WC 2017 - Combinatoria

C6

$A \subseteq \mathbb{N}$ $\quad M \in \mathbb{N}$ $M > 0$ e supponiamo che $\forall n \geq M$ esiste una espressione unica di n come somma di un numero dispari di el. di A.

a) Allora $\exists$ intero positivo P t.c. $\forall n \geq P$ si scrive come somma di un numero pari di el. di A

b) $0 \in A$

Se A non è infinito, non può soddisf. ipotesi.

$$A = \{ a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k < \dots \}$$

Espansione dispari di n = un modo di scrivere n come somma di un # dispari di el. di A

Espansione pari ...

Oss. Se $M < a_k < a_j$, allora a_k deve apparire nell'esp. dispari di $a_j - 1$

altrimenti
$$\underbrace{\underset{\underset{M}{\vee\!\!|}}{(a_k - 1)} + a_j + a_{j+1}}_{\text{ha esp. disp.}} = a_k + \underbrace{\overset{\text{non cont. } a_k}{(a_j - 1)} + a_{j+1}}_{\text{ha esp. disp}}$$

non c'è a_k

Oss. 2: allora se $a_j > M$ $\quad a_j > \sum_{M < a_k < a_j} a_k$

$$\Omega = \sum_{a_i \leq M} a_i \qquad \text{Oss.} \Rightarrow \sum_{i<j} a_i < \Omega + a_j$$

Oss. $\Omega \geq M$

Oss. 3 Se $x \geq \Omega$, ha un'esp. pari

se $a_j > x$ $\quad a_{j+1} + x$ ha esp. dispari S

È a_{j+1} in S?

Il max a_k in S è $< a_{j+1}$? $\sum S < \Omega + a_{j+1} <$

$< x + a_{j+1}$ ass.

Il max a_k in S è $> a_{j+1}$?

$x + a_{j+1} < a_j + a_{j+1} < a_k$. per

Quindi a_{j+1} appare in S e $S \setminus \{a_{j+1}\}$ è esp. pari di x

Lemma: $a_k > \Omega > M \quad 2a_{k+1} < a_{k+2}$ se no, $a_{k+2} > a_{k+1} + a_k$

e quindi $\Omega < a_k < a_{k+2} - a_{k+1} \leq a_{k+1}$ e allora $a_{k+2} - a_{k+1}$ ha esp. pari con a_ℓ massimo $< a_{k+1}$ se $A \neq 0$

e quindi a_{k+2} avrebbe esp. dispari $\neq \{a_{k+2}\}$ ass.

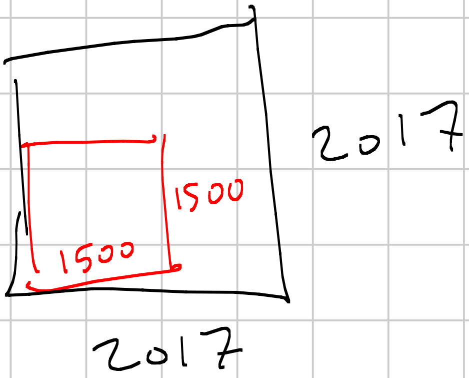
Allora cons. esp. pari di $2a_{k+1} < a_{k+2}$ non contiene $a_{k+2} \Rightarrow$ usa al più a_{k+1}

Anzi, deve usare a_{k+1}, se no $\sum_{i \leq k+1} a_i < \Omega + a_{k+1} < 2a_{k+1}$

Sottraggo a_{k+1} all'esp. pari di $2a_{k+1}$ e ho esp. disp. di $a_{k+1} \neq \{a_{k+1}\}$. assurdo

Per casa: $M=0$ (molto più facile).

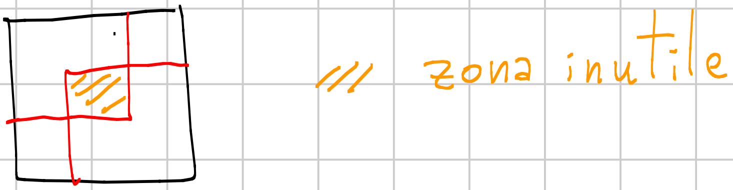
C4



Qual è il minimo numero di sensori?

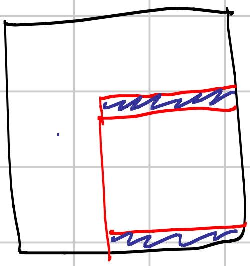
Sol:

Oss 1: la zona centrale è inutile

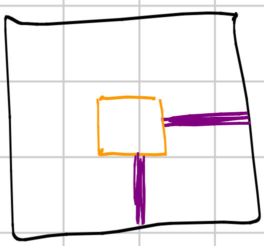


Oss 2: se sposto di 1 il $\square$, qualche sensore deve cambiare

Ci sono 2 strisce la cui unione deve contenere un sensore



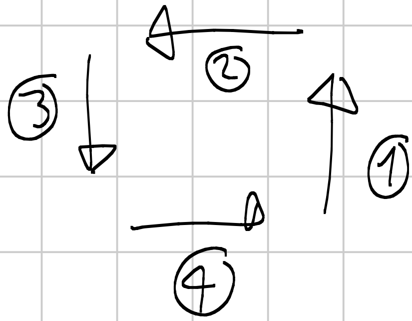
L'esempio segue facilmente



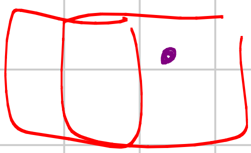
In fatti, l'info che ottiene Alberto sarà in questa forma:

me ne bastano $(2017-1500)\cdot 2$

Oss 3: faccio fare al $\square$ tutto il giro:



Che succede ad un singolo sensore?

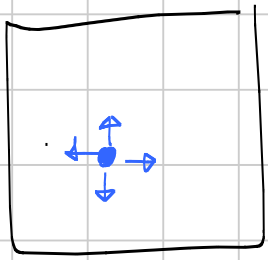


ci sono 2 intervalli di informazione costante
$\Rightarrow$ ognuno cambia stato al massimo 2 volte durante il giro

Conclusione: le mosse sono $(2017-1500)\cdot 4$ e ogni sensore cambia stato al massimo 2 volte, me ne servono almeno la metà.

Si poteva concludere osservando le sbarre di prima con un double counting furbo.

C5 Solitario su una scacchiera



• è una mossa

(per cena: determinare il minimo n t.c. $\forall$ conf. iniziale posso continuare indefinitivamente)

La domanda vera: determinare il max n : $\forall$ conf. iniz. con n, deve fermarsi.

Sol:

Oss. 0: ho solo finite config. con n monete.

$\Rightarrow$ se faccio tante mosse, per Pigeonhole rivedo la stessa config.

Oss. 0.5: allora potrei ripetere le mosse che intercorrono tra queste 2, un numero arbitrario di volte

Oss 1: se non muovo da una casella allora il numero di monete su di lei non scende mai $\Rightarrow$ non può neanche aumentare $\Rightarrow$ non movo neanche su una cas. adiacente

Devo aver mosso almeno su ciascuna casella

Oss 1.5: devo aver fatto lo stesso numero di mosse su ciascuna

In un ciclo devo aver effettuato $2017^2 \cdot k$ mosse, k per ciascuna.

Supponiamo per un momento che $k = 1$

Quindi le mosse verranno effettuate nell'ordine
$c_1, c_2, \dots, c_{2017^2}$

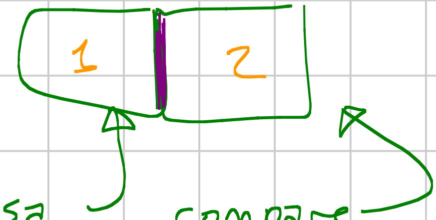
Sia $m_i = \#$ monete su c_i

Allora $m_1 \geq \#$ bordi di c_1
$m_2 \geq \#$ bordi di $c_2 - 1$ eventualmente (se c_1 è adiacente)

$m_i \geq \#$ bordi di $c_i - \#$ di mosse già fatte sulle caselle adiacenti

Sommo tutto:

$$n = \sum m_i \geq \underbrace{\sum \text{bordi}}_{= \#\text{ bordi interni} \cdot 2} - \underbrace{\sum \text{mosse}}_{= \sum_{\text{bordi interni}} 1} \quad *$$

✱ se 

⇒ la mossa … compare

ma non viceversa

Da qui avrei concluso.

Se non so se $k=1$, posso comunque rifare questo conteggio

Le mosse sono

$$c_1^1,\ c_2,\ \dots,\ c_1^2 \quad c_i^j \dots \quad c_1^k \ \dots\ c_{2017}^k \dots$$

$$\dots\ c_{i''}^{j''} \qquad c_{i'}^{j'}$$

è la k-esima volta che muovo su c_1

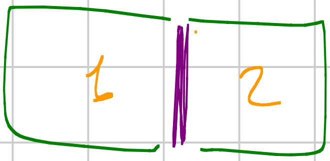
Quando faccio c_i^j

$m_i \geq j \cdot \#\text{bordi di } c_i - \#$ mosse già fatte sulle caselle adiacenti

⊛ ho alcune caselle blu su cui ho mosso prima di c_i^j e erano adiacenti alla c_i

Come prima, sommo su c_i^j

$$\underbrace{\sum m_i}_{k \cdot n \, =} \geq \underbrace{\sum \text{bordi}}_{= \binom{k+1}{2} \cdot \#\text{bordi interni} \cdot 2} - \underbrace{\sum \text{mosse già effett.}}_{\otimes}$$



ci saranno alcune mosse che agiscono su queste 2

$c_1^1, c_1^2, c_2^1, \ldots, c_1^k, c_2^k \quad \otimes$

ho una permutazione di $c_1^1, \ldots, c_1^k ; c_2^1, \ldots, c_2^k$

quante volte trovo in $\otimes$ la mossa c_i^j

tante quante in $\otimes$ trovo dopo c_i^j una c_{3-i}^{*}

, se guardo solo le $c_i^{\bullet}$, ciascuna compare k volte

in totale k^2

Quindi la disuguaglianza torna come prima

Per casa, mostrate che se $\exists$ un ciclo con k su ciascuna casella, allora ne esiste uno con $k=1$.

(oppure confutatelo)

Parziale idea alternativa:

ragionando sulle coppie di adiacenti,

con n monete, almeno n volte non torno indietro

da qui segue che non raggiungo tutto

... si aggiusta, ma non in modo completamente ovvio.

Se $k=1$, si possono numerare le monete in modo che una certa moneta rimanga confinata tra 2.