Winter Camp 2017

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

A.Alfarano F. Morandin

WINTER CAMP 2017 ALGEBRA

Note Title 27/01/2017

A4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y^2) \geq (y+1)f(x)$$

(1) $f(x)=e^x$ $e^{y^2} \geq y+1$ $\forall y$ NO!!!

Bozza $\frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \geq$ mostro che cresce troppo

$f(x) \geq 0$ e $f(x) \leq 0$

$y=-1$ $f(x+1) \geq 0$ ✓

$x = x+y^2$ $f(x+2y^2) \geq (y+1)f(x+y^2)$
$\geq (y+1)^2 f(x)$

$$f(x+ny^2) \geq (y+1)^n f(x)$$

$y=\frac{1}{n}$ $f(x+\frac{1}{n}) \geq (\frac{1}{n}+1)^n f(x)$

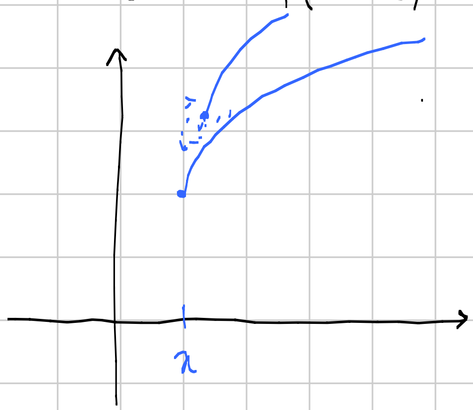
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$x=x+\frac{1}{n}$ $f(x+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}) \geq (\frac{1}{n}+1)^n f(x+\frac{1}{n}) \geq (\frac{1}{n}+1)^{2n} f(x)$

$f(x+1) \geq (1+\frac{1}{n})^{n^2} f(x)$ $\forall x$

$$f(x) \le \frac{f(x+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \sim \frac{f(x+1)}{e^n} = 0$$

Altra idea: $f(x+z) \ge (1+\sqrt{z})f(x)$ $z>0$



$z = \varepsilon$

$f(x+n\varepsilon) \ge \dots$ grande

A5. $$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \le 4 + \frac{(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2}{3abcd}$$

(1) $\Longleftrightarrow$ $$(ab+cd-ac-bd)^2 + (ac+bd-ab-cd)^2 + (ad+bc-ab-cd)^2 \ge 0$$

(2) $$a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2+6abcd \ge \sum_c a^2(bc+cd+db)$$

$x^2+y^2+z^2 \ge 0$ $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$

$x = ab+cd$, $y = ac+bd$, $z = ad+bc$

③ $S = b+c+d$, $Q = bc + cd + db$
$P = bcd$

$$(a+S)\left(\frac{1}{a}+\frac{Q}{P}\right) \leq 4 + \frac{(aS+Q)^2}{3aP}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(S^2-3Q)a} + \frac{\boxed{Q^2-3PS}}{a} \geq SQ - 9P$$

$$LHS \overset{\checkmark}{\geq} 2\sqrt{(S^2-3Q)(Q^2-3PS)} \overset{?}{\geq} SQ - 9P$$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$

$$f(x^n + 2f(y)) = (f(x))^n + y + f(y)$$

1) f è iniettiva $\quad g(f(y), x) = y$

y_1, y_2 con $f(y_1) = f(y_2)$

2) f è surgettiva $\quad f(g(x,y)) = h(y)$
$\uparrow$
surgettiva

n dispari x t.c. $x^n + 2f(y) = y$

$f(x) = (-y)^{\frac{1}{n}}$

3) $\exists!\, \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0 \qquad y \leftarrow \alpha$

$$f(x^n) = (f(x))^n + \alpha \qquad \forall n \geq 2$$

$$f(x^n + 2f(y)) = f(x^n) - \alpha + y + f(y)$$

n dispari x^n invertibile

$$f(x + 2f(y)) = f(x) - \alpha + y + f(y) \qquad z = 2f(y) \quad y = f^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$f(x+z) = f(x) + g(z)$$

4) Simmetrizzo $f(x) + g(z) = f(x+z) = f(z) + g(x)$

$$g(x) = f(x) + \underbrace{g(z) - f(z)}_{z \text{ cost}} \qquad g(x) = f(x) + c$$

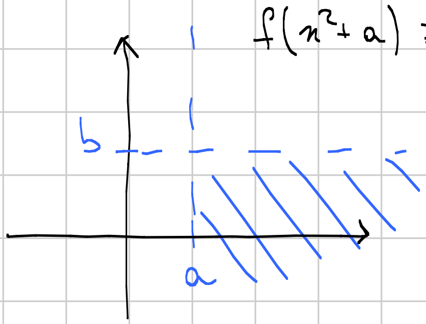
$$f(x+z) = f(x) + f(z) + c$$

$$f(x+z) + c = f(x) + c + f(z) + c$$

$f(x)+c$ soddisfa eq di Cauchy

5) $n = 2 \qquad f(x^2 + 2f(y)) = f(x)^2 + y + f(y) \geq y + f(y)$

$$f(x^2 + a) \geq b$$



$$f(x) = ax + b$$

6) Sostituisco e verifico

$a = 1 \quad b = 0$

Considerazioni

$n=2 \qquad (x,y) \qquad (-x,y)$

$$f(x)^2 = f(-x)^2 \qquad f(-x) = -f(x)$$

$$f(x^n) = [f(x)]^n$$

$$f(x + 2f(y)) = f(x) + \boxed{y + f(y)} = f(x) + f(2f(y))$$

$x=0 \qquad f(2f(y)) = y + f(y)$

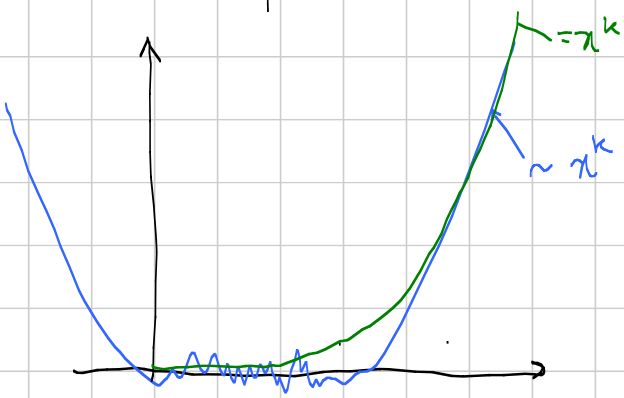
$$\boxed{f(\alpha)=0 \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 \implies f(-\alpha)=0}$$

$$f(x+z) = f(x) + f(z)$$

A7. $p(x) \in \mathbb{Z}[x] \qquad p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \qquad a_k = 1$

$\forall n \geq 1 \quad \exists x_n \in \mathbb{Z} \quad p(x_n) = 2^n$

1) Se $k=1 \quad p(x) = x + a$ va bene $\quad x_n = 2^n - a$



$q(x) = x^k$

$x = 2^m$

$q(2^m) = 2^{mk}$

$k \mid n$ va bene

Traslo orizzontalmente $p(x)$ per avvicinarlo a x^k

$$p(x \pm 1) = \sum_{i=1}^{k} a_i (x \pm 1)^i = (x \pm 1)^k + a_{k-1}(x \pm 1)^{k-1} + \dots$$

$$= x^k + \underbrace{(a_{k-1} \pm k)}_{\gtrless 0} x^{k-1} + q^{\pm}(x) \qquad g \leq k-2$$

wlog : $|a_{k-1}| < k$

$$p(x-1) = x^k - c_1 x^{k-1} + q^-(x)$$
$$p(x+1) = x + c_2 x^{k-1} + q^+(x)$$

$p(x-1) < x^k < p(x+1)$ per x molto grande $x > 1$ e

$x = 2^m$ $\qquad xc_1 > (k-1) \max |\text{coeff } q^-|$

$p(2^m - 1) < 2^{mk} < p(2^m + 1)$ $\qquad xc_2 > (k-1) \max |\text{coeff } q^+|$

$$p(x_{mk}) = 2^{mk}$$

$$\Rightarrow p(2^m) = 2^{mk} = \sum_{i=0}^{k} a_i (2^{mi}) = 2^{mk} + r(2^m)$$

$r(2^m) = 0 \quad \forall m \qquad r$ polinomio $\qquad r \equiv 0$

$p(x) = x^k$ (traslato)

(attenzione al punto delicato se k è pari!)

$k \mid n \quad \forall n \Rightarrow k = 1 \qquad p(x)$ traslato $= x$

$p(x) \in \mathbb{Z}[x] \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z} \qquad m - n \mid p(m) - p(n)$

x_i , $\qquad x_1 = 0$

$$a_n - a_{n+1} \mid 2^n \qquad \Delta_n = a_{n+1} - a_n$$
$$a_{n+1} - a_{n+2} \mid 2^{n+1}$$
$$a_n - a_{n+2} \mid 3 \cdot 2^n$$

$$\Delta_n = \begin{cases} 2\Delta_{n-1} \\ -4\Delta_{n-1} \end{cases}$$

$|\Delta_n| \geq |a_n|$

$|a_n| \geq 2^{n-2} |a_2|$. $a_2 = \Delta_1$

$\deg p \geq 2$ $p(a_n) \geq a_2{}^2 \left(2^{2(n-2)}\right)$

WC 2017 - Combinatoria

Note Title 26/01/2017

C6

$A \subseteq \mathbb{N}$ $\quad M \in \mathbb{N}$ $M > 0$ e supponiamo che $\forall n \geq M$ esiste una espressione unica di n come somma di un numero dispari di el. di A.

a) Allora $\exists$ intero positivo P t.c. $\forall n \geq P$ si scrive come somma di un numero pari di el. di A

b) $0 \in A$

Se A non è infinito, non può sodd. ipotesi.

$$A = \{ a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k < \dots \}$$

Espansione dispari di n = un modo di scrivere n come somma di un # dispari di el. di A

Espansione pari ...

Oss. Se $M < a_k < a_j$, allora a_k deve apparire nell'esp. dispari di $a_j - 1$

altrimenti $\underbrace{(\underset{\overset{\vee\!\!/}{M}}{a_k} - 1) + a_j + a_{j+1}}_{\text{ha esp. disp.}} = a_k + \underbrace{(a_j - 1) + a_{j+1}}_{\text{ha esp. disp}}$

non c'è a_k

non cont. a_k

Oss. 2: allora se $a_j > M$ $\quad a_j > \sum_{M < a_k < a_j} a_k$

$\Omega = \sum_{a_i \le M} a_i$ Oss. $\Rightarrow \sum_{i<j} a_i < \Omega + a_j$

Oss. $\Omega \geq M$

Oss. 3 Se $x \geq \Omega$, ha un'esp. pari

se $a_j > x$ $a_{j+1} + x$ ha esp. dispari S

È a_{j+1} in S?

Il max a_k in S è $< a_{j+1}$? $\sum S < \Omega + a_{j+1} <$

$< x + a_{j+1}$ ass.

Il max a_k in S è $> a_{j+1}$?

$x + a_{j+1} < a_j + a_{j+1} < a_k$. per

Quindi a_{j+1} appare in S e $S \setminus \{a_{j+1}\}$ è esp. pari di x

Lemma: $a_k > \Omega > M$ $2a_{k+1} < a_{k+2}$ se no, $a_{k+2} > a_{k+1} + a_k$

e quindi $\Omega < a_k < a_{k+2} - a_{k+1} \leq a_{k+1}$ e allora

$a_{k+2} - a_{k+1}$ ha esp. pari con a_ℓ massimo $< a_{k+1}$ se $A \neq 0$

e quindi a_{k+2} avrebbe esp. dispari $\neq \{a_{k+2}\}$ ass.

Allora cons. esp. pari di $2a_{k+1} < a_{k+2}$

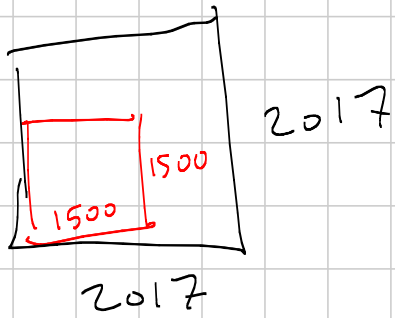
non contiene $a_{k+2} \Rightarrow$ usa al più a_{k+1}

Anzi, deve usare a_{k+1}, se no $\sum_{i<k+1} a_i < \Omega + a_{k+1} < 2a_{k+1}$

Sottraggo a_{k+1} all'esp. pari di $2a_{k+1}$ e ho esp. disp. di $a_{k+1} \neq \{a_{k+1}\}$. assurdo

Per casa: $M=0$ (molto più facile).

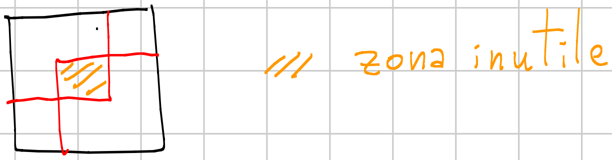
C4



Qual è il minimo numero di sensori?

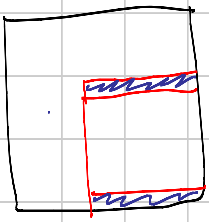
Sol:

Oss 1: la zona centrale è inutile

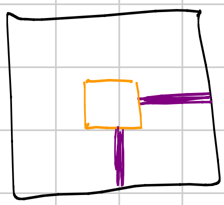


Oss 2: se sposto di 1 il □, qualche sensore deve cambiare

Ci sono 2 strisce la cui unione deve contenere un sensore



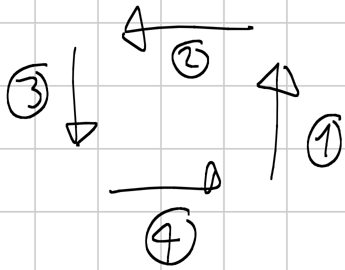
L'esempio segue facilmente



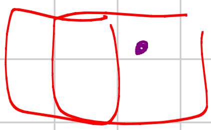
Infatti, l'info che ottiene Alberto sarà in questa forma:

me ne bastano $(2017-1500)\cdot 2$

Oss 3: faccio fare al □ tutto il giro:



Che succede ad un singolo sensore?



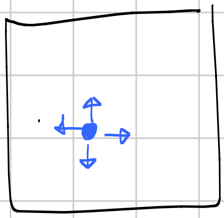
ci sono 2 intervalli di informazione costante

$\Rightarrow$ ognuno cambia stato al massimo 2 volte durante il giro

Conclusione: le mosse sono $(2017-1500)\cdot 4$ e ogni sensore cambia stato al massimo 2 volte, me ne servono almeno la metà.

Si poteva concludere osservando le sbarre di prima con un double counting furbo.

C5 Solitario su una scacchiera



• è una mossa

(per cena: determinare il minimo n t.c. $\forall$ conf. iniziale posso continuare indefinitivamente)

La domanda vera: determinare il max n : $\forall$ conf. iniz. con n, deve fermarsi.

Sol:

Oss. 0: ho solo finite config. con n monete.

$\Rightarrow$ se faccio tante mosse, per Pigeonhole rivedo la stessa config.

Oss. 0.5: allora potrei ripetere le mosse che intercorrono tra queste 2, un numero arbitrario di volte

Oss 1: se non muovo da una casella allora il numero di monete su di lei non scende mai $\Rightarrow$ non può neanche aumentare $\Rightarrow$ non muovo neanche su una cas. adiacente

Devo aver mosso almeno su ciascuna casella

Oss 1.5: devo aver fatto lo stesso numero di mosse su ciascuna

In un ciclo devo aver effettuato $2017^2 \cdot k$ mosse, k per ciascuna.

Supponiamo per un momento che $k = 1$

Quindi le mosse verranno effettuate nell'ordine

$c_1, c_2, \ldots, c_{2017^2}$

Sia $m_i = \#$ monete su c_i

Allora $m_1 \geq \#$ bordi di c_1

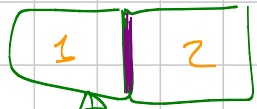
$m_2 \geq \#$ bordi di $c_2 - 1$ eventualmente (se c_1 è adiacente)

$m_i \geq \#$ bordi di $c_i - \#$ di mosse già fatte sulle caselle adiacenti

Sommo tutto:

$$n = \sum m_i \geq \underbrace{\sum \text{bordi}}_{= \#\text{ bordi interni} \cdot 2} - \underbrace{\sum \text{mosse}}_{= \sum_{\text{bordi interni}} 1}$$

*

$*$ se 

$\Rightarrow$ la mossa compare

ma non viceversa

Da qui avrei concluso.

Se non so se $k=1$, posso comunque rifare questo conteggio

Le mosse sono

$$c_1^1,\ c_2,\ \dots,\ c_1^2 \quad c_i^j \dots\ c_1^k\ \dots\ c_{2017} \dots$$

$$- - c_{i''}^{j''} \qquad c_{i'}^{j'}$$

è la k-esima volta che muovo su c_1

Quando faccio c_i^j

$$m_i \geq j \cdot \#\text{bordi di } c_i - \#\text{ mosse già fatte sulle caselle adiacenti}$$

$\circledast$ ho alcune caselle blu su cui ho mosso prima di c_i^j e erano adiacenti alla c_i

Come prima, sommo su c_i^j

$$\underbrace{\sum m_i}_{k \cdot n \,=} \geq \underbrace{\sum \text{bordi}}_{= \binom{k+1}{2} \cdot \#\text{bordi interni} \cdot 2} - \underbrace{\sum \text{mosse già effett.}}^{\circledast}$$

ci saranno alcune mosse che agiscono su queste 2

$$c_1^1,\ c_1^2,\ c_2^1,\ \dots,\ c_1^k,\ c_2^k \quad \circledast$$

ho una permutazione di $c_1^1, \dots, c_1^k; c_2^1, \dots, c_2^k$

quante volte trovo in $\circledast$ la mossa c_i^j

tante quante in $\circledast$ trovo dopo c_i^j una c_{3-i}^{*}

, se guardo solo le $c_i^{\bullet}$, ciascuna compare k volte

in totale k^2

Quindi la disuguaglianza torna come prima

Per casa, mostrate che se $\exists$ un ciclo con k su ciascuna casella, allora ne esiste uno con $k = 1$.

(oppure confutatelo)

Parziale idea alternativa:

ragionando sulle coppie di adiacenti,

con n monete, al massimo n volte non torno indietro

da qui segue che non raggiungo tutto

... si aggiusta, ma non in modo completamente ovvio.

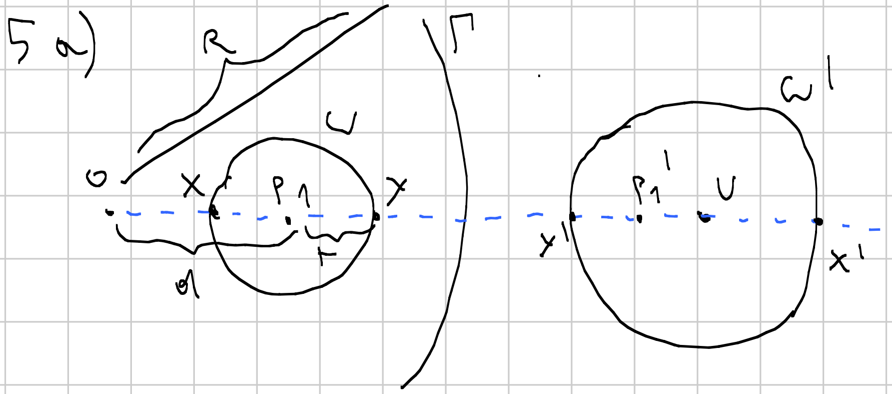
— — — - -

Se $k = 1$, si possono numerare le monete in modo che una certa moneta rimanga confinata tra 2.

WC 2017_ Geometria sintetica

Note Title 27/01/2017

5 a)



Se P_1 è il centro di ω la tesi diventa
O, P_1' inversi rispetto a ω'

Se U è il centro di ω' e r' il suo raggio

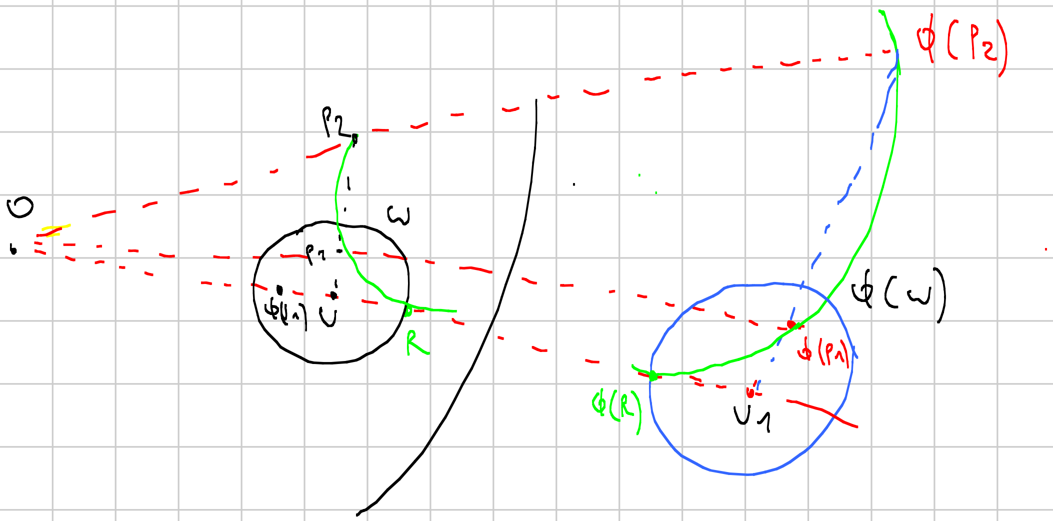
$$r' = \frac{OX' - OY'}{2} = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{1}{d-r} - \frac{1}{d+r} \right) = R^2 \frac{r}{d^2 - r^2}$$

$$OU = \frac{OX' + OY'}{2} = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{1}{d-r} + \frac{1}{d+r} \right) = R^2 \frac{d}{d^2 - r^2}$$

$$P_1'U = OU - OP_1' = R^2 \frac{d}{d^2 - r^2} - \frac{R^2}{d} = R^2 \frac{r^2}{d(d^2 - r^2)}$$

$$UO \cdot UP_1' = R^4 \frac{r^2}{(d^2 - r^2)^2} = r'^2$$

Note Title 27/01/2017



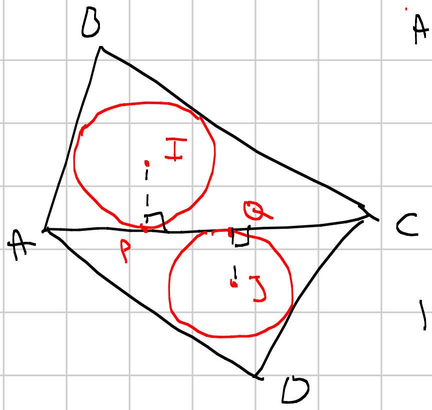
U_1 = centro di $\phi(\omega)$; vorremmo U_1, $\phi(P_1)$, $\phi(P_2)$ all.

Però so (da sopra) che $\phi(U_1)$ e O sono inversi rispetto alla ω $\Rightarrow$ $U\phi(U_1) \cdot UO = r(\omega)^2 = UP_1 \cdot UP_2$ $\Rightarrow$ $O, \phi(U_1), P_1, P_2$ conciclici $\Rightarrow$ $U_1, \phi(P_1), \phi(P_2)$ all.

TS $\Leftrightarrow$ il cerchio $\odot(\phi(R)\,\phi(P_1)\,\phi(P_2))$ tange la retta OU

$\Leftrightarrow$ $\odot(P_1P_2R)$ tange OU vero per ipotesi. $\square$

4a)



$ABCD$ circoscritto $\iff IJ \perp AC$

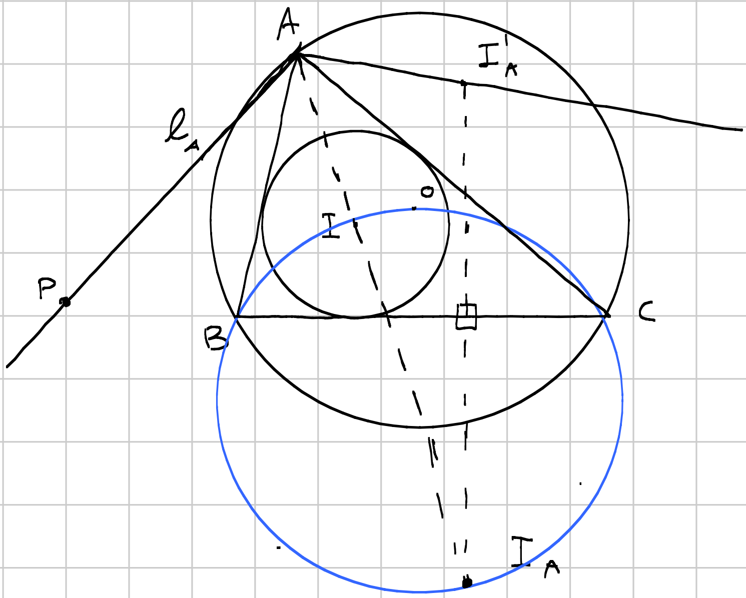
$IJ \perp AC \iff P \equiv Q \equiv IJ \cap AC$

$$2 \cdot AP = AC + AB - BC$$
$$\parallel$$
$$2 \cdot AQ = AC + AD - DC$$

$$\iff AB + DC = AD + BC$$

$\square$

Note Title 27/01/2017



Lemma

$\omega \to BC$

$I_A \quad I_A'$

$\sqrt{AB \cdot AC}$ Segm AI

$B \to C$

$C \to B$

$BC \to \odot(ABC)$

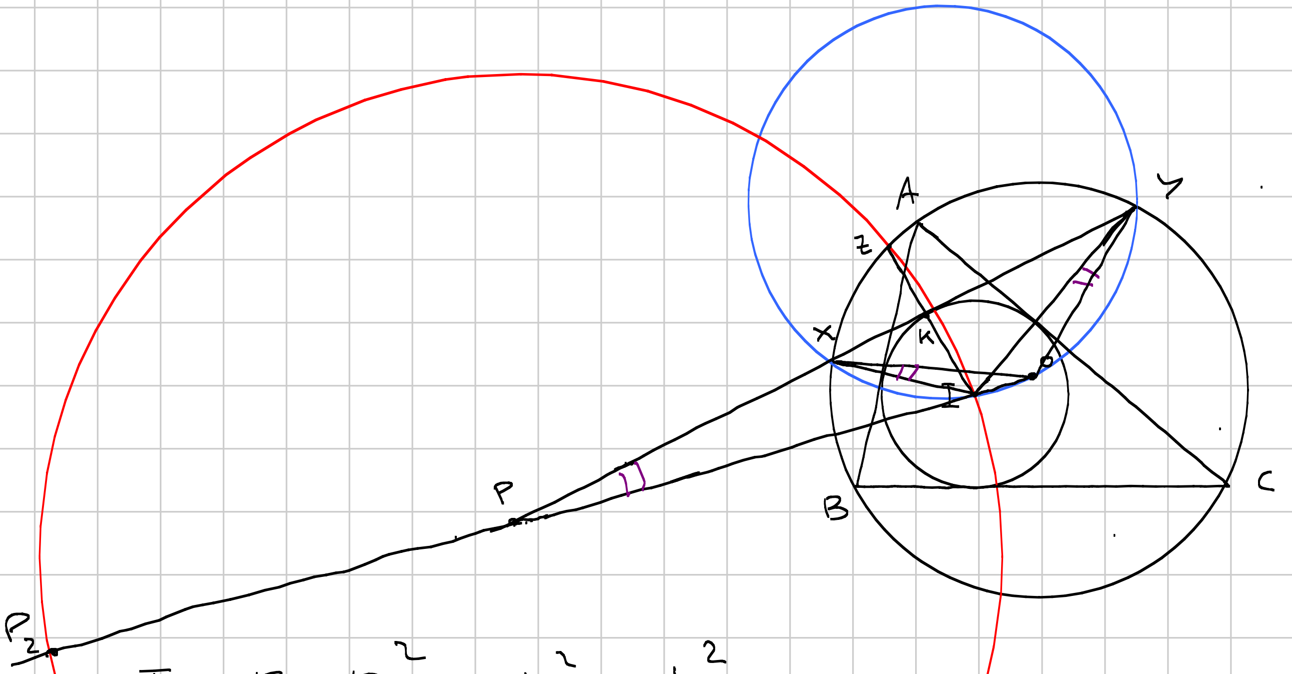
$I \to I_A$

$I_A \to I$

BC	I_A	I_A'	AI_A'
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\odot(ABC)$	I	?	ℓ_A

$P^* \in \ell_A \qquad P^* \in \ell_B$

P



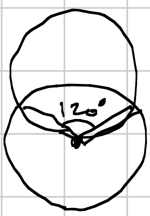
$OI \cdot OP = R^2 = OX^2 = OY^2$

$\frac{OI}{OX} = \frac{OX}{OP} \Rightarrow \triangle PXO \sim \triangle XIO$

$\triangle PYO \sim \triangle YIO$

$XIOY$ ciclico

$\widehat{XIY} = 120^\circ \iff \widehat{XOY} = 120^\circ$

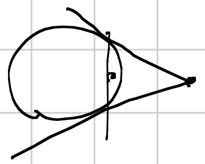


Tesi $\iff \odot(XIOY)$ segm $\odot(ABC)$ wrt XY

Ω di centro P e raggio PI

Siccome $P \in XY$ e P è centro di Ω, $Z = \Omega \cap \odot(ABC)$ è segm di I risp a XY

Idea: invertiamo nell'inscritta



$\odot(ABC)$

$$P \longrightarrow P_1 \qquad \odot(ABC) \longrightarrow \text{Feuerbach di } \widehat{DEF} \qquad I \longrightarrow \infty$$

$$IP = \frac{IP_2}{2}$$

$$IP^* = 2\, IP_2^*$$

Oss. Basta $IK = KZ$

(Per congruenza di $\widehat{PIK}$ $\widehat{PKZ}$)

Quindi vorremmo $\boxed{IZ^* = \frac{IK}{2}}$

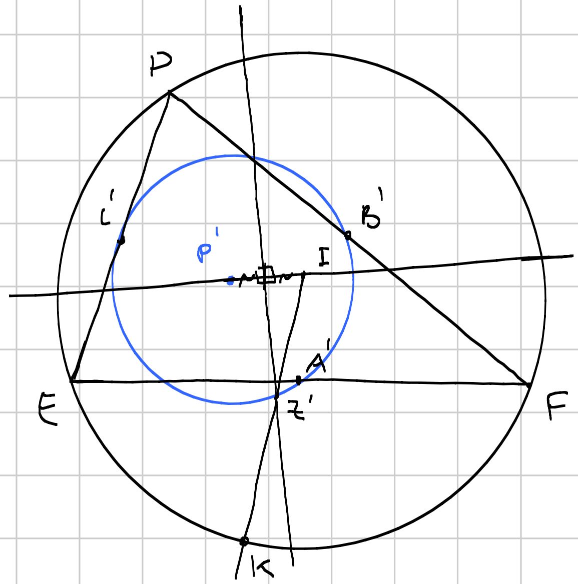
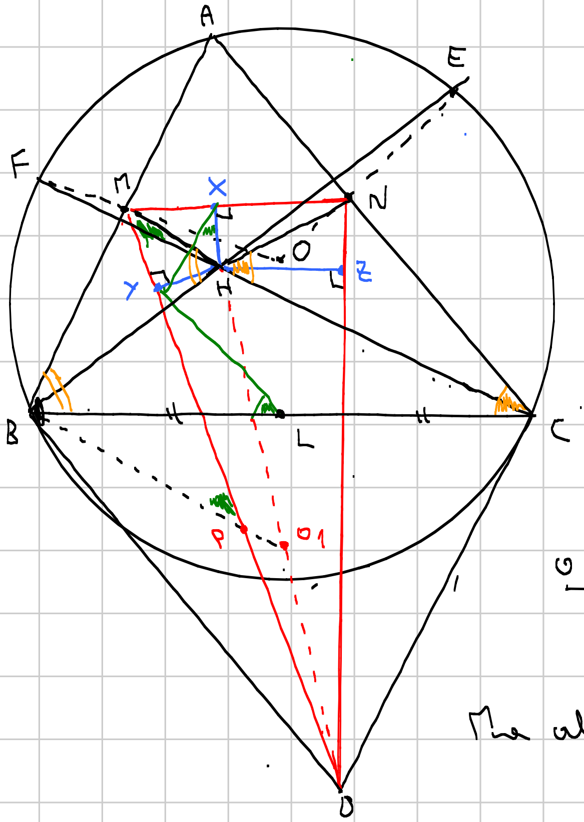


Immagine di Ω passa per pto medio di IP', ed è $\perp$ a IP, per cui è l'asse di IP'

$P'Z' = \frac{R}{2}$ $\quad IZ' = \frac{R}{2}$ $\quad IK = R$

PROBLEMA 6.



OSS. 1 se E, F sono i simm. di H in AB, AC

$\angle(OFB) = 90^\circ - \dfrac{\angle FOB}{2}$

$= 90^\circ - \angle FCB$

$= \angle ABC$

$\Rightarrow \angle(OFB) = \angle(MHB)$

$= \angle(MFB)$ (per simm.)

$\Rightarrow$ O, F, M allineati e così anche O, E, N

OSS. 2 il cerchio di diametro DH passa per B, C, Y, Z

Ma allora $\angle BYC = 180^\circ - \angle BAC$

$= \angle MBD$

e $\angle YCB = \angle YDB = \angle MDB$

$\Rightarrow B\overset{\triangle}{Y}C \simeq M\overset{\triangle}{B}D$. Sia P il pt. medio di DM e sia O1 il pt. medio di HD. O1 sta sull'asse di BC (ovvio) e $O_1L = \frac{1}{2}AH$ (per TALETE in $A\overset{\triangle}{H}D$) $= OL$

$\Rightarrow$ O1, O sono simm. rispp. a BC

Ora $\angle ABO_1 = \angle ABC + \angle CBO_1 = \angle ABC + \angle OBC$

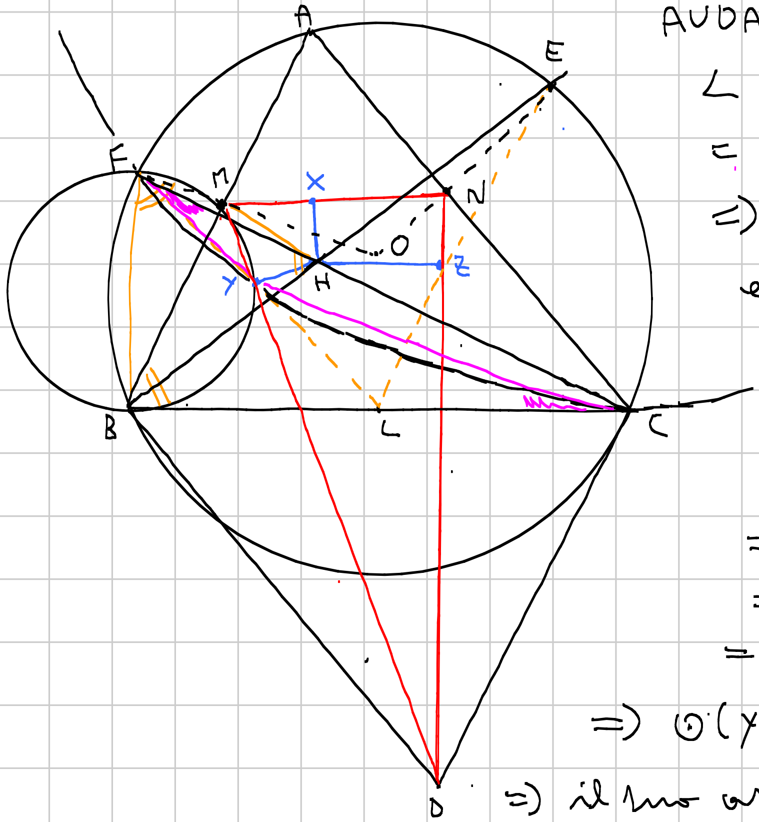
$= \angle ABC + \angle ABH = \angle MHB + \angle(ABH) = \angle AMH$

$\Rightarrow BO_1 \,//\, MH \Rightarrow$ sapendo che $MH \,//\, PO_1$ (TALETE) vale B, P, O1 sono allineati.

Ora $B\hat{Y}L \simeq M\hat{B}P \Rightarrow \angle BLY = \angle MPB = \angle YMH$

$= \angle YXH$ (MXYH ciclico)

Analogamente $\angle CLZ = \angle ZXH \implies$
$\angle YLZ = 180° - \angle BLY - \angle CLZ = 180° - \angle YXH - \angle ZXH$
$= 180° - \angle YXZ \implies XYZL$ ciclico.

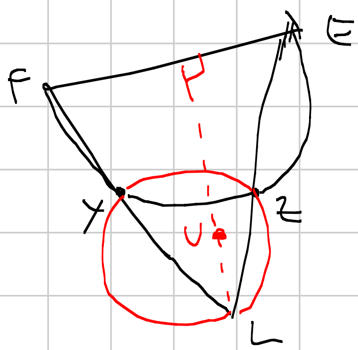


AUDACE OSSERVAZIONE:

$\angle BYD = \angle BCD = \angle CBA$
$= \angle MHB = \angle BFM$
$\implies BFMY$ è ciclico
ed è tangente a BC.

Calcoliamoci $\angle YFH$
$= \angle BFH - \angle BFY$
$= \angle BAC - \angle BMY$
$= \angle(DM, AC)$
$= \angle(DM, DB) = \angle MDB$
$= \angle YCB$

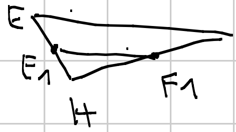
$\implies \odot(YFC)$ tange BC
$\implies$ il suo asse radicale con $\odot(BFMY)$
che è FY passa per L. Inoltre
$LY \cdot LF = LB^2 = LC^2 = LZ \cdot LE \implies$
$YFEZ$ è ciclico.



$\implies YZ$ e EF sono antiparallele
risp. all'angolo $\widehat{LF, LE}$

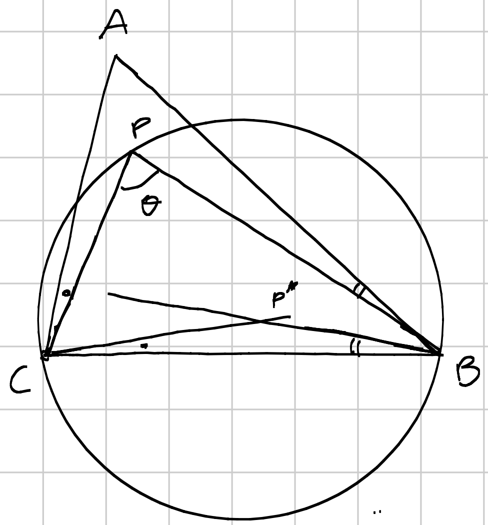
$\implies LU \perp EF$

Se E_1, F_1 sono i piedi delle
altezze di ABC $\implies$



$\implies EF \parallel E_1F_1$

Se J è il centro di $\odot(LE_1F_1)$
$LJ \perp E_1F_1$ perché $LE_1 = LF_1 \implies L, U, J$ all. $\square$

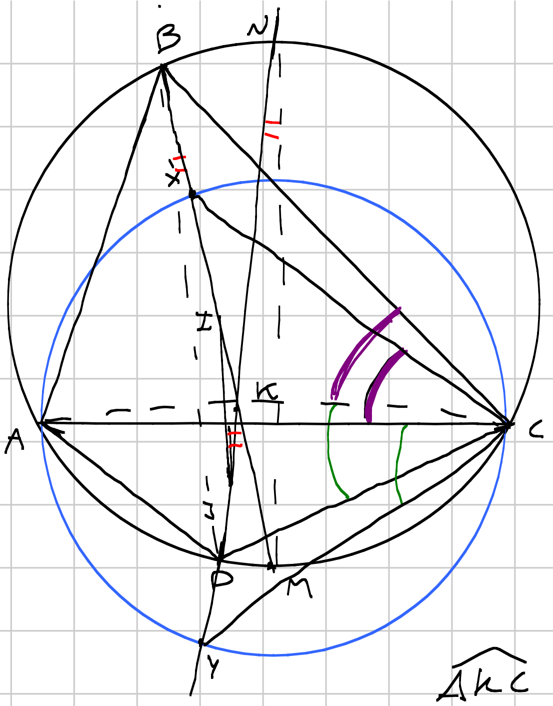


$$\angle(P^*A, P^*C) =$$
$$= \angle(P^*A, AB) + \angle(AB, AC) + \angle(AC, BC) + \angle(BC, P^*C) =$$
$$= \angle(AC, AP) + \angle(AB, AC) + \angle(AC, BC) + \angle(PC, AC) =$$
$$= \angle(PC, AP) + \angle(AB, BC) =$$

$$\angle(P^*A, P^*C) = -\angle(AP, PC) + \angle(AB, BC)$$

θ

$$-\theta + \alpha$$
$$\pi - \theta + \alpha$$



M, N ∈ Asse AC

$MN \perp AC$

$\widehat{DBM} = \widehat{DNM}$

$\widehat{IJK} \Rightarrow IJ \parallel MN.$

ABCD è circoscr.

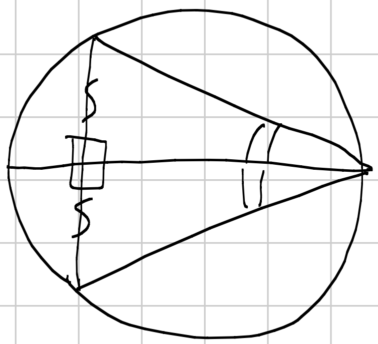
$\widehat{AKC} = 2\pi - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} - \hat{D}$

$\widehat{AX^*C} = \pi + \hat{B} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \hat{B}$

$\pi - \hat{D} = \hat{B} \qquad \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\widehat{AKC} = \pi + \hat{B} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \hat{B}$

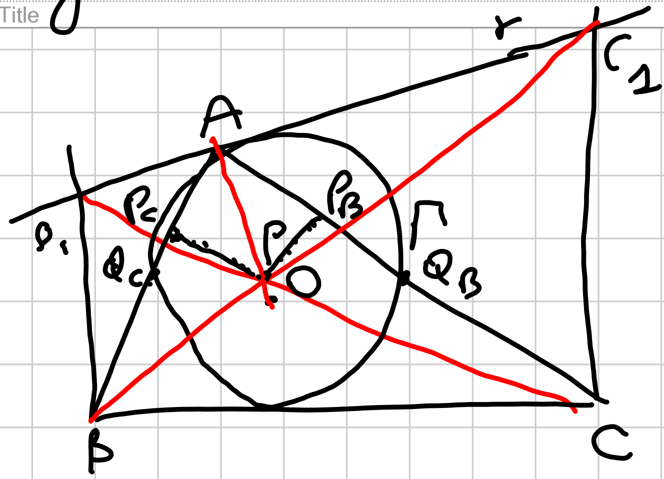
$X^* = BX \cap \odot(X^*AD)$



Geometria contosa

Note Title 25/01/2017

1



Coordinate baricentriche
$A(1,0,0)$, ...

Chi è O? $O(a^2 S_A, b^2 S_B, c^2 S_C)$

$$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \quad \text{e cicliche}$$

$B_1 = ?$

Excentro I_C è $(a, b, -c)$

$r := \boxed{bz + cy = 0}$

La $\perp$ a BC passante per B.

Il punto all'∞ della retta AH
$H = (S_B S_C, S_A S_C, S_A S_B)$; $AH := \boxed{S_B y - S_C z = 0}$

$(0, S_B, -S_C)$

$\infty_{AH}(\underbrace{S_B + S_C}_{= a^2}, -S_C, -S_B)$

$\infty_{AH} \; (-a^2, S_C, S_B)$
$B \; (0, 1, 0)$

$B\infty_{AH} := a^2 z + S_B x = 0$

$B\infty_{AH} \cap r \; . \; \begin{cases} a^2 z + S_B x = 0 \\ b z + c y = 0 \end{cases} \xRightarrow{z=1} \begin{cases} x = -\frac{a^2}{S_B} \\ y = -\frac{b}{c} \end{cases}$

$B_1 \; \left(-\frac{a^2}{S_B}, -\frac{b}{c}, 1\right) \rightarrow \left(a^2 c, b S_B, -S_B c\right)$

$C_1 \; (a^2 b, -b S_C, c S_C)$

$CB_1 : \; (0, 0, 1)$
$(a^2 c, b S_B, -c S_B) \qquad a^2 c y - b S_B x = 0$

$BC_1 : \; (0, 1, 0)$
$(a^2 b, -b S_C, c S_C) \qquad a^2 b z - c S_C x = 0$

$CB_1 \cap BC_1 : \begin{cases} a^2 c y - b S_B x = 0 \\ a^2 b z - c S_C x = 0 \end{cases} \xRightarrow{x=1} \begin{cases} y = \frac{b S_B}{a^2 c} \\ z = \frac{c S_C}{a^2 b} \end{cases}$
$\quad = P$

$P\left(1, \frac{b S_B}{a^2 c}, \frac{c S_C}{a^2 b}\right) \rightarrow \boxed{P\left(a^2 b c, b^2 S_B, c^2 S_C\right)} \Rightarrow P \in AO$

$O\left(a^2 S_A, b^2 S_B, c^2 S_C\right)$

(b) P_B punto medio di AQ_B
P_C " " " AQ_C

$Q_B \in \Gamma \qquad Q_C \in \Gamma$

P è sull'asse di $AQ_B \Rightarrow Q_B \in \Gamma$

$$H = (S_B S_C,\ S_A S_C,\ S_A S_B)$$

$$BH:\ x S_A - z S_C = 0$$

$$\infty_{BH} = (S_C, -b^2, S_A) = BH \cap \{x+y+z=0\}$$

$P P_B = P\infty_{BH}$ poiché $P P_B // BH$

$$P\infty_{BH}:\ \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ a^2 bc & b^2 S_B & c^2 S_C \\ S_C & -b^2 & S_A \end{pmatrix} = 0$$

$$P\infty_{BH}:\ x b^2 (S_A S_B + c^2 S_C) + y\left[c^2 S_C^2 - a^2 bc S_A\right] + z\left[-a^2 b^3 c - b^2 S_B S_C\right] = 0$$

$$\{P_B\} = P\infty_{BH} \cap AC$$

$$AC:\ y = 0$$

$$x \cancel{b^2}(S_A S_B + c^2 S_C) = z \cancel{b^2}(a^2 bc + S_B S_C)$$

$$P_B = (a^2 bc + S_B S_C,\ 0,\ S_A S_B + c^2 S_C)$$

$$\frac{\vec{Q}_B + \vec{A}}{2} = \vec{P}_B \qquad \underline{\vec{Q}_B = 2\vec{P}_B - \vec{A}}$$

$$A = (1,0,0) = (a^2 bc + S_B S_C + S_A S_B + c^2 S_C,\ 0,\ 0)$$

$$Q_B = (a^2 bc + S_B S_C - S_A S_B - c^2 S_C,\ 0,\ 2(S_A S_B + c^2 S_C))$$

$$\Rightarrow Q_C = (a^2 bc + S_B S_C - S_A S_C - b^2 S_B,\ 2(S_A S_C + b^2 S_B),\ 0)$$

$$c^2 = S_A + S_B \qquad a^2 = S_B + S_C$$

$$Q_B = (a^2 bc - S_A S_B - S_A S_C,\ 0,\ 2(S_A S_B + c^2 S_C))$$

$$Q_B = (a^2(bc - S_A),\ 0,\ 2(S_A S_B + c^2 S_C))$$

$$Q_C = (a^2(bc - S_A), 2(S_A S_C + b^2 S_B), 0)$$

$$\Gamma: a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x+y+z)(ux + vy + wz)$$

$A \in \Gamma \Rightarrow u = 0$

$$b^2 = S_A + S_C \qquad 2(S_A S_C + b^2 S_B) = 2(S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C)$$

$Q_C \in \Gamma \Rightarrow$

$$c^2 a^2 (bc - S_A) \cancel{2(\sum_{cyc} S_A S_B)} = \left(2\sum_{cyc} S_A S_B + a^2 bc - a^2 S_A\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\cancel{2(\sum_{cyc} S_A S_B)}\, v\right)$$

$$2\sum_{cyc} S_A S_B = \sum_{cyc} a^2 S_A \qquad a^2 = S_B + S_C$$

$$c^2 a^2 (bc - S_A) = (a^2 bc + b^2 S_B + c^2 S_C)\, v \qquad (1)$$

$$a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \prod_{cyc}(a+b-c)$$

$$(a^2 bc + b^2 S_B + c^2 S_C) + a^2(S_A - bc) = \frac{1}{2}(a+b+c)\prod_{cyc}(a+b-c)$$

$$S_A - bc = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - bc = \frac{1}{2}((b-c)^2 - a^2) =$$
$$= -\frac{1}{2}(a+b-c)(a+c-b)$$

$$a^2 bc + b^2 S_B + c^2 S_C = \frac{1}{2}(a+b-c)(a+c-b)\left[(a+b+c)(b+c-a) + a^2\right]$$

$$a^2 bc + b^2 S_B + c^2 S_C = (bc - S_A)\left[b+c\right]^2$$

$$v = \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} \qquad w = \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2}$$

$$\Gamma: \sum_{cyc} a^2 yz = (x+y+z)\frac{a^2}{(b+c)^2}\left[c^2 y + b^2 z\right]$$

Γ e BC tangenti è la nostra tesi:
$\Gamma \cap \{x=0\}$ ha una sola soluzione.

$$a^2 yz = (y+z)\frac{a^2}{(b+c)^2}(c^2y+b^2z)$$

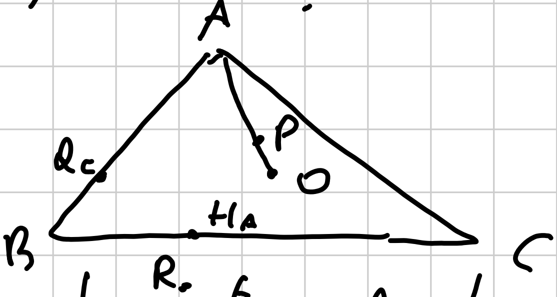
$$(b+c)^2 yz = (y+z)(c^2y+b^2z)$$

$$c^2y^2+b^2z^2-2bcyz=0$$

$$(cy-bz)^2=0 \qquad cy=bz$$

$D=(0,b,c)$ FINE!

BIS

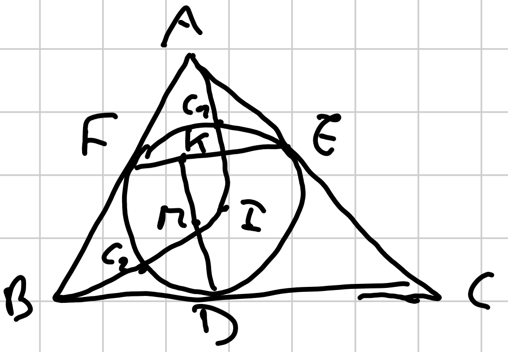


Omotetia di centro A che manda P in O.
Manda Q_c in B

$$\frac{AQ_c}{AB}=\frac{AP}{AO} \iff APQ_c \sim AOB \iff Q_cP \parallel BO$$

Oppure $\circ$ $OR \parallel PH_A$ $\circ$ $\circ$

Problema 3:
BARICENTRICHE
Ma non su ABC!
Su DEF.



$EF=a \quad DF=b \quad ED=c$
A che punto è?

$t_F:\ a^2y+b^2x=0 \qquad A=(-a^2,b^2,c^2)$

$B=(a^2,-b^2,c^2) \qquad C=(a^2,b^2,-c^2)$

$I=(a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C)$

$\omega = \odot(AIB)$ $\quad\omega : \sum_{cyc} a^2yz = (x+y+z)(ux+vy+wz)$

$A \in \omega \Rightarrow$

$\cancel{a^2b^2c^2} - \cancel{a^2b^2c^2} - a^2b^2c^2 = 2S_A\left[-ua^2+vb^2+wc^2\right]$

$B \in \omega \Rightarrow \quad -a^2b^2c^2 = 2S_B\left[ua^2-vb^2+wc^2\right]$

$I \in \omega \Rightarrow$

$a^2b^2c^2\left(\sum_{cyc} S_AS_B\right) = \sum_{cyc} \cancel{a^2} S_A \left[ua^2S_A + vb^2S_B + wc^2S_C\right]$

$0 = 2\left[vb^2(S_A+S_B) + wc^2(S_A+S_C)\right]$

$vb^2c^2 + wb^2c^2 = 0 \Rightarrow v+w=0$

Analogamente $u+w=0$

L'asse radicale tra ω e $\odot(DEF)$ è

$C_1C_2 : ux+vy+wz=0 \qquad C_1C_2 : x+y-z=0$

$\odot CC_1C_2$ e $\odot DEF$ hanno ancora C_1C_2 come asse radicale.

Allora

$\odot CC_1C_2 : \sum_{cyc} a^2yz = (x+y+z)(x+y-z)K_C$

$C \in \odot CC_1C_2$

$-a^2b^2c^2 = 2S_C(a^2+b^2+c^2)K$

$K_C = -\dfrac{a^2b^2c^2}{2S_C(a^2+b^2+c^2)}$

$K_B = -\dfrac{a^2b^2c^2}{2S_B(a^2+b^2+c^2)}$

$\tau : (x+y-z)K_C - (x+z-y)K_B = 0$

$\tau : (x+y-z)S_B = (x+z-y)S_C$

$K = (0, S_C, S_B)$

M il punto di DK

$\vec{M} = \dfrac{\vec{D}+\vec{K}}{2}$ $\qquad D = (a^2, 0, 0)$

$M = (a^2, S_C, S_B)$

$M \in \mathcal{I}$? Verifichiamo.

$$(a^2 + S_C - S_B)\, S_B \overset{?}{=} (a^2 + S_B - S_C)\, S_C$$

$$2 S_C S_B \overset{?}{=} 2 S_B S_C$$

Che è vera.

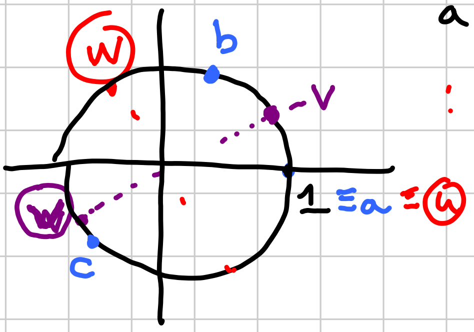
Quindi $M \in \mathcal{I}$. Tesi!

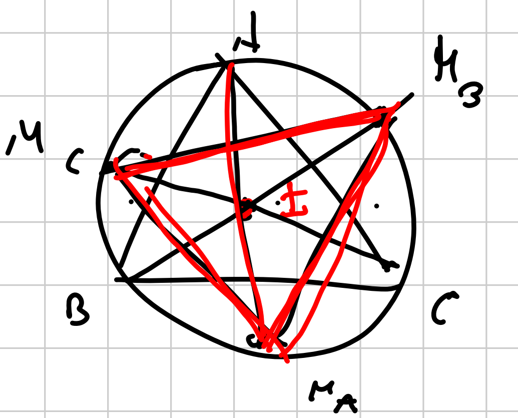
Oss. generale COMPLESSI

Notazione u, v, w

Lemma: esistono u, v, w numeri complessi t.c.

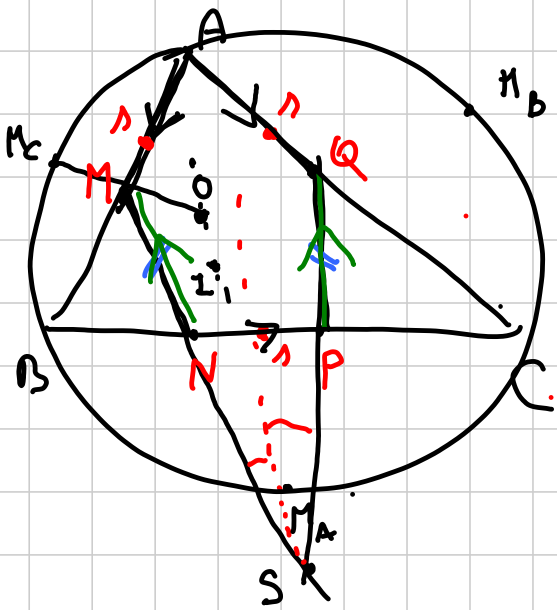
$a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$, $\quad \underset{m_c}{-uv},\ \underset{m_a}{-vw},\ \underset{m_b}{-uw}$ sono i p.ti medi degli archi non contenenti i punti a, b, c, $\quad i = -uv - vw - uw = \sum m_i$





$M_A M_B M_C$

$\vec{H} + 2\vec{O} = 3\vec{G}$



m_a, m_b, m_c i punti medi degli archi relativi.

$\mathcal{J} = m_a + m_b + m_c$

$AM \perp OM_c$

$$-\frac{(m-a)i}{s} = m_c$$

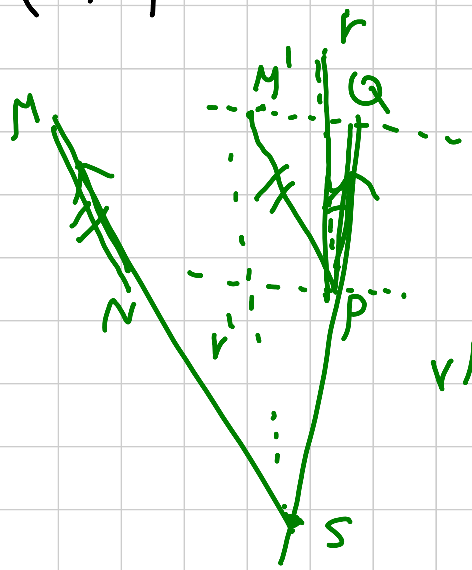
$$\frac{(q-a)i}{s} = m_B$$

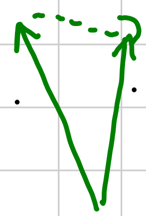
$$-\frac{(p-n)i}{s} = m_a$$

Le sommo

$$\frac{i}{s}(-m + \cancel{a} + q - \cancel{a} - p + n) = m_a + m_b + m_c = \mathcal{J}$$

$$\frac{i}{s}((q-p) - (m-n)) = \mathcal{J}$$





$r \parallel r' \Rightarrow d(QM') \pm d(r')$

$d((q-p)-(m-n))$

$d(\mathcal{J}) \perp d((q-p)-(m-n)) \pm d(r')$

$d(OI)$

$\Downarrow$

$OI \parallel r'$ then ! $\boxed{m}$

WC 2017 - TdN

Note Title 25/01/2017

Esercizio N4

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4} \qquad (m \geq n)$$

Tesi: Se k è un intero, allora k è un quadrato perfetto.

$m+n=x \qquad m-n=y \qquad x>0 \quad y\geq 0.$

$$m = \frac{x+y}{2} \qquad n = \frac{x-y}{2}$$

$$k = \frac{x^2}{2(x+y)y^2+4}.$$

$$x^2 - 2ky^2x - 2ky^3 - 4k = 0.$$

Equazione di 2° grado nella x.

$$\frac{\Delta}{4} = k^2y^4 + \boxed{2ky^3} + 4k \leftarrow$$

voglio che sia un quadrato perfetto.

$$\frac{\Delta}{4} \approx k^2y^4 = (ky^2)^2$$

$$\frac{\Delta}{4} = (ky^2+a)^2 = D$$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2y^4 + \boxed{2aky^2} + a^2$$

$$a \simeq y$$

$$\frac{\Delta}{4} \approx (ky^2+y)^2$$ Vorrei dimostrare che

$$\boxed{(ky^2+y-1)^2 < \frac{\Delta}{4} < (ky^2+y+1)^2}$$

Disuguaglianza a sinistra: equivale a

$$k^2y^4 + y^2 + 1 + \boxed{2ky^3} - 2ky^2 - 2y < k^2y^4 + \boxed{2ky^3} + 4k$$

$$(y-1)^2 - 2ky^2 < 4k$$

$$(y-1)^2 < 2k(y^2+2)$$

$$2k > \frac{(y-1)^2}{(y^2+2)}$$ ovviamente vero.

$$< 1$$

Disuguaglianza di destra:
equivale a

$$k(4-2y^2) < (y+1)^2$$

ovviamente vero per $y \geq 2$ (a sinistra c'è un termine negativo).

Conclusione: se $y \geq 2$ ho necessariamente

$$\frac{\Delta}{4} = (ky^2 + y)^2 = k^2y^4 + 2ky^3 + 4k$$

da cui $y^2 = 4k$

$4k$ è un quadrato $\Rightarrow$ k è un quadrato

Restano i casi $y=0$, $y=1$.

$y=0$ $\qquad k = \frac{4m^2}{4} = m^2$ OK.

$y=1$ $\qquad x^2 - 2kx - 6k = 0$

$$k = \frac{x^2}{2x+6} = \frac{x^2}{2(x+3)}$$

$(x^2, x+3) \mid 9 \qquad x+3 \mid x^2 - 9$

Provando i divisori di 9 non funziona

NS

$\mathcal{P}$ INSIEME DEI PRIMI

$M \subseteq \mathcal{P}$ SUO SOTTOINSIEME NON VUOTO

SE $p_1, p_2, \ldots, p_k$ DISTINTI $\in M$

ALLORA I DIVISORI PRIMI

DI $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1) \in M$.

Th. $M = \mathcal{P}$

---

i) M È INFINITO.

SUPPONIAMO M FINITO E SIANO

$p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ I SUOI PRIMI.

DALL'IPOTESI I DIVISORI PRIMI

DI $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$ STANNO IN M.

SE $q \mid p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, q PUÒ ESSERE UN p_i?

SE $q = p_i$ ALLORA

$q \mid p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \longrightarrow q \mid 1$

PERCIÒ $q \neq p_i$ $\forall_{1 \leq i \leq n}$.

ESISTE UN DIVISORE PRIMO DI $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$?

SÌ, PERCHÉ È ≥ 2.

$q \in M$, MA $q \notin M$ PERCHÉ $q \neq p_i$.

ASSURDO.

M FINITO → ASSURDO

M INFINITO → NON POSSO FARE IL PRODOTTO DEI SUOI ELEMENTI.

⚠ M DEVE PURE ESSERE NON VUOTO

---

ii) LAVORIAMO PER ASSURDO E SUPPONIAMO q PRIMO CON $q \notin M$.

VEDIAMO GLI ELEMENTI DI M MODULO q.

LE CLASSI DI RESTO DI $\mathbb{Z}_q$:

$\{0, 1, \ldots, q-1\}$

SIA C L'INSIEME DELLE CLASSI DI RESTO r TALI CHE ESISTONO FINITI $p_i \in \mathbb{P}$ t.c.
$p_i \equiv r \ (q)$

SIA D L'INSIEME DELLE CLASSI DI RESTO r PER CUI ESISTONO INFINITI $p_i \in \mathbb{P}$ t.c.
$p_i \equiv r \ (q)$

OVVIETÀ: $C \cap D = \emptyset$
$C \cup D = \mathbb{Z}_q$

$0 \in C$ PERCHÉ: QUANTI SONO I PRIMI $\equiv 0 \ (q)$? 0 o 1

SE $-1 \in D$: CHE SUCCEDE!

PRENDO $p \in D$ t.c. $p \equiv -1$ (q)

q DIVIDE $p+1 \to q \in M$: ASSURDO!

M INFINITO $\to$ D HA ALMENO UN ELEMENTO.

PERCHÉ:

PIGEON HOLE SULLE q CLASSI DI RESTO

HO ∞ PRIMI E q CASSETTI.

IDEA: POSSO FARE PRODOTTI A PIACERE DI PRIMI IN M LA CUI CLASSE DI RESTO STIA IN D: NE HO INFINITI.

SIA S L'INSIEME DEI PRODOTTI DEGLI ELEMENTI DI D (ANCHE RIPETUTI), MODULO q.

S SARÀ UN SOTTOINSIEME DI $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ E SARÀ IL SOTTOINSIEME DEGLI ELEMENTI:

$$d_1^{\alpha_1} \cdot d_2^{\alpha_2} \cdot d_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot d_k^{\alpha_k} \; (\text{MODULO } q)$$

CON $d_i \in D$, α_i INTERI POSITIVI.

CHIARAMENTE $D \subseteq S$:

$d \in D \rightarrow d^1 \in S$

$\boxed{1 \in S}$ $\qquad \emptyset \longrightarrow D \in C$

PRENDO UN $d \in D$ A CASO:

$$d^{a-1} \in S \rightarrow 1 \in S$$

A COSA SERVE?

SE $s \in S$ ESISTONO PRIMI $p_1, p_2, \dots, p_n$ IN M TALI CHE:

$$s \equiv p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \quad (a)$$

$$\uparrow$$

$$d_1^{\alpha_1} \cdot d_2^{\alpha_2} \cdot d_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot d_m^{\alpha_m} \qquad \text{con } d_i \in D$$

$$\top$$

↳ d_1 COME CLASSI DI RESTO RAPPRESENTA INFINITI PRIMI DI M, QUINDI ALMENO α_1: POSSO SCEGLIERE PRIMI $p_{1,1}$; $p_{1,2}$; ...; p_{1,α_1} TALI CHE

$$p_{1,j} \equiv d_1 \ (q)$$

PERCHÉ $d_1 \in D \rightarrow$ CE NE SONO INFINITI

LO STESSO PER $d_2, d_3, \dots, d_m$

PERCIÒ:

$$s \equiv d_1^{\alpha_1} \cdot d_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot d_m^{\alpha_m} \equiv \prod_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{\alpha_i} p_{i,j} \right) (q)$$

SONO TUTTI PRIMI DISTINTI CHE STANNO IN M.

QUINDI: SE $s \in S$, ALLORA ESISTONO $p_i \in M$ t.c. $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \equiv s \ (q)$.

RITORNIAMO A C.

ORA PONIAMO

$Z = 1$ SE NON ESISTONO PRIMI IN M CON CLASSE DI RESTO IN C.

$$Z = \prod p$$

p ABBIA CLASSE DI RESTO MODULO q IN C

POSSO DEFINIRLA PERCHÉ QUESTI p SONO FINITI!

CONSIDERIAMO $Zs+1$ MOD q AL VARIARE DI $s \in S$

ZS SARÀ PRODOTTO DI PRIMI DISTINTI DI M: RAPPRESENTATI

- Z È PRODOTTO DI PRIMI DA C OPPURE È 1;
- S È PRODOTTO DI PRIMI RAPPRESENTATI DA D (MODULO q)

PERCIÒ $ZS+1$ MODULO q SI ESPRIME COME $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ CON $p_i \in M$ OPPORTUNI (PRENDENDO TUTTI QUELLI CON CLASSE DI RESTO FINITA)

$\forall s \in S$ ESISTONO $p_i \in M$ t.c.

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \equiv ZS + 1 \ (q)$$

SE $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \rightarrow p \in M$

SE $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ ALLORA $p \in C$?

NO!

PERCHÉ SE $p \in C \rightarrow p \mid Z$, MA $Z \mid p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ PERCHÉ HO SCELTO I PRIMI DI Z TRA I p_i.

PRECISAZIONE IMPORTANTE:

NEI VARI p_i t.c. $\prod p_i \equiv Z_5(4)$ PRENDO TUTTI I FATTORI DI Z.

QUINDI SE $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \rightarrow p \in D \rightarrow p \in S$

$$zS+1 \quad (q)$$

ESISTE $s \in S$ TALE CHE

$zs+1 \notin S$. (INTESO MODULO q)

DIMOSTRAZIONE

SIANO $s_1, \dots, s_n$ GLI ELEMENTI

DI S.

$$zs_i+1 \not\equiv zs_j+1 \; (q)$$ (SE $s_i \equiv s_j$ ⇒ OVVIO)

$$\Updownarrow$$

$z \not\equiv 0\,(q)$ $$s_i \not\equiv s_j \; (q)$$ (SE $zs_i+1 \equiv zs_j+1$ ⇒ $zs_i \equiv zs_j \Rightarrow s_i \equiv s_j$)

SENNÒ $q \in \mathbb{N}$

$$s \mapsto zs+1 \quad \text{MODULO } q$$

$$zs+1 \mapsto s : \frac{(zs+1)-1}{z} = s$$

$\boxed{x \mapsto \frac{x-1}{2}}$ (INVERSA DI $x \mapsto 2x+1$)

SAPPIAMO CHE $1 \in S$.

SAPPIAMO CHE $0 \notin S$ (ALTRIMENTI $2 \in A$)

$1 \mapsto 0$

SE $2s+1$ MANDASSE S IN S, POICHÉ È INIETTIVA, LA SUA INVERSA DOVREBBE MANDARLO IN SE STESSO.

0 ENTRA IN S, QUINDI UN ELEMENTO DI S DEVE USCIRNE.

SE $2s+1$ FOSSE SURGETTIVA (E DOVREBBE ESSERLO SE MANDA S IN S) 1 AVREBBE UNA

CONTROIMMAGINE IN S (MA DOVREBBE ESSERE 0, ASSURDO!).

PERCIÒ $\exists\, t \in S$ t.c.

$zt + 1 \notin S$

PRENDO $z \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = zt$ (q)

DI M

ESISTONO PRIMI $p_1, p_2, \ldots, p_n$ t.c.

$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot z + 1 \not\equiv s \ (q)$

$\forall\, s \in S$.

OPPURE

z INCLUSO NEI p_i

CONSIDERIAMO LA SUA FATTORIZZAZIONE

$r_1^{\beta_1} \cdot r_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot r_m^{\beta_m} = z \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$

SE $zt + 1 \equiv 0 \ (q)$: FINE, PERCHÉ UN QUALCHE $r_i = q$.

Se $zt+1 \not\equiv 0 \ (q)$.

$r_i \pmod q \in C$? No, altrimenti $r_i \mid z$, assurdo

$r_i \pmod q \in D$

$r_1^{\beta_1} \cdot r_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot r_m^{\beta_m} \pmod q \in S$

ASSURDO!

L'assurdo sta nell'aver supposto $zs+1 \not\equiv 0 \ (q)$.

N 6 Sia q un primo; g un polimio

Lemma 1: Se $g(x) = a_K x^K + \ldots + a_0$

$$\sum_{i=0}^{q-1} g(i) \equiv -a_{q-1} - a_{2(q-1)} - \cdots \quad (q)$$

Lemma 2: Se $\deg g \leq q-1$

e $g(i) \equiv 0 \ (q) \ \forall i \Rightarrow g$ è il polinomio nullo modulo q

Lemma 3: Se $\deg \leq q-1$, $d \in \mathbb{N}$

$$g(x+d) = g(x) + d \cdot g'(x) + \frac{d^2}{2} \cdot g''(x) + \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1} g^{(i)}(x) \cdot \frac{d^i}{i!}$$

$g(x) = a_K x^K + \ldots + a_0$

$g'(x) = K a_K x^{K-1} + \ldots + a_1$

"Dim":

$$g(x+d) = a_k (x+d)^k + a_{k-1}(x+d)^{k-1} + \dots$$

$$= a_k(x^k + kdx^{k-1} + \dots) + a_{k-1}(x^{k-1} + (k-1)dx^{k-2} \dots$$

$$+ \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} x^j \binom{i}{j} d^{i-j} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} x^j \frac{i \cdot (i-1) \cdot \dots \cdot (i-j+1)}{j!} d^{i-j} \right)$$

$$= g(x) + d\left[a_k k x^{k-1} + \dots\right] + d^2\left[\binom{k}{2} a_k x^{k-2} + \binom{k-1}{2} a_{k-1} x^{k-3} + \dots\right] + \dots \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$= g(x) + d\,g'(x) + \frac{d^2}{2} g''(x) + \frac{d^3}{3!} g'''(x) + \dots$$

---

a) $\Rightarrow$ b)

Usiamo il lemma 3 su f

Vogliamo $\sum_{i=1}^{n} (a_{i+d} - a_i)^2 = 0$

Sappiamo $a_i \equiv f(i) \ (p)$

Sostituiamo, e vogliamo allora

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\Big(\underset{\underset{df'(x)+\dots}{\shortparallel}}{f(i+d)-f(i)}\Big)}^{2} \equiv 0$$

Se f ha grado $\leq \frac{p-1}{2}$

$\Rightarrow f'$ ha grado $\leq \frac{p-3}{2}$

Tutta la parentesi è un polinomio

con grado al più $\frac{p-3}{2}$

e quindi $(f(x+d)-f(x))^2$

è un polinomio di grado

al più $p-3$

$\Rightarrow$ applichiamo il lemma 1

e la somma $\sum (f(i+d)-f(i))^2 \equiv 0$

$b \Rightarrow a$

- Esiste un polinomio $h(x)$ [unico] tale che $h(i) \equiv a_i \pmod{p}$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(1 - (x-i)^{p-1}\right) \cdot a_i \,.$$

è 0 in $x=i$ $\xrightarrow{\text{elevo a } p-1}$ 0

$\neq 0$ in $x \neq i$ $\longrightarrow$ 1

Sappiamo che

$$\sum_{i=1}^{p} (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv 0$$

$a_{p+d} = a_d$ $\qquad a_{i+d} - a_i =$

$a_{i+d} - a_{i+p}$

$\downarrow$

a meno di una traslazione $j = i+d$, è la stessa di $a_j - a_{j+(p-d)}$

$\Rightarrow$ La condizione del testo

vale per tutti i d !

$$\sum (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv \sum \left(h(i+d) - h(i) \right)^2$$

$$\equiv 2 \sum h(i)^2 - 2 \sum h(i) h(i+d) \equiv 0$$

Usiamo il lemma 3:

$$h(i+d) = h(i) + d\, h'(i) + \dots$$

$$d \sum h(i) h'(i) + d^2 \sum \frac{h(i) h''(i)}{2} + d^3 \sum \frac{h(i) h'''(i)}{3!} + \dots + d^k \sum \frac{h(i) h^{(k)}(i)}{k!}$$

$$\equiv 0 \qquad \forall d = 0, 1, \dots, p-1$$

$k = \deg h \leq p-1$

$$\Rightarrow \quad \sum h(i) h^{(j)}(i) \equiv 0 \quad \forall j$$

$h(x) = a_K x^K + \dots + a_0$

se $K \leq \frac{p-1}{2}$ ok

se $K > \frac{p-1}{2}$

- prendiamo $j = 2K - p + 1 \geq 1$

il polinomio $h(x)\, h^{(j)}(x)$

ha grado $p-1$

$\sum h(i)\, h^{(j)}(i) \equiv 0 \iff a_K \cdot \overbrace{K(K-1)\cdots(K-j+1)}^{\not\equiv 0} a_K \equiv 0$

$\Rightarrow a_K \equiv 0$

assurdo!

Winter Camp. 2017 miscellanea

Note Title 26/01/2017

$\boxed{M4}$?

M_0 insieme non vuoto di numeri interi positivi.

Costruzione induttiva di M_n:

$b_n \in M_{n-1}$

$M_n = \{ b_n m + 1 \mid m \in M_{n-1} \}$

$M_1 = \{ b_1 m + 1 \mid m \in M_0 \}$

$M_2 = \{ b_2 m + 1 \mid m \in M_1 \}$

$= \{ b_2 b_1 m + b_2 + 1 \mid m \in M_0 \}$.

Regola: $M_n = \{ Bm + D \mid m \in M_0 \}$

dove

$B = b_n b_{n-1} \cdots b_1$

$D = 1 + b_n + b_n b_{n-1} + \ldots + b_n b_{n-1} \cdots b_2$ ←

Oss. $D \equiv 1 \pmod{b_n}$

Dimostrazione per induzione. Passo iniziale già visto.

$n-1 \Rightarrow n$

$M_n = \{ b_n m + 1 \mid m \in M_{n-1} \}$

$b_n m + 1 = b_n [(b_{n-1} \cdots b_1) m + 1 + b_{n-1} + b_{n-1} b_{n-2} + \ldots + b_{n-1} \cdots b_2] + 1$

$D = b_n \cdot (1 + b_{n-1} + \ldots + b_{n-1} \cdots b_2) + 1$

Tesi: $\exists n$ per cui $\underset{a \neq b}{a, b \in M_n} \Rightarrow a \nmid b$.

Quando è vero che $Bm + D \mid Bm' + D$ $(m \neq m')$

$Bm' + D = Bm + D + B(m' - m)$

Questo implica

$Bm + D \mid B(m' - m)$

So che

$(Bm + D, b_n) = (D, b_n) = 1$.

$Bm + D \mid b_n \cdot \frac{B}{b_n} (m' - m)$

$a \mid bc \quad (a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$.

$B \leq \boxed{Bm + D \mid \frac{B}{b_n} (m' - m)}$

Oss. 1 $\quad m' - m$ è limitato $(m, m' \in M_0)$

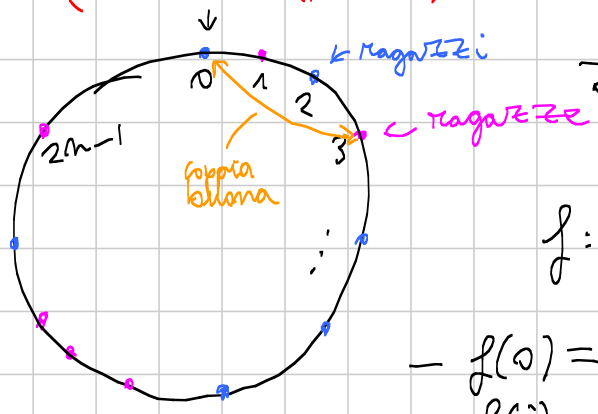
Oss. 2 $\quad b_n \to \infty$. $\quad (b_{n+1} \geq b_n + 1)$

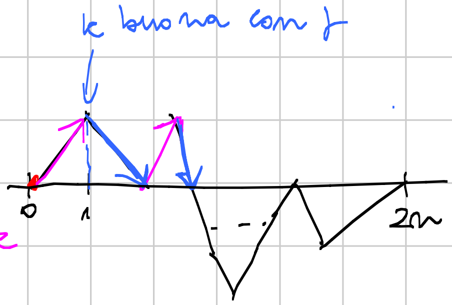
La divisibilità implica per esempio

$\frac{|m' - m|}{b_n} \geq 1 \qquad b_n \leq |m' - m|$

Contro Oss. 1 e Oss. 2. ASSURDO (per n grandi).

M2 (combinatoria)





$f : \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$- \ f(0) = 0$

$- \ f(i) - f(i-1) = \begin{cases} +1 & \text{se } i \text{ è F} \\ -1 & \text{se } i \text{ è M} \end{cases}$

ovvero $f(i) = \#$ F fra 0 e i (compreso) $- \#$ M fra 0 e i (compreso)

ora: j è buona con 0 se $f(j-1) = 0$ e $f(j) = 1$

$\#$ ragazze buone con 0 è $=$
$\#$ "up-step" $0 \to 1$ $= 2017$

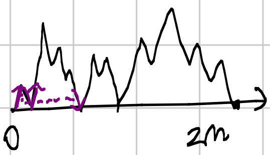
k buona con 0
Chi sono i buoni con k?
j è buono con k se $f(j-1) = 1$, $f(j) = 0$

$\#$ buoni con k $= \#$ "down-step" $1 \to 0$ TESI
$= \#$ "up-step" $0 \to 1 = 2017$

un down-step $1 \to 0$ $\longrightarrow$ prossimo up-step $0 \to 1$

Parentesi a caso:

$$f: \mathbb{Z}/_{2n}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad f(0)=0 \qquad f(i+1)-f(i)=\pm 1$$

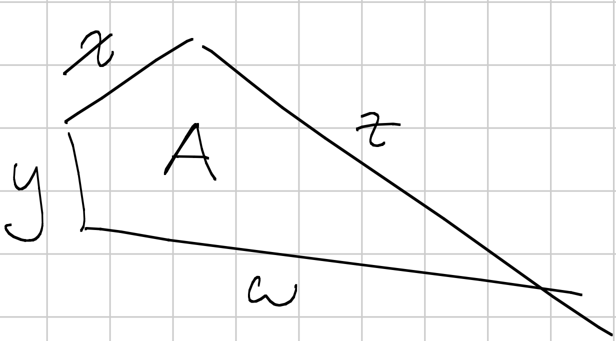


up-step $j \to j+1$ $\longrightarrow$ prossimo down-step $j+1 \to j$

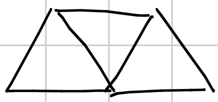
$\#$ funzioni $= C(n) = \#$ alberi piani con n archi

fine parentesi a caso

M3



$$A \le \frac{3\sqrt{3}}{4} z^2$$



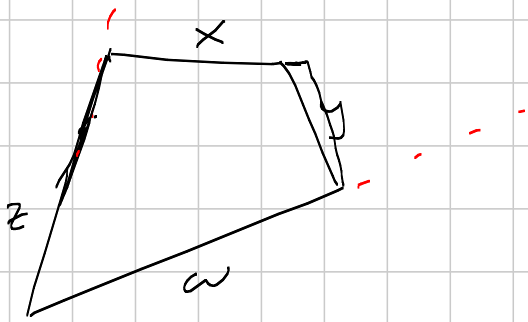
① idea $(x, x, x, 2x)$

$$A \le \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{4} z^2}$$

$w \ge z$

$x \le z \quad y \le z$

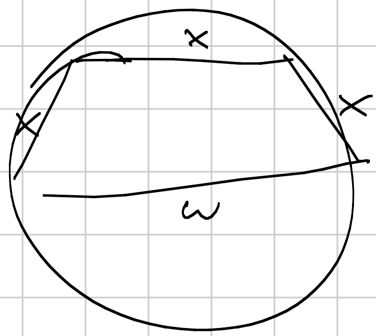
② $x = y = z$ fissato z e w

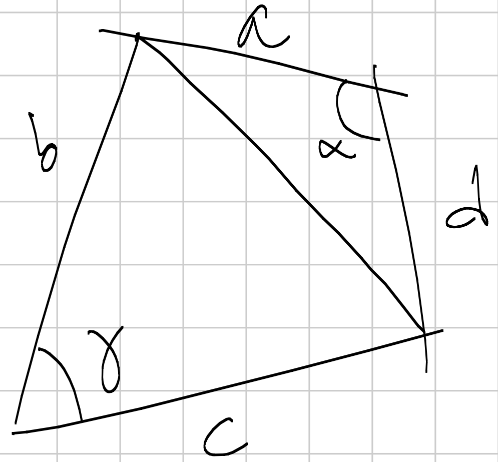


$x < z$
$y < z$

③ $(x, y, z, w) \longrightarrow A_{max}$ ciclico

① + ② + ③





$$A = \frac{ad \sin\alpha}{2} + \frac{bc \sin\gamma}{2}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

$$4A^2 = (ad)^2 \sin^2\alpha + (bc)^2 \sin^2\gamma + 2abcd \sin\alpha \sin\gamma$$

$$\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{4}\right)^2 = (ad)^2\cos^2\alpha + (bc)^2\cos^2\gamma - 2abcd\cos\alpha\cos\gamma$$

$$A = \sqrt{\underline{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} - \frac{1}{2}abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

$$A \leq \sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-w)} \overset{H}{\leq} \frac{3\sqrt{3}}{4} z^2$$

Strada 1

$$\sqrt{(x+y+z-w)(x+y-z+w)(x-y+z+w)(-x+y+z+w)}$$

$$\overset{H}{\leq} 3\sqrt{3} z^2$$

$$(3z-w)(z+w)^3 \leq 27 z^4$$

$$\sqrt[3]{\boxed{(3z-w)}}\,(z+w)(z+w)(z+w)$$

Strada 2

$$\underbrace{(x+y+z-w)}_{a}\underbrace{(x+y-z+w)}_{b}\underbrace{(x-y+z+w)}_{c}\underbrace{(-x+y+z+w)}_{d} \overset{H}{\leq} 27 z^4$$

$$a \leq b \leq c \leq d$$

$$abcd \leq \frac{27}{4^4}(a-b+c+d)^4$$

$$x+y+z-w = a$$
$$-(x+y-z+w) = b$$
$$x-y+z+w = c$$
$$-x+y+z+w = d$$

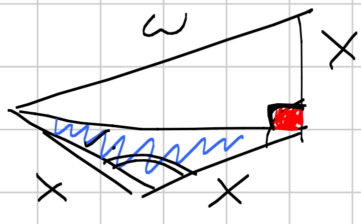
$$abcd \leq ac^2d \leq ad^3$$

$$(a-b+c+d)^4 = (a+d+(c-b))^4$$
$$\geq (a+d)^4$$

$$z = \frac{a-b+c+d}{4}$$

$$ad^3 \leq \frac{27}{4^4}(a+d)^4 \qquad a = \frac{d}{3}$$

$$\frac{a + \frac{d}{3} + \frac{d}{3} + \frac{d}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{ad^3}{27}}$$



Strada boh