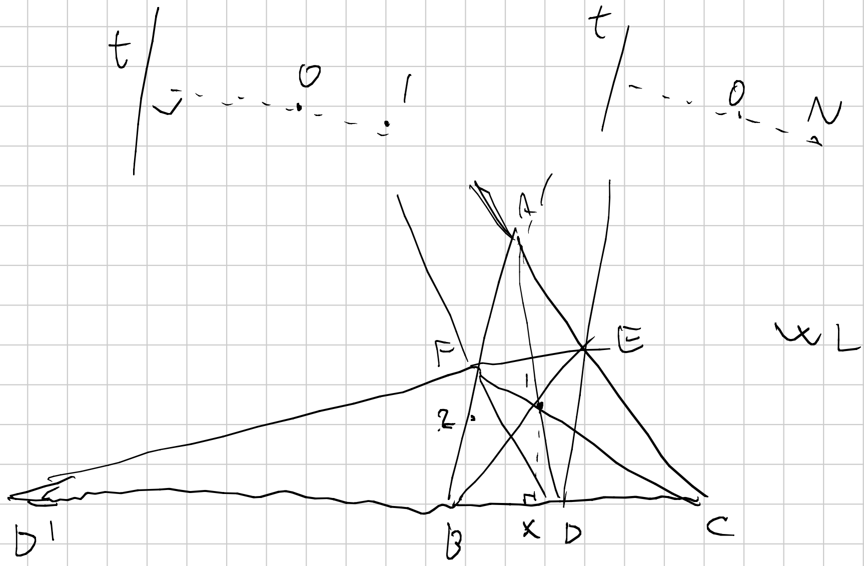
LEMMA:



$P : pow_{(O_1)}(P) - pow_{(O_2)}(P) = cost.$

(la cost. $= 0$ è l'asse rad.)

in GEN. è una retta $\perp$ a $O_1 O_2$



WLOG $b > c$

$$BD' = \frac{ac}{b-c} \quad \text{perché} \quad (B\,C\,D\,D') = -1$$

$$BD = \frac{ac}{b+c}$$

$$\mathrm{pow}_{((O))}(D') = D'B \cdot D'C = \frac{a^2 bc}{(b-c)^2}$$

$$\mathrm{pow}_{((I))}(D') = D'X^2 = \left(\frac{2ac}{2(b-c)} + \frac{(b-c)(a+c-b)}{2(b-c)} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{a(b+c)}{b-c} - (b-c) \right)^2$$

$$\mathrm{pow}_{(C(I))}(D') - \mathrm{pow}_{(\omega)}(D') =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{a^2(b+c)^2}{(b-c)^2} + (b-c)^2 - 2a(b+c) - \frac{4a^2bc}{(b-c)^2}\right)$$

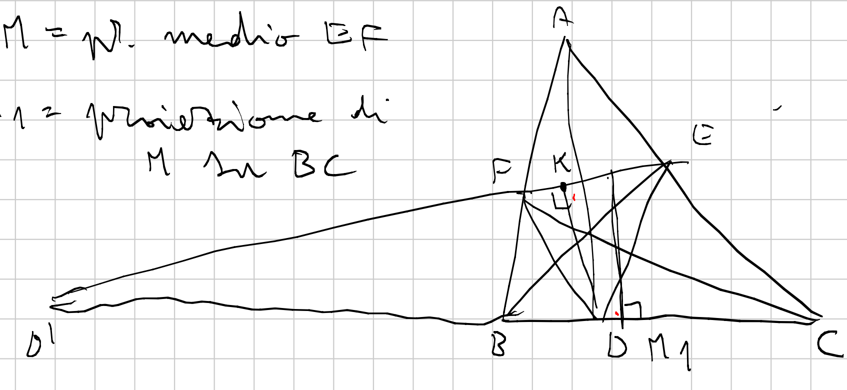
$$= \frac{1}{4}\left(a^2 + (b-c)^2 - 2a(b+c)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca\right)$$

$\Rightarrow$ $\overline{D'E'F'} \perp OI$ per il LEMMA

M = pt. medio EF

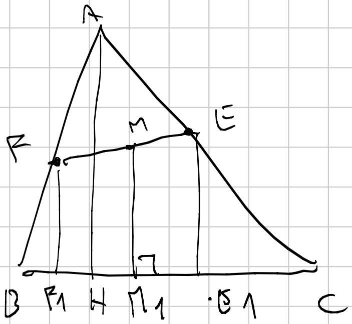
M_1 = proiezione di M su BC



DM_1MK ciclico

$$\Rightarrow D'K \cdot D'M = D'D \cdot D'M_1 = \mathrm{pow}_{(C(N))}(D')$$

$$D'D = BD' + BD = \frac{2abc}{(b+c)(b-c)}$$



$$BM_1 = \frac{BF_1 + BE_1}{2} = \frac{BF_1 + (BC - CE_1)}{2}$$

$$BF_1 = BH \cdot \frac{a}{a+b}$$

perché $\frac{BF_1}{BH} = \frac{BF}{BA} = \frac{a}{a+b}$

$$BH = c \cdot \cos\beta = c \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow \quad BF_1 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2(a+b)}$$

$$BM_1 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{2a(a+c)(a+b)}{2(a+c)(a+b)}}_{a} + \underbrace{\frac{(a+c)(a^2+c^2-b^2) - (a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2(a+c)(a+b)}}_{\sim\, BF_1 - CE_1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sim + \frac{(b-c)(a+b+c)^2}{2(a+c)(a+b)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad D'M_1 = D'B + BM_1 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2a(a+c)(a+b)}{2(a+c)(a+b)} + \frac{(b-c)(a+b+c)^2}{2(a+c)(a+b)} \right) + \frac{ac}{b-c}$$

$$D'M_1 \cdot D'D = \frac{abc\left((b-c)\left(2a(a+c)(a+b)+(b-c)(a+b+c)^2\right)\right)}{2(a+c)(a+b)(b+c)(b-c)^2}$$

$$+ \frac{abc}{\sim\sim}\left(4ac(a+c)(a+b)\right)$$

$$= \frac{abc}{\sim\sim}\left(2a(a+b)(a+c)(a+b) + (b-c)^2(a+b+c)^2\right)$$

$$\mathrm{Pow}_{(C(N))}(D') - \mathrm{Pow}_{(C(O))}(D') =$$

$$= \frac{abc}{2(a+c)(a+b)(b+c)(b-c)^2}\left[\sim\sim - 2a(a+c)(a+b)(b+c)\right]$$

$$= \frac{abc(a+b+c)^2}{2(a+c)(a+b)(b+c)}$$

$\Rightarrow \overline{D'E'F'} \perp ON \Rightarrow O, I, N$ allineati.

Titolo nota

WC 2016 TdN

N4

- $f(n)$ CHE VALORI ASSUME mod p?

$p \mid ab \rightarrow p \mid a \lor p \mid b$

$f(n)^2 - f(n) \equiv 0\ (p) \rightarrow f(n) \equiv 0\ (p) \lor$
$f(n) - 1 \equiv 0\ (p)$

$f(n) \equiv 0\ (p) \lor f(n) \equiv 1\ (p)$

$f(0) \equiv 0\ (p) \quad f(1) \equiv 1\ (p)$

LEMMA $\displaystyle\sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv 0\ (p) \Leftrightarrow p-1 \nmid k$

$k \geq 1$ $\equiv -1\ (p)$ ALTRIMENTI

ESISTE UN GENERATORE mod p

$\exists\, g \mid \operatorname{ord}_p(g) = p-1$.

$g^k \not\equiv 1\ (p) \quad \forall\, 1 \leq k \leq p-2$

$x \mapsto g \cdot x$ $\quad a \to g \cdot a$

$b \to g \cdot b$

SE $g \cdot a \equiv g \cdot b\ (p)$ $\quad p \mid g(a-b)$ $\quad p \nmid g$

$a \equiv b\ (p)$

$1 \leq k \leq p-2$ $\quad \displaystyle\sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv \sum_{x=0}^{p-1} (gx)^k \quad (p)$

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv g^k \sum_{x=0}^{p-1} x^k \quad (p)$$

$$g^k \not\equiv 1 \ (p)$$

$$(\underbrace{g^k - 1}_{\not\equiv 0}) \left(\sum_{x=0}^{p-1} x^k \right) \equiv 0 \ (p)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv 0 \ (p)$$

$p-1 \mid k \Rightarrow x^k \equiv 1$ se $(x,p)=1$

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv p-1 \ (p)$$

PER FERMAT $x^{p-1} \equiv 1 (p)$ SE $(x,p)=1$

$x^{k+p-1} \equiv x^k \ (p)$ PER $k \geq 1$

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv 0\ (p) \quad \text{SE} \quad 1 \le k \le p-2$$

$$|||$$

POSSO SOSTITUIRLO mod p

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^{k+p-1} \equiv \sum_{x=0}^{p-1} x^k \equiv 0\ (p)$$

IN GENERALE: $\displaystyle\sum_{x=0}^{p-1} x^{n(p-1)+k} \equiv 0\ (p)$

CON $p-1 \nmid k$.

$$\sum_{x=0}^{p-1} f(x) \quad (p)$$

SUPPONIAMO $\deg f < p-1$

$$f(x) = a_{p-2} x^{p-2} + a_{p-3} x^{p-3} + \dots + a_0$$

$$\sum_{x=0}^{p-1} f(x) = \sum_{x=0}^{p-1} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{p-2} a_i x^i \Big) + \sum_{x=0}^{p-1} a_0}_{f(x)} \ (p)$$

$$\sum_{i=1}^{p-2} \Big(\underbrace{\sum_{x=0}^{p-1} a_i x^i}_{\text{LEMMA}} \Big) + \sum_{x=0}^{p-1} a_0$$

DATO CHE $i \leq p-2$

SE $i \geq 1$ ALLORA

$$\sum_{x=0}^{p-1} a_i x^i \equiv 0 \ (p)$$

$$\sum_{i=1}^{p-2} (p) \swarrow \text{LEMMA} + \sum_{i=0}^{0} \Big(\sum_{x=0}^{p-1} a_0 \Big)$$

$\hookrightarrow p \cdot a_0 \equiv 0 \ (p)$

$$\equiv 0 \ (p)$$

CONCLUSIONE: $\displaystyle\sum_{x=0}^{p-1} f(x) \equiv 0 \ (p)$

$f(x) \equiv 0 \vee f(x) \equiv 1 \ (p) \quad \forall x$

$f(0) = 0, \ f(1) = 1. \qquad \bar{F} \equiv f \ (p)$

$\bar{F}(x)$

$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(p-1) \leq 0 +$

$f(1) + \ldots + f(p-1) \leq p-1$

b VALORI $\equiv 1 \ (p) \qquad 1 \leq b \leq p-1$

$0 \equiv \sum_{x=0}^{p-1} f(x) \equiv b \ (p)$ SE $\deg p < p-1$

ASSURDO!

$b \not\equiv 0 \ (p)$

PERCIÒ $\deg f \geq p-1$.

UN ESEMPIO: $f(x) = x^{p-1}$

PER FERMAT $\equiv 0, 1 \ (p)$

N 6

IDEA: CONSIDERIAMO X TALE CHE $ord_p(x) = q$ CON q PRIMO GRANDE.

LEMMINO: $\forall q$ PRIMO ESISTONO INFINITI PRIMI $p \equiv 1 \ (q)$.

OSSERVAZIONE:

SE $p \mid 1 + x + x^2 + \dots + x^{q-1} \rightarrow p = q$ OPPURE $q \mid p - 1$.

$$(x^q - 1) = (x - 1)(1 + x + \dots + x^{q-1})$$

SE $p \mid 1 + x + \dots + x^{q-1} \rightarrow x^q \equiv 1 \ (p)$

ORA:

IN GENERALE SE $x^n \equiv 1\ (p)$ $\mathrm{ord}_p(x) \mid n$

- $\mathrm{ord}_p(x) \mid p-1$
- $\mathrm{ord}_p(x) \mid q$ $\left\langle \begin{array}{l} \mathrm{ord}_p(x) = q \to q \mid p-1 \\ \mathrm{ord}_p(x) = 1 \to x \equiv 1\ (p) \end{array} \right.$

$\overset{\text{ord}}{\downarrow}$

$x^1 \equiv 1\ (p) \to x \equiv 1\ (p)$

$p \mid 1 + x + \dots + x^{q-1} \to p \mid q \to p = q$

SUPPONIAMO ESISTA UN NUMERO FINITO DI PRIMI $\equiv 1\ (q)$ (OPPURE ZERO)

E CONSIDERIAMO: $S = \left(\prod_{p \equiv 1 (q)} p\right) \cdot q$

OPPURE $S = q$ SE NON CI SONO $p \equiv 1\ (q)$

$1+s+s^2+s^3+\ldots+s^{q-1} > 1$

PERCHÉ $s \geq q$.

HA DEI FATTORI PRIMI. PONIAMO p UNO DI ESSI

MA:

– SE $p \mid s \Rightarrow p \nmid 1+s+\ldots+s^{q-1}$

$s \equiv 0\ (p) \Rightarrow 1+s+\ldots+s^{q-1} \equiv 1\ (p)$

– SE $p \nmid s$: ALLORA $p = q$ OPPURE

$p \equiv 1\ (q)$.

ASSURDO! p DIVIDEREBBE s.

PRENDIAMO $p \equiv 1\ (q)$ E SIA α UN ELEMENTO DI ORDINE q MOD p.

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE α È LIBERO DA p PER $p > C$ DOVE C È COSTANTE

$$\alpha^q - 1 \equiv 0 \ (p)$$

SUPPONIAMO PER ASSURDO ESISTANO i, j, k TALI CHE $p \mid \alpha^i + \alpha^j - \alpha^k$

$$\alpha^i + \alpha^j \equiv \alpha^k \ (p)$$

SUPPONIAMO $i \leq j$

$$\alpha^i (1 + \alpha^{j-i}) \equiv \alpha^k \ (p)$$

ELEVIAMO ALLA q.

$$\underbrace{\alpha^{iq}}_{\equiv 1} (1 + \alpha^{j-i})^q \equiv \underbrace{\alpha^{kq}}_{\equiv 1} \ (p)$$

$\alpha^q \equiv 1 (p)$

$$(1+\alpha^{J-i})^q \equiv 1 \ (p)$$

VOGLIAMO SUPPORRE $0 \le J-i \le q-1$.

$\alpha^{J-i} \equiv \alpha^{J-i-q}$ PERCHÉ $\alpha^{-q} \equiv (\alpha^q)^{-1} \equiv 1 (p)$

QUINDI SE $J-i \geq q$, ALLORA $\alpha^{J-i} \equiv \alpha^{J-i-q} \ (p)$. A $J-i$ POSSO TOGLIERE q.

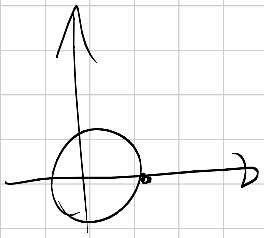
PERCIÒ PONIAMO $J-i = n$ CON $0 \le n \le q-1$.

$$\alpha^q - 1 \equiv 0 \ (p)$$

$$(\alpha^n+1)^q - 1 \equiv 0 \ (p)$$ CON $0 \le N \le q-1$

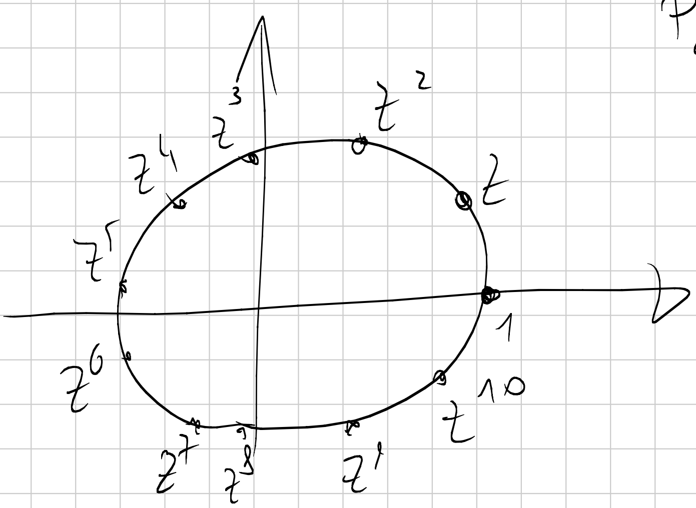
$x^q - 1$ E $(x^N + 1)^q - 1$ NON HANNO RADICI COMUNI IN $\mathbb{C}$.

SUPPONIAMO: $\begin{cases} z^q - 1 = 0 \rightarrow |z| = 1 \\ (z^N + 1)^q - 1 = 0 \rightarrow |z^N + 1| = 1 \end{cases}$

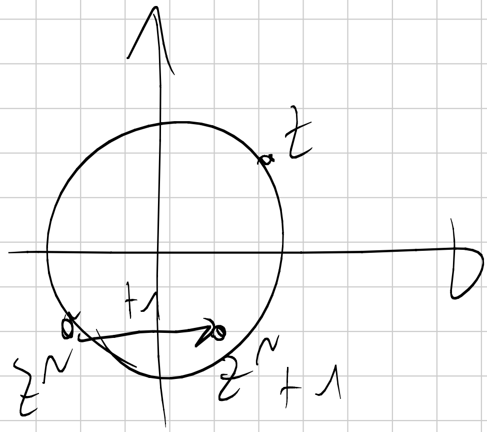


z^N DOVE STA?

PER $q = 11$



z^N SARÀ IN UNO DI QUESTI VERTICI.



$$a+ib$$

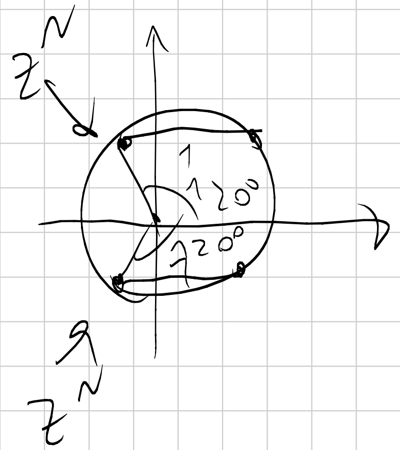
$$a^2+b^2=1$$

$$(a+1)+ib \rightarrow$$

$$(a+1)^2+b^2=1$$

$$a^2=(a+1)^2 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$z^3=1$$

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$$

$$\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$$

$(z^N)^3 = 1$ MA $z^q = 1$.

ORA: SE $q > 3$ E $N < q$ ALLORA

q E $3N$ SONO COPRIMI.

$3 < q$, $N < q \Rightarrow (3N, q) = 1$

$N \neq 0$.

$z^{3N} = 1 \quad z^q = 1$

$\exists\, a, b \quad 3Na - bq = 1$

$$1 = \frac{(z^{3N})^a}{(z^q)^b} = z^{\overset{1}{3Na - qb}} = z$$

$1^q - 1 = 0$ ✓

$(1^n + 1)^q - 1 = 0$ ✗

$N=0$ $\begin{cases} x^q-1=0 \\ 2^q-1=0 \end{cases}$ NO SOLUZIONE

PERCIÒ x^q-1 E $(x^N+1)^q-1$ SONO COPRIMI $\forall\, 0\leq N\leq q-1$.

QUINDI ESISTONO PER BÉZOUT

POLINOMI A COEFFICIENTI INTERI $f_n(x)$ E $g_n(x)$ TALI CHE

$$f_n(x)\,(x^q-1)+g_n(x)\left((x^n+1)^q-1\right)=C_n$$

CON C_n INTERO POSITIVO

PERCIÒ VALUTANDO IN α:

$$f_n(x)\,(x^q-1)+g_n(x)\left((x^n+1)^q-1\right)=C_n$$

$p \mid x^q-1$, $p \mid (x^n+1)^q-1 \to p \mid C_n$.

PERCIÒ $p \le C_n$

ALLORA, DATO I C_n NON DIPENDONO DA p MA SOLO DA q, IN PARTICOLARE $\max\{C_0, C_1, \dots, C_{q-1}\}$ DIPENDE SOLO

DA q. MA $p \le \max\{C_0, \dots, C_{q-1}\}$

n E q NON DIPENDONO DA p PERCHÉ

$$0 \le n \le q-1$$

ASSURDO! MI BASTA PRENDERE $p > \max$

$\boxed{N5}$ Idea fondamentale:

$$n = (p_1 p_2 \cdots p_k)^A$$

$$m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k} \qquad b_i < A$$

$$\phi(n) \longleftrightarrow \phi\left(\frac{n}{m}\right)$$

Qual è la relazione?

$$\phi(n) = (p_1 p_2 \cdots p_k)^{A-1} (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)$$

$$\frac{n}{m} = p_1^{A-b_1} \cdots p_k^{A-b_k}$$

$$\phi\left(\frac{n}{m}\right) = p_1^{A-b_1-1} \cdots p_k^{A-b_k-1} (p_1-1) \cdots (p_k-1)$$

$$\phi\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\phi(n)}{m}$$

Secondo passo.

$$n = (p_1 \cdots p_k)^A$$

Altro primo: $q \neq p_1, \ldots, p_k$

tale che $q-1$ sia "del tipo precedente"

$$q - 1 = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$$

$$\phi\left(\frac{n}{q-1}q\right) = \phi\left(\frac{n}{q-1}\right)\phi(q)$$

$$= \frac{\phi(n)}{q-1}\cdot(q-1) = \phi(n)$$

x abbastanza grande:

Voglio che siano almeno 2016 numeri primi q

$$x < q < 2x$$

$\{p_1, \ldots, p_k\}$ = numeri primi $< x$

$$n = (p_1 \cdots p_k)^A$$

con A abbastanza grande:
tutti i numeri $< x$ sono divisori di n.

$$\frac{n}{q-1}\cdot q$$

Poiché $\frac{q-1}{2} < x$ $q-1$ ha solo fattori primi $< x$

Uso la formula

$$\phi\left(\frac{n}{q-1}q\right) = \frac{\phi(n)}{q-1}\cdot(q-1) = \phi(n)$$

$$S = \{11, 13, 17, 19, 29, 31, 37, 41, 43, 61, 71\}$$

$$|S| = 11 \qquad 2^{11} > 2016$$

$$n = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^{A}$$

$$n \rightarrow n \prod_{q \in T} \frac{q}{q-1}$$

$$T \subseteq S$$

WC 2016 — MISCELLANEA

Titolo nota 27/01/2016

M3 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(n+f(m)) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2000$

$$f(n+\underbrace{f(m)}_{a}) = f(n) + \underbrace{f(3m) - f(m) + 2000}_{b}$$

In generale: $f(n+a) = f(n) + b \rightsquigarrow f(ka) = f(0) + kb \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
(induzione avanti e indietro)

Brutalmente: f sulla succ. ka va all'infinito come $f(x) \sim \frac{b}{a} x$

$\rightsquigarrow$ Fisso $m_1 \rightsquigarrow$ ottengo a_1 e b_1
Fisso $m_2 \rightsquigarrow$ " a_2 e b_2 $\quad \rightsquigarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = c$

$\rightsquigarrow$ fatto su tutti gli $m \rightsquigarrow \boxed{f(3m) - f(m) + 2000 = c\, f(m)}$

Uso la relazione con a_1 e b_1 $\quad f(ka_1) = f(0) + kb_1 \quad k = a_2$
a_2 e b_2 $\quad f(ka_2) = f(0) + kb_2 \quad k = a_1$

$a_2 b_1 = a_1 b_2 \rightsquigarrow$ se posso dividere ottengo $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = c \in \mathbb{Q}$

Devo poter dividere.. Pongo $c = \frac{b_1}{a_1}$ e voglio dim. che $b_2 = ca_2$

A meno di cambiare c sappiamo che $\boxed{f(3m) = (c+1) f(m) - 2000}$

$$f(n+f(m)) = f(n) + c\, f(m)$$

2ª parentesi $\quad f(3m) = \alpha f(m) - 2000 \rightsquigarrow$

$$f(3^k m) = \alpha^k f(m) - 2000 \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1}$$

Mettiamo anche che $\alpha = 3 \rightsquigarrow \boxed{f(n+f(m)) = f(n) + 2f(m)}$

Tutte le funzioni $f(x) = 2x+b$ risolvono, ma NON sono le uniche

$\boxed{n=0}$ $\quad f(f(m)) = f(0) + 2f(m) \rightsquigarrow f(x) = 2x + f(0) \quad \forall x \in \mathrm{Im}$
$n = f(k) \rightsquigarrow f(f(k) + f(m)) = 2f(k) + 2f(m) + f(0) \quad f(x) = 2x + f(0)$
$\forall x \in \mathrm{Im} + \mathrm{Im}$

Ci sono soluzioni non rette, ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \text{ è pari} \\ 2x+6 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

Conclusione: serve interazione tra

$$f(3^k m) = \alpha^k f(m) - 2000\,\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1} \qquad \text{e}$$

$$f(m + f(m)) = f(m) + (\alpha-1) f(m) \rightsquigarrow f(m + k f(m)) = f(m) + (\alpha-1) k f(m)$$

$$f(3^k m) = f(3^k m - m + m) = f(m + \underbrace{(3^k-1)m}_{\text{se fosse multiplo di un qualche } f(m)})$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$\boxed{\alpha^k f(m) - 2000\,\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}} \qquad\qquad = \boxed{f(m) + (\alpha-1)(3^k-1)m}$$

Come concludo: scelgo n quasi a caso, e poi scelgo k in modo tale che

$$(3^k-1) \text{ sia multiplo di } f(n)$$

Questo è possibile purché $f(n)$ non sia multiplo di 3.

Procedura diretta:

→ scelgo n t.c. $3 \nmid f(n)$

→ scelgo k t.c. (3^k-1) è multiplo di $f(n)$

→ con progressioni aritm. e geom. trovo $f(x) = Ax + B \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

→ sostituisco e trovo A e B $\quad f(x) = 2x + 1000$.

(41) $P(n)$ = più grande primo di n

$$P(n^4+n^2+1) = P((n+1)^4+(n+1)^2+1)$$

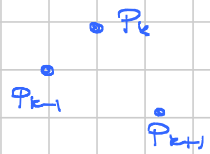
Fattorizzazione !! $n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)\underbrace{(n^2-n+1)}_{(n-1)^2+(n-1)+1}$

$P_k = P(k^2+k+1)$

$$P_{k^2} = \max\{P_k, P_{k-1}\}$$
$$P_{(k+1)^2} = \max\{P_{k+1}, P_k\}$$

Se per caso fosse $P_k \geq P_{k-1}$ e $P_k \geq P_{k+1}$, allora k è ok

Mi servono ∞ pti di "massimo locale" per P_k



Basta escludere che P_k sia
- definitiv. strett. decrescente (assurdo)
- " " crescente (assurdo perché $P_{k^2} = \max\{P_k, P_{k-1}\}$)

(a) $(a^2+1)((a+1)^2+1) = ((a^2+a+1)^2+1)$ e la conclusione è la stessa

$P_k = P(k^2+1)$ e come prima.

<u>Soluz. alternative</u>

① $(a^2+1) = 2(b^2+1) \rightsquigarrow$ Pell $a^2-2b^2=1$

Sia p il massimo primo $x^2+1\equiv 0 \pmod p$
ha soluzioni perché $p\equiv 1 \pmod 4$ per i soliti motivi
Ha 2 soluzioni minori di p. Dette x e y queste soluz. per forza

$$P(x^2+1) = P(y^2+1) = p$$

Se fosse $\{x,y\} = \{a,b\}$, allora $a+b = x+y = p$

Quindi ok se la Pell ha ∞ soluzioni con $a+b$ non primo.
(si può anche con $a+b$ multiplo di 5)

$a^2-2b^2=1$ $\qquad (3+2\sqrt{2})^k(3-2\sqrt{2})^k=1$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ (a_k+b_k\sqrt{2})(a_k-b_k\sqrt{2}) \end{array}$$

$a_{k+1} = \dots a_k + \dots b_k$

$b_{k+1} = \dots b_k + \dots a_k$

② $p\equiv 1 \ (4)$ $\qquad x^2+1 \equiv y^2+1 \equiv 0 \ (p) \qquad 0<x<y<p$

$P(x^2+1) = P(y^2+1) = p$ $\qquad$ spero che $P((p+x)^2+1) \overset{?}{=} p$

Sia $q = P((p+x)^2+1)$ vorrei tanto che $\boxed{p+x<q}$

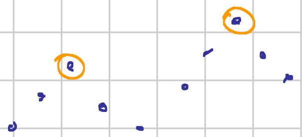
Se fosse vero, allora

$$(p+x)^2+1 \geq 2pq > 2p(p+x)$$
$$\cancel{p^2}+\cancel{2px}+x^2+1 > \cancel{2}p^2+\cancel{2px} \qquad \text{Assurda}$$

Considero $p+x-q$. Questo è $<x$. Se è negativo, allora ok.
Se è positivo, allora

$$(p+x-q)^2+1 \equiv 0 \mod q$$

Allora .... Ad ogni x pari associo $P(x^2+1)$ Questa successione assume infiniti valori. Prendo x in maniera tale che $P(x)$ sia massimo fra tutti i valori visti fino a quel momento



Se x è di questo tipo, non può esistere un numero $0<p+x-q<x$ tale che

$$P((p+x-q)^2+1) = q > P.$$

M2 Fatto generale 1: in $n 2^n$ passaggi posso ordinare un vettore lungo 2^n. MERGE SORT

(Faccio 2 pile, ordino dalle 2 parti, e poi metto insieme togliendone uno per volta:

$$S(k+1) = 2S(k) + 2^{k+1} \rightsquigarrow k2^k$$

(a) ok con $4 \cdot n \cdot 2^n$

Con $n \cdot 2^n = 2n \cdot 2^{n-1}$ passaggi li ordino $\leq \dots$ poi chiedo disug. opposte su ogni coppia consecutiva

(b) Idea: prendo 2 successioni che sono permutazioni della stessa

$$\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$$

Quanti sono? $(2^n)!$

Quante sono le possibili risposte? $2^{n 2^{n-1}} < (2^n)!$

si dimostra

$\rightsquigarrow$ esistono due permutazioni che avrebbero le stesse risposte

$$\begin{array}{ccccc} & & +1 & & \\ a_1 & \boxed{a_2} & a_3 & \cdots & \boxed{a_{2^n}} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{2^n} \\ 3 & 1 & & 2 & \text{scende} \end{array}$$

Voglio: modificare la 1ª ottenendo una succ. $c_1, c_2, \dots, c_{2^n}$ che ottiene le stesse risposte di a_k e b_k e ha 2 elementi uguali.

Esistono due indici i e j t.c.

$$a_j = a_i + 1 \quad \text{ma} \quad b_j < b_i$$

La domanda $k_i < k_j$ non è mai stata fatta

Sostituisco a_i con a_j (o viceversa) e la cosa funziona.