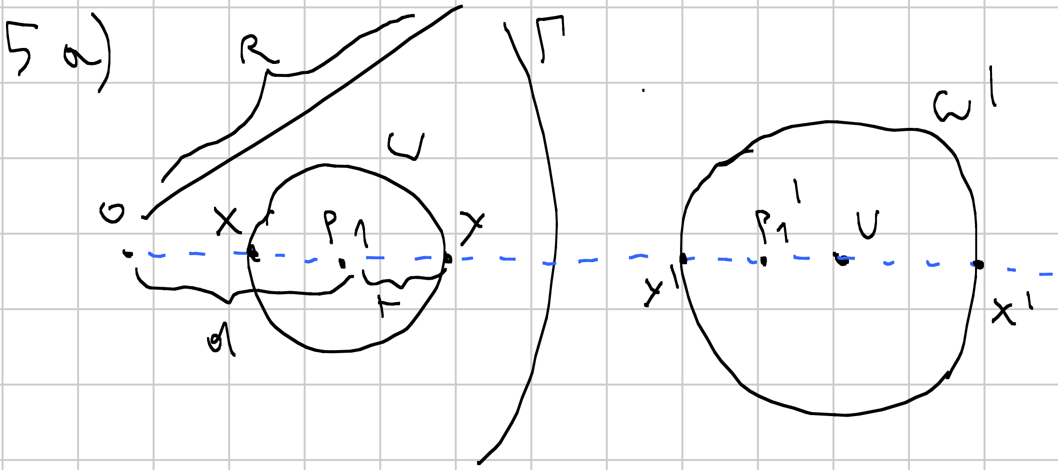
W/C 2017_ Geometria sintetica

Note Title 27/01/2017

5 a)



Se P_1 è il centro di ω la tesi diventa
O, P_1' inversi rispetto a ω'

Se U è il centro di ω' e r' il suo raggio

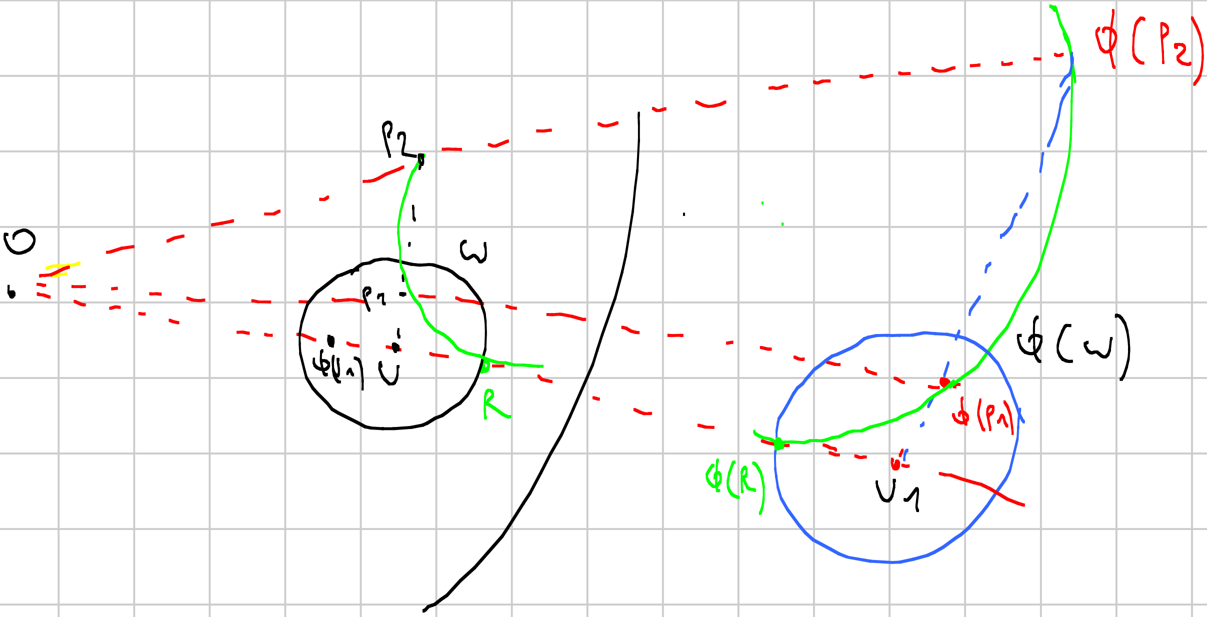
$$r' = \frac{OX' - OY'}{2} = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{1}{d-r} - \frac{1}{d+r}\right) = R^2\frac{r}{d^2-r^2}$$

$$OU = \frac{OX' + OY'}{2} = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{1}{d-r} + \frac{1}{d+r}\right) = R^2\frac{d}{d^2-r^2}$$

$$P_1'U = OU - OP_1' = R^2\frac{d}{d^2-r^2} - \frac{R^2}{d} = R^2\frac{r^2}{d(d^2-r^2)}$$

$$UO \cdot UP_1' = R^4\frac{r^2}{(d^2-r^2)^2} = r'^2$$

Note Title 27/01/2017



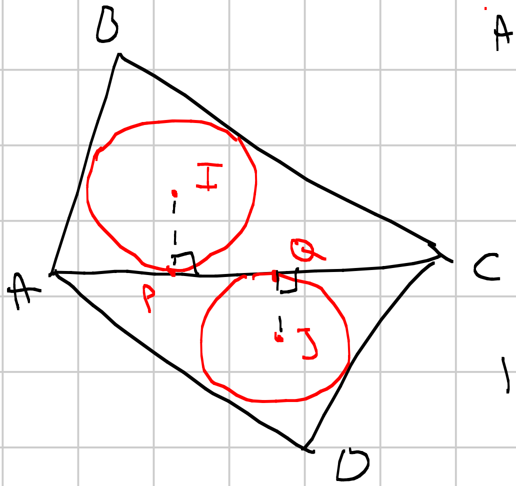
U_1 = centro di $\phi(\omega)$; vorremmo $U_1, \phi(P_1), \phi(P_2)$ all.

Però so (da sopra) che $\phi(U_1)$ e O sono inversi rispetto alla ω $\Rightarrow U\phi(U_1) \cdot UO = r(\omega)^2 = UP_1 \cdot UP_2$
$\Rightarrow O, \phi(U_1), P_1, P_2$ conciclici $\Rightarrow U_1, \phi(P_1), \phi(P_2)$ all.

TS $\Leftrightarrow$ il cerchio $\odot(\phi(R)\ \phi(P_1)\ \phi(P_2))$ tange la retta OU

$\Leftrightarrow$ $\odot(P_1 P_2 R)$ tange OU
vero per ipotesi. $\square$

4a)



ABCD circonscrit $\iff IJ \perp AC$

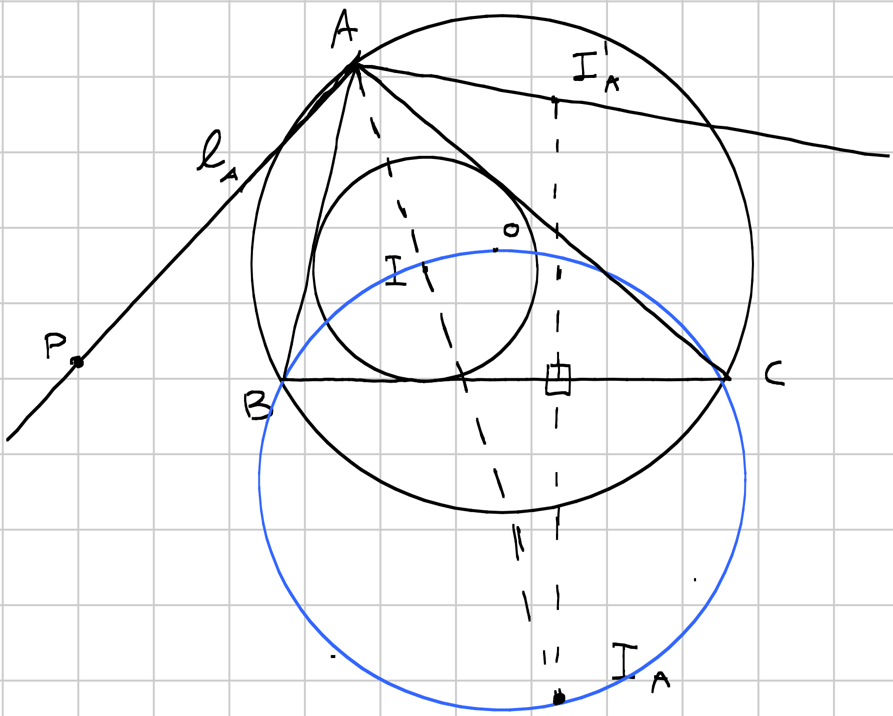
$IJ \perp AC \iff P \equiv Q \equiv IJ \cap AC$

$$2 \cdot AP = AC + AB - BC$$
$$\parallel$$
$$2 \cdot AQ = AC + AD - DC$$

$$\iff AB + DC = AD + BC$$

$\square$

Note Title 27/01/2017



Lemma

$\omega \to BC$

$I_A \quad I_A'$

$\sqrt{AB \cdot AC}$ Segm AI

$B \to C$

$C \to B$

$\overline{BC} \to \odot(ABC)$

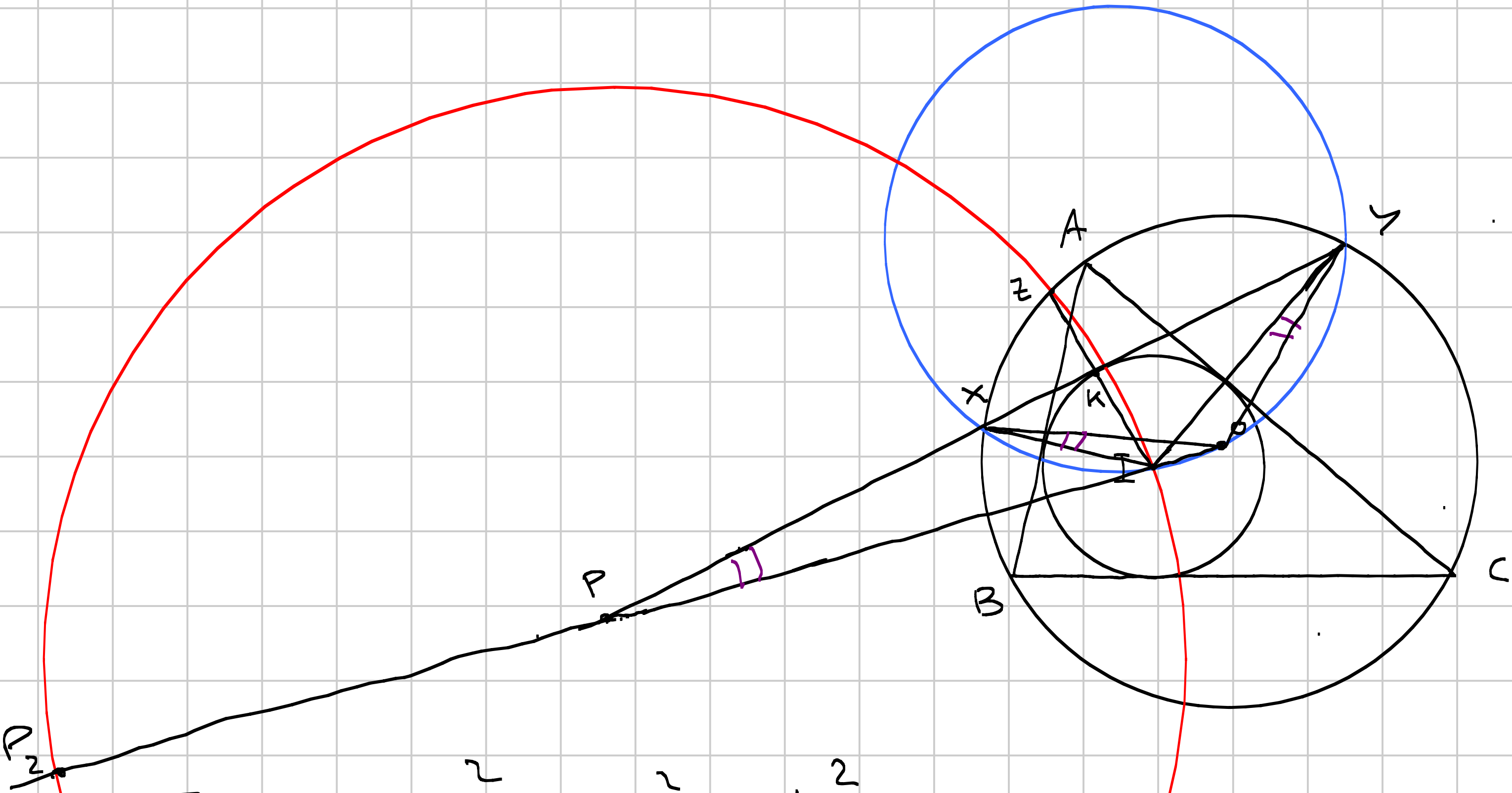
$I \to I_A$

$I_A \to I$

$$BC \downarrow \odot(ABC) \qquad I_A \downarrow I \qquad I_A' \downarrow ? \qquad AI_A' \downarrow l_A$$

$P^* \in l_A \qquad P^* \in l_B$

P



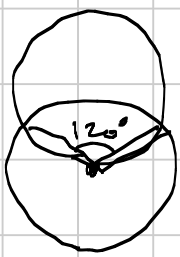
$$OI \cdot OP = R^2 = OX^2 = OY^2$$

$$\frac{OI}{OX} = \frac{OX}{OP} \Rightarrow \triangle P\hat{X}O \sim \triangle X\hat{I}O$$

$$\triangle P\hat{Y}O \sim \triangle Y\hat{I}O$$

$XIOY$ ciclico

$$\widehat{XIY} = 120^\circ \iff \widehat{XOY} = 120^\circ$$

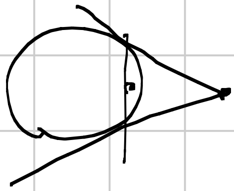


Tesi $\iff \odot(XIOY)$ segm $\odot(ABC)$ wrt XY

Ω di centro P e raggio PI

Siccome $P \in XY$ e P è centro di Ω, $Z = \Omega \cap \odot(ABC)$ è segm di I risp a XY

Idea: invertiamo nell'inscritta



$\odot(ABC)$

$$\begin{array}{ccc} P & \odot(ABC) & I \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P_1 & \text{Feuerbach di } \widehat{DEF} & \infty \end{array}$$

$$IP = \frac{IP_2}{2}$$

$$IP^* = 2\,IP_2^*$$

Oss. Basta $IK = KZ$

(Per congruenza di $\widehat{PIK}$, $\widehat{PKZ}$)

Quindi vorremo $\boxed{IZ^* = \frac{IK}{2}}$

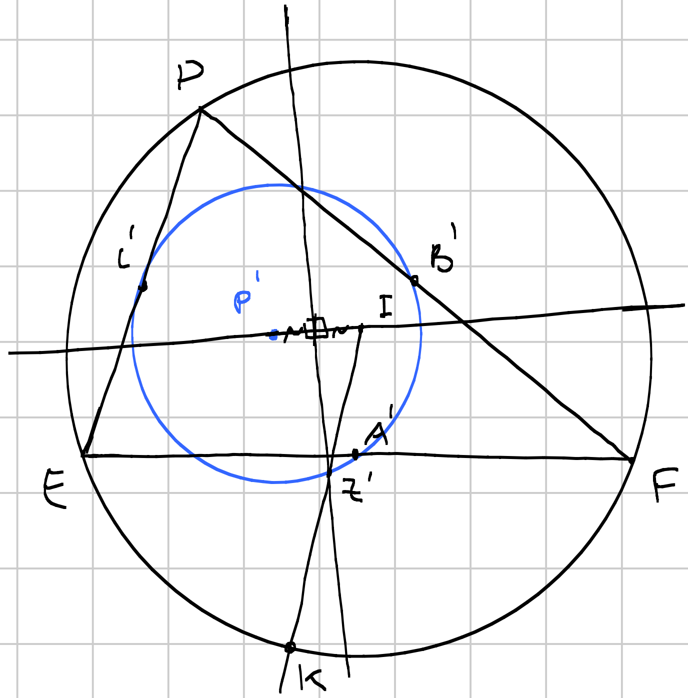
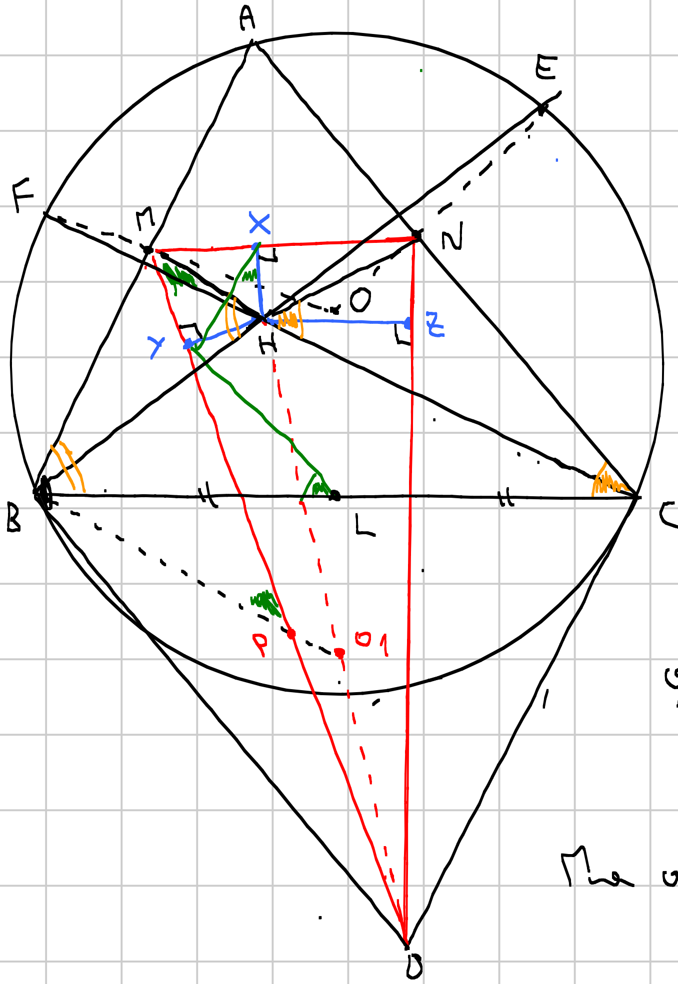


Immagine di Ω passa per pto medio di IP', ed è $\perp$ a IP, per cui è l'asse di IP'

$P'Z' = \frac{R}{2}$ $\quad IZ' = \frac{R}{2}$ $\quad IK = R$

PROBLEMA 6.



OSS. 1 se E, F sono i simm. di H in AB, AC

$\angle(OFB) = 90° - \dfrac{\angle FOB}{2}$

$= 90° - \angle FCB$

$= \angle ABC$

$\Rightarrow \angle(OFB) = \angle(MHB)$

$= \angle(MFB)$ (per simm.)

$\Rightarrow$ O, F, M allineati e così anche O, E, N

OSS. 2 il cerchio di diametro DH passa per B, C, Y, Z

Ma allora $\angle BYC = 180° - \angle BAC$

$= \angle MBD$

e $\angle YCB = \angle YDB = \angle MDB$

$\Rightarrow B\hat{Y}C \simeq M\hat{B}D$. Sia P il pt. medio di DM e sia O_1 il pt. medio di HD. O_1 sta sull'asse di BC (ovvio) e $O_1L = \frac{1}{2}AH$ (per TALETE in $A\hat{H}D$) $= OL$

$\Rightarrow O_1, O$ sono simm. rispp. a BC

Ora $\angle ABO_1 = \angle ABC + \angle CBO_1 = \angle ABC + \angle OBC$

$= \angle ABC + \angle ABH = \angle MHB + \angle(ABH) = \angle AMH$

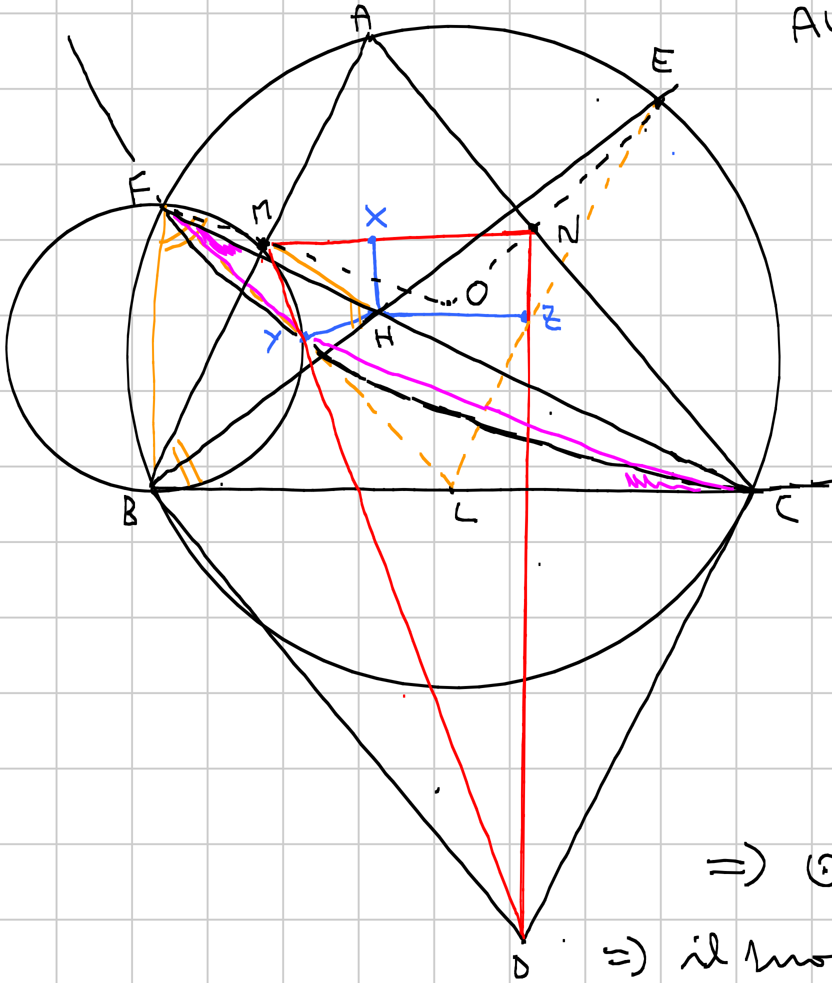
$\Rightarrow BO_1 \parallel MH \Rightarrow$ sapendo che $MH \parallel PO_1$ (TALETE) vale B, P, O_1 sono allineati.

Ora $B\hat{Y}L \simeq M\hat{B}P \Rightarrow \angle BLY = \angle MPB = \angle YMH$

$= \angle YXH$ (MXYH ciclico)

Analogamente $\angle CLZ = \angle ZXH \implies$

$$\angle YLZ = 180° - \angle BLY - \angle CLZ = 180° - \angle YXH - \angle ZXH$$
$$= 180° - \angle YXZ \implies XYZL \text{ ciclico.}$$



AUDACE OSSERVAZIONE:

$\angle BYD = \angle BCD = \angle CBA$

$= \angle MHB = \angle BFM$

$\implies BFMY$ è ciclico

ed è tangente a BC.

Calcoliamoci $\angle YFH$

$= \angle BFH - \angle BFY$

$= \angle BAC - \angle BMY$

$= \angle (OM, AC)$

$= \angle (OM, OB) = \angle MOB$

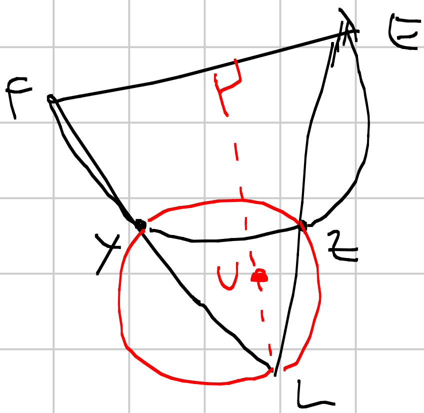
$= \angle YCB$

$\implies \odot(YFC)$ tange BC

$\implies$ il suo asse radicale con $\odot(BFMY)$ che è FY passa per L. Inoltre

$LY \cdot LF = LB^2 = LC^2 = LZ \cdot LE \implies$

$YFEZ$ è ciclico



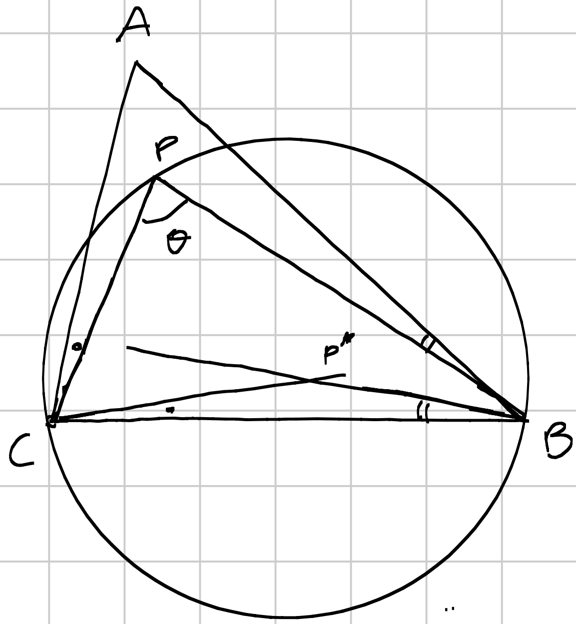
$\implies YZ$ e EF sono antiparallele risp. all'angolo $\widehat{LF, LE}$

$\implies LU \perp EF$

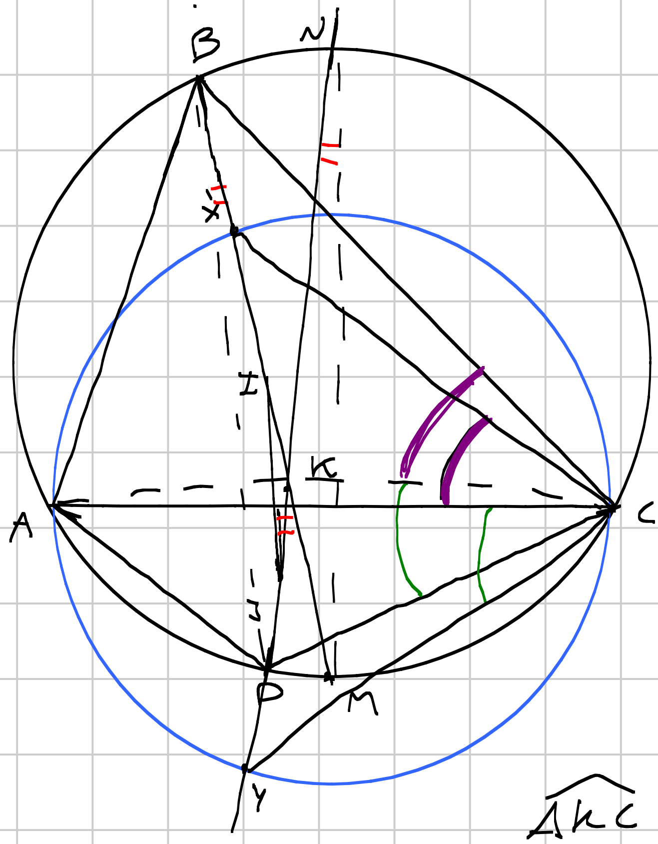
Se E_1, F_1 sono i piedi delle altezze di ABC $\implies$  $\implies EF \parallel E_1F_1$

Se J è il centro di $\odot(LE_1F_1)$

$LJ \perp E_1F_1$ perché $LE_1 = LF_1 \implies L, U, J$ all. $\square$



$$\angle(P^*A, P^*C) =$$
$$= \angle(P^*A, AB)$$
$$+ \angle(AB, AC) +$$
$$+ \angle(AC, BC) +$$
$$+ \angle(BC, P^*C) =$$
$$= \underline{\angle(AC, AP)} +$$
$$\underline{\angle(AB, AC)} +$$
$$\underline{\angle(AC, BC)} +$$
$$\underline{\angle(PC, AC)} =$$
$$= \angle(PC, AP) +$$
$$\angle(AB, BC) =$$
$$\angle(P^*A, P^*C) = -\angle(AP, PC) + \angle(AB, BC)$$
$$\theta$$
$$-\theta + \alpha$$
$$\pi - \theta + \alpha$$



$M, N \in$ Asse AC

$MN \perp AC$

$\widehat{DBM} = \widehat{DNM}$

$\widehat{IJK}$ // $\Rightarrow IJ // MN$.

$ABCD$ é circoscr.

$$\widehat{AKC} = 2\pi - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} - \widehat{D}$$

$$\widehat{AX^*C} = \pi + \widehat{B} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \widehat{B}$$

$$\pi - \widehat{D} = \widehat{B} \qquad \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{AKC} = \pi + \widehat{B} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \widehat{B}$$

$X^* = BX \cap \odot(X^*AD)$