Winter Camp 2017

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

WC 2018

ALGEBRA

Note Title 25/01/2018

A4 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{x f(y)}\right) = f(y) \qquad \forall x, y > 0$$

$$\frac{y}{f(x+1)} \overset{?}{=} \frac{x+1}{x f(y)} \qquad \begin{cases} x+1 = y \\ y = \frac{x+1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad f\left(\frac{2}{f(2)}\right) = \frac{1}{2} f(2)$$

$$\frac{2}{f(2)} \xrightarrow{f} \frac{f(2)}{2}$$

$$\frac{x+1}{x f(y)} \neq y \qquad \forall x, y$$

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \neq y f(y) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y f(y) \le 1 \quad \forall y}$$

uguaglianza per $y = \frac{2}{f(2)}$

$$f(y) \le \frac{1}{y}$$

$$\boxed{f(y) = f(A) + f(B) \le \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{f(x+1)}{y} + \frac{x f(y)}{x+1}} \le \frac{1}{y(x+1)} + \frac{x}{y(x+1)} = \frac{1}{y}$$

(S. Di Marino)

$y \leftarrow \frac{2}{f(2)}$ tutte uguaglianze $\qquad$ $\frac{2}{f(2)} = 4$

$$f(A) = \frac{1}{A} = \frac{f(x+1)}{y} \qquad f(B) = \frac{1}{B} = \frac{x f(y)}{x+1} \qquad f(x+1) = \frac{1}{x+1} \quad \forall x$$

(non si chiude)

$$\frac{f(y)}{x+1} \le \frac{f(x+1)}{y} \iff y f(y) \le (x+1) f(x+1) \qquad \forall x, y$$

$$\Rightarrow \boxed{y f(y) = k \qquad \forall y > 1}$$

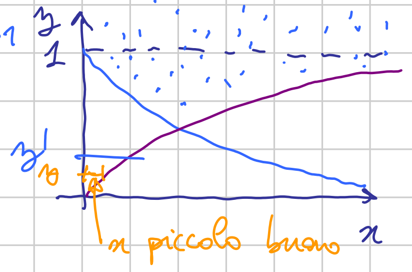
$$\frac{k}{y} = f(y) = f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{x f(y)}\right) = k \frac{f(x+1)}{y} + k \frac{x f(y)}{x+1} = k^2 \cdot \frac{1}{y} \qquad \forall y > 1$$

$y > 1$

$$\frac{y}{f(x+1)} \ge y(x+1) \overset{!}{\ge} 1$$

$$\frac{x+1}{x f(y)} \ge \frac{(x+1)y}{x} \overset{!}{\ge} 1$$

$$\boxed{k = 1}$$



$$f(z) = f\left(\frac{z}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{x f(z)}\right) = f\left(z(x+1)\right) + \frac{x}{x+1} f(z)$$

piccolo

sopra viola

$$f(z) = f(\underbrace{z(x+1)}_{z'>z})(x+1) = f(z')(x+1) = f(z'(x+1))(x+1)^2 = f(z(x+1)^2)(x+1)^2$$

$\forall x < \bar{x}(z)$

$$= \dots f(z(x+1)^n)(x+1)^n$$

$$= \frac{1}{z(x+1)^n}(x+1)^n = \frac{1}{z}$$

$\boxed{A5}$ $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a}{b^3+4} \geq ?$ $\displaystyle\sum_{cyc} a = 4$ $a \geq 0$

$a = b = c = d = 1 \rightarrow \frac{4}{5}$

$\boxed{a = b = 2 \quad c = d = 0 \rightarrow \frac{2}{3}}$

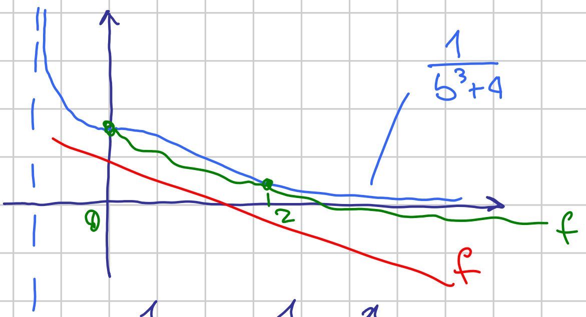
$c = d = 0 \quad a + b = 4 \dashrightarrow a = 2, b = 2$ minimo

$\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a}{b^3+4} \geq \frac{2}{3}$ Titu's Lemma $\varnothing$ non è sharp su 0,2

Dovrò stimare i singoli addendi

(Strada I) $\displaystyle\frac{a}{b^3+4} \geq a f(b)$

più semplice



$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{12}$$

$$\frac{1}{x^3+4} \geq \frac{1}{4} - \frac{x}{12} \iff 12 \geq (x^3+4)(3-x) = 3x^3 - x^4 + 12 - 4x$$

$$\iff 0 \geq -x(x^3 - 3x^2 + 4) = -x(x-2)(x^2-x-2) = -x(x-2)^2(x+1)$$

ok!

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b^3+4} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{a}{4} - \frac{ab}{12}\right) = 1 - \sum_{cyc} \frac{ab}{12} \overset{?}{\geq} \frac{2}{3} \iff \sum_{cyc} ab \leq 4$$

(Strada II)

$$\frac{2}{3} \overset{?}{\leq} \sum_{cyc} \frac{a}{4+b^3} \leq \sum_{cyc} \frac{a}{4} = 1$$

$$1 - \sum_{cyc} \frac{a}{4+b^3} = \sum_{cyc} a\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4+b^3}\right) = \frac{1}{4} \sum_{cyc} \frac{ab^3}{b^3+4} \overset{?}{\leq} \frac{1}{3}$$

$$\frac{ab^3}{b^3+4} \leq ? \qquad b^3+4 = \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}2^3 \geq \frac{3}{2}\, 2b^2 = 3b^2$$

$$\leq \frac{ab}{3} \qquad \frac{1}{4} \sum_{cyc} \frac{ab}{3} \leq \frac{1}{3}$$

Conclusione

$\sum_{cyc} ab$

$$4^2 = (a+b+c+d)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab + 2(ac+bd)$$

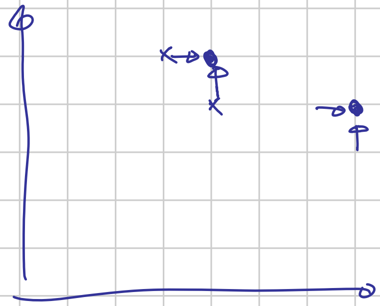
$$(a-b+c-d)^2 = \sum a^2 - 2\sum ab + 2(ac+bd)$$

$$4^2 \geq 4^2 - (\quad)^2 = 4\sum_{cyc} ab$$

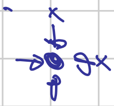
Fine

$$f : \mathbb{Z}^2 \to [0,1]$$

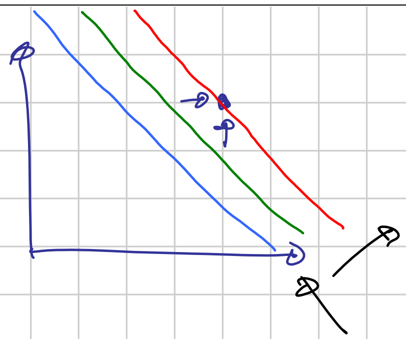
$$f(x,y) = \frac{f(x-1,y) + f(x,y-1)}{2}$$



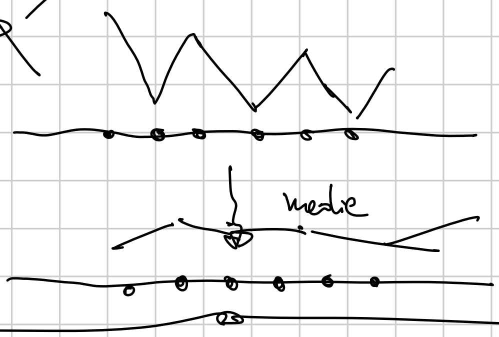
ES: griglia in cui il valore di ogni punto è la media dei 4 intorno



se $\exists M$ t.c. $f(x,y) \leq M \ \forall x,y$, allora sono tutti uguali

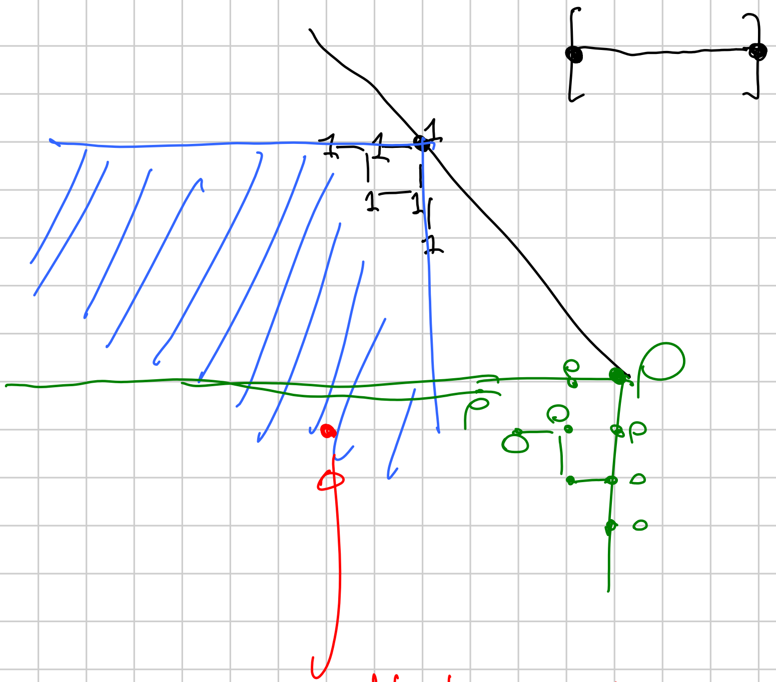


blu determina verde che determina rosso, facendo delle medie



$1 = \frac{1+1}{2}$ è l'unico modo di scrivere 1 come media di due valori $[0,1]$

$0 = \frac{0+0}{2}$ è l'unico modo -- 0

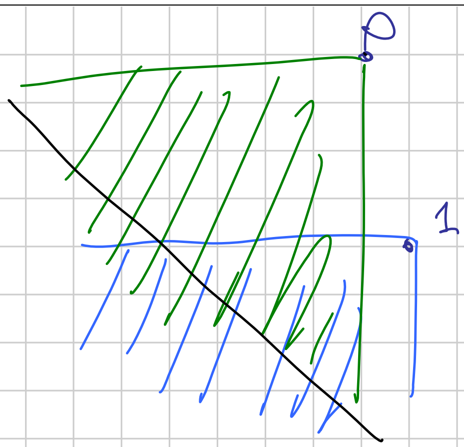


Se ho un 1 nella funzione, in basso e a sinistra devono esserci degli uni $\Rightarrow$ ho un intero "quadrante" di uni

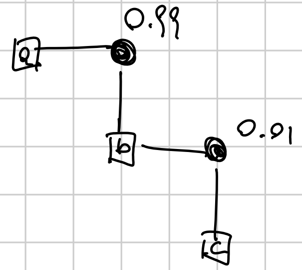
E la stessa cosa per 0

ogni punto nell'intersezione di questi quadranti non può essere sia 0 che 1 $\Rightarrow$ assurdo!

$\Rightarrow$ Non posso avere sia 0 che 1 contemporaneamente



Posso ottenere adiacenti 0.99 e 0.01?



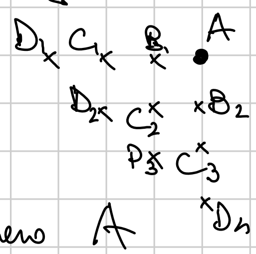
$$0.99 = \frac{a+b}{2} \le \frac{1+b}{2}$$

$$\Rightarrow b \ge 0.98$$

$$0.01 = \frac{b+c}{2} \ge \frac{b+0}{2}$$

$$\Rightarrow b \le 0.02$$

assurdo!



B_1, B_2 determinano A

C_1, C_2, C_3 determinano A

D_1, D_2, D_3, D_4 determinano A

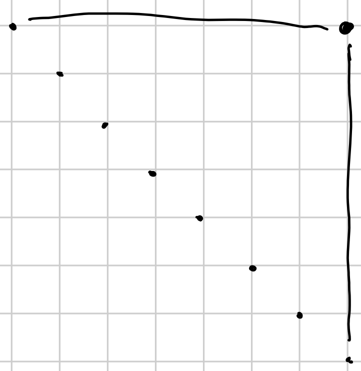
$$f(x,y) = \frac{f(x-1,y) + f(x,y-1)}{2} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x-2,y)+f(x-1,y-1)}{2} + \dfrac{f(x-1,y-1)+f(x,y-2)}{2}}{2}$$

$$= \frac{f(x-2,y)+2f(x-1,y-1)+f(x,y-2)}{4}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{4} \qquad \frac{1}{4}$$

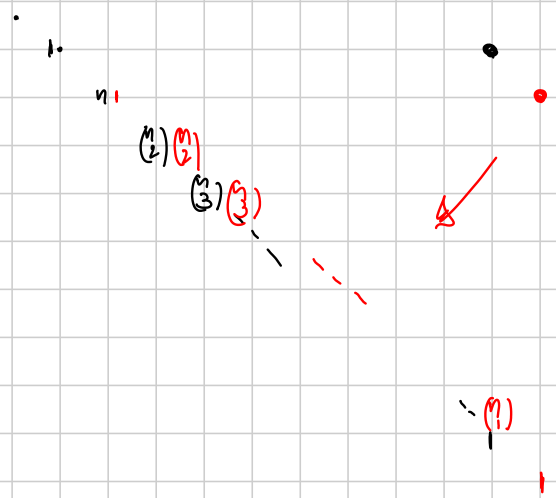
$$= \frac{\boxed{1}f(x-3,y)+\boxed{3}f(x-2,y-1)+\boxed{3}f(x-1,y-2)+\boxed{1}f(x,y-3)}{8}$$



(*)

$$= \frac{\binom{n}{0}f(x-n,y)+\binom{n}{1}f(x-n+1,y-1)+\dots+\binom{n}{n-1}f(x-1,y-n+1)+\binom{n}{n}f(x,y-n)}{2^n}$$

$\frac{1}{2^n}$



Esempio:

$$f(x,y)\cdot 2^4$$

$$f(x-5,y+1)\quad f(x-4,y)\quad f(x-3,y-1)\quad f(x-2,y-2)\quad f(x-1,y-3)\quad f(x,y-4)$$

$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

1 uguale 4 uguali 4 uguali 1 uguale

$$f(x-1,y+1)\cdot 2^4$$

10 termini uguali
6 diversi

Quanti sono i termini uguali

$$2^n\left[f(x,y)-f(x-1,y+1)\right]=\Bigg(f(x-n,y)+\binom{n}{1}f(x-n+1,y)+\dots+\binom{n}{n-1}f(x-1,y-n+1)+\binom{n}{n}$$

$$-f(x-n-1,y+1)-\binom{n}{1}f(x-n,y)-\dots-\binom{n}{n}f(x-1,y-n+1)\Bigg)$$

(semplificando termini uguali) $\boxed{n=2m}$

$$=\binom{2m}{m}\text{ termini col segno }\oplus\qquad\binom{2m}{m}\text{ termini col segno }\ominus$$

$$\leq\binom{2m}{m}\cdot 1-\binom{2m}{m}\cdot 0=\binom{2m}{m}$$

$$\Rightarrow\quad f(x,y)-f(x+1,y-1)\leq\frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}}$$

(rapporto tra il binomiale centrale e la somma di tutti i binomiali)

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \qquad \frac{6}{16}$$

$$1 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 10 \quad 6 \quad 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{10}{64}$$

È vero che $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ tende a 0?

$$n! = \frac{n^n}{e^n}\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot\left(1+o(1)\right)$$

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \approx \frac{1\,(2n)!}{2^{2n}\, n!\, n!} = \frac{1}{2^{2n}}\,\frac{\frac{(2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}}\, e^{2n}}{\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\, e^n}\,\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\, e^n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

Si riesce anche a dimostrare direttamente che

$$\frac{1}{2^{2n}}\cdot\binom{2n}{n} \to 0\,:$$

Idea:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\, n!} = \frac{2n\cdot(2n-1)\quad\cdot\quad[2(n-1)]!}{n\cdot n\quad\cdot\quad(n-1)!\,(n-1)!} =$$

$$= \frac{\cancel{2n}\,(2n-1)}{n\cdot\cancel{n}}\binom{2(n-1)}{n-1} =$$

$$\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{2^{2n}} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\binom{2(n-1)}{n-1}\cdot\frac{1}{2^{2(n-1)}} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)\cdot\binom{2(n-1)}{n-1}\cdot\frac{1}{2^{2(n-1)}}$$

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2n-4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

Idea: magari telescopizza!

Se per esempio fosse $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n-2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{\cancel{n-1}}{n}\cdot\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n-3}{\cancel{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{n}$$

non funziona =(

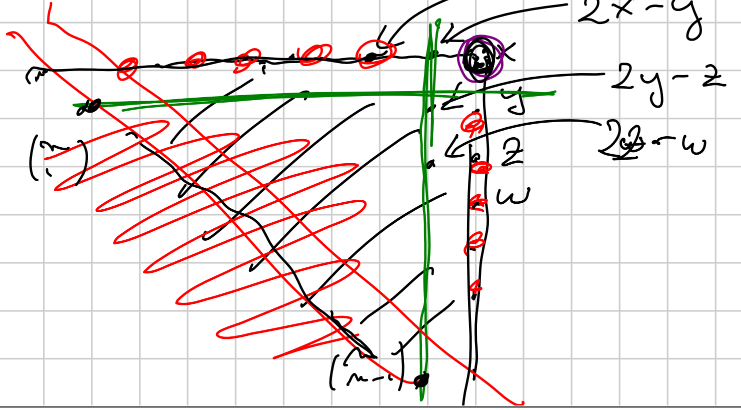
$$\left[\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right]^2 = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^2\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2n-4}\right)^2\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$= (\text{telescopizza}) = \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \leq \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

$4x - 2y - 2y + z = 4x - 4y + z$



≥ 0
≥ 0
≥ 0
≥ 0

$$(2x-y)+(2y-z)+(2z-w) = 2x+y+z-w \geq 0$$

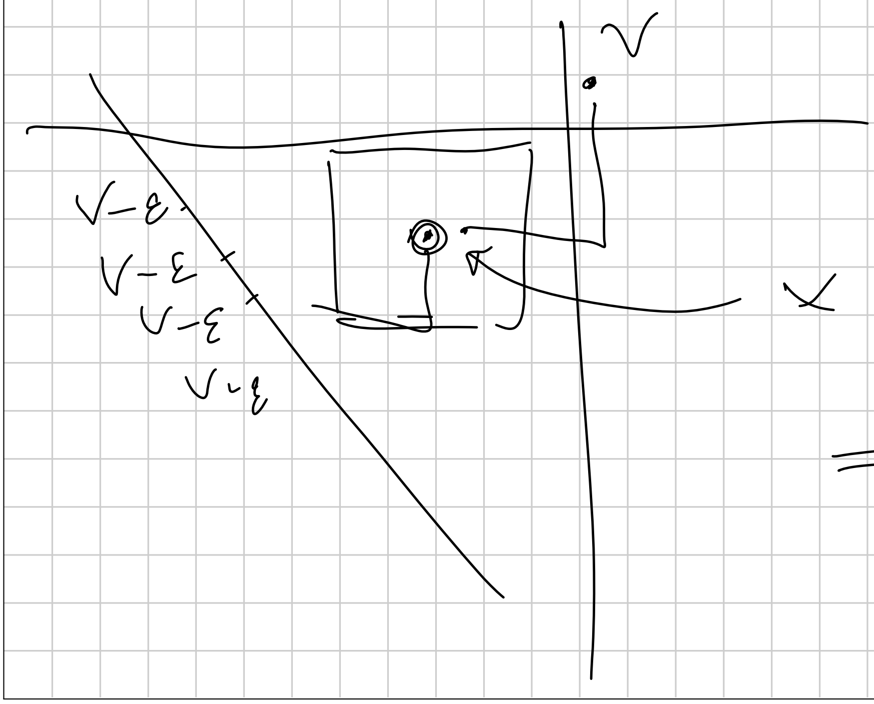
sup (rossi) = p

$$2^n V \leq 2^n p - 2np + 2n$$

Claim: $p = V$ $\qquad p = V-\varepsilon \quad \forall \varepsilon$

$$\forall \varepsilon \ \exists n : \quad p = V-\varepsilon$$

$$\frac{V-p}{1-p} \leq \boxed{\frac{2n}{2^n}} \to 0$$



$V \geq x$

$x \geq V-\varepsilon$

$\Rightarrow \quad x = V$

Combinatoria WC 2018

Titolo nota 26/01/2018

C4) $k \leq n$ $\quad \bar{X}$ e' insieme dei k elementi minori di X

F di sott. di $\{1, \dots, n\}$

$S \in F \quad |S| = k$

$S_1, S_2 \in F \quad \overline{S_1 \cup S_2} = S_1$ e $\overline{S_1 \cup S_2} = S_2$

$n = 7 \quad k = 4$

	1	2	3	4	5	6	7
S_1		•	•	•	•		
S_2			•	•		•	•

OSS i massimi sono tutti distinti

dim $S_A, S_B \quad \max S_A = \max S_B = \xi$

$|S_A \cup S_B| \geq k+1$

$\xi = \max\{S_A \cup S_B\} \notin \overline{S_A \cup S_B}$

$S_A \neq \overline{S_A \cup S_B} \qquad S_B \neq \overline{S_A \cup S_B}$

i massimi appartengono a $\{k, \dots, n\}$

Supponiamo $|F| > n-k+1$

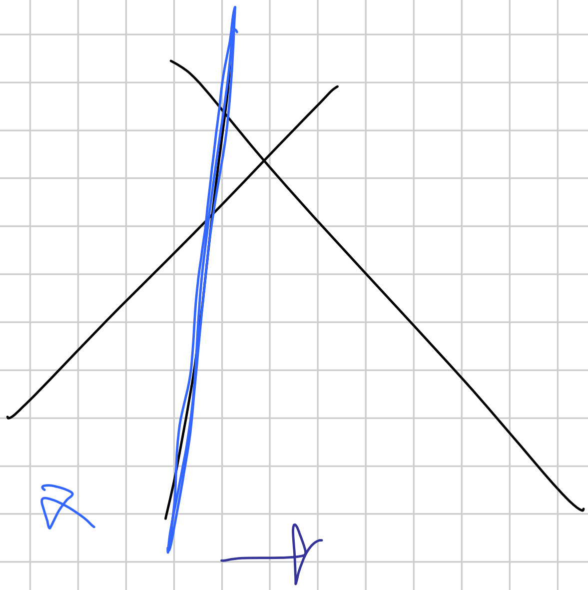
ma allora due insiemi avrebbero lo stesso massimo

$\Rightarrow |F| \leq n-k+1$

$\{1, \dots, k\}$
$\{2, \dots, k+1\}$
$\vdots$
$\{n-k+1, \dots, n\}$

Esempio di F con $n-k+1$ elementi

C5



Osservazione chiave: linearità

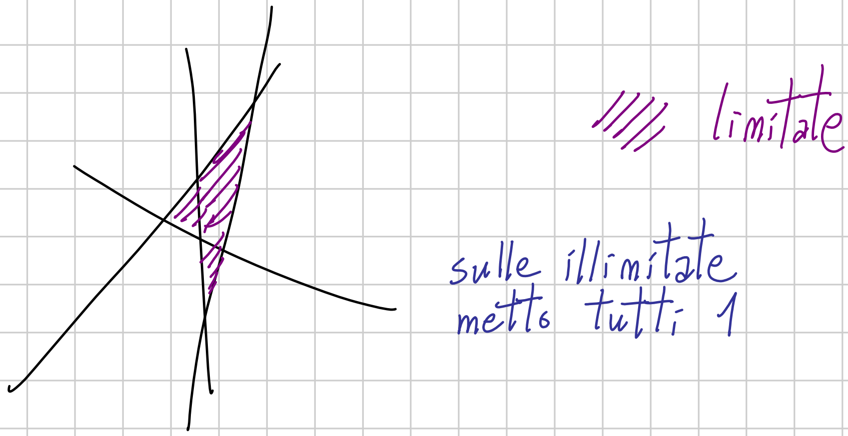
se, fissate le rette, ho 2 conf. funzionanti
$\Rightarrow$ la somma (regione per regione) è funzionante

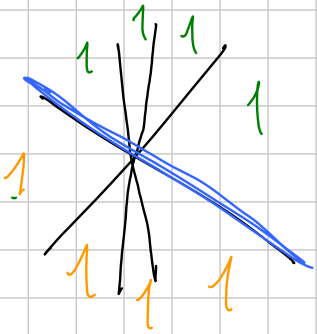
Def: una conf. è "bilanciata" se soddisfa la tesi
a meno del >0 (con numeri razionali)

Conseguenza 1: basta risolvere il problema per numeri razionali

Conseguenza 2: posso cercare di risolvere il problema un po' di regioni alla volta.

Oss 2:

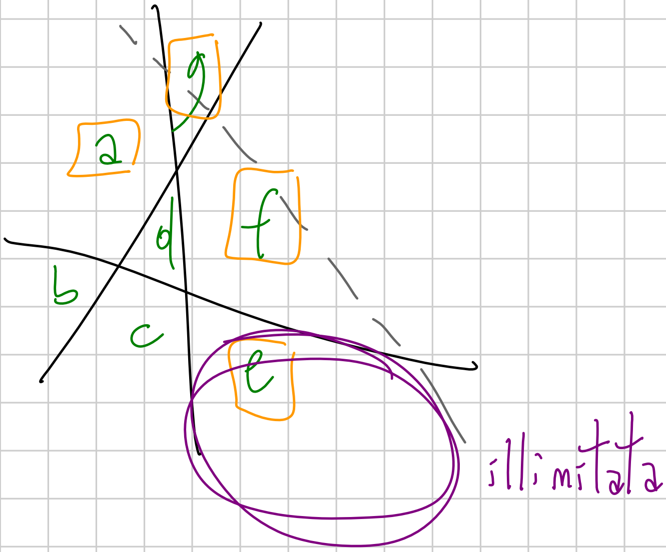




(qui uso che le rette non sono parallele)

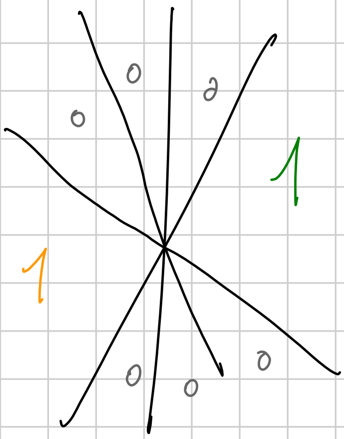
Per concludere

Poss: 1 Induzione (sul numero di rette)

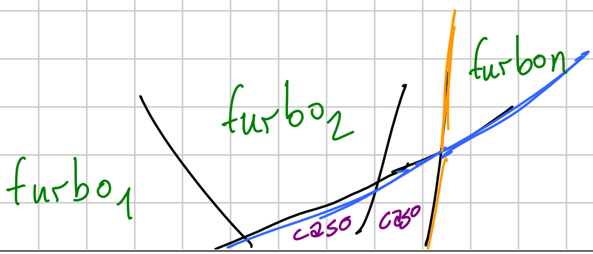


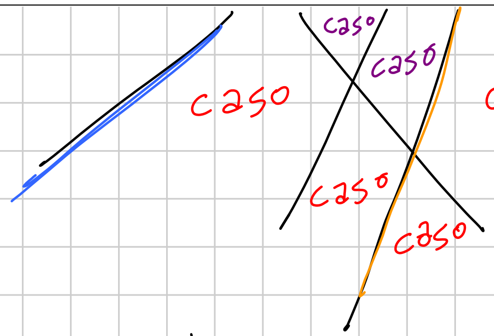
spartisco tutte le altre a caso, ma >0

per l'ultima ho un solo modo



Poss 2:





caso > 0

caso (anche < 0)

step 1: costruisco una bilanciata in questo modo
sulle limitate metto > 0 a caso

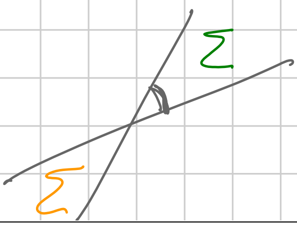
$$\begin{cases} f_1 + \dots + f_n = \text{fissata} & \text{(imponendo la azz.)} \\ f_1 + \dots + f_{n-1} - f_n = \text{fissato} & \text{(imponendo le aranc.)} \\ f_1 + \dots + f_{n-2} - f_{n-1} - f_n = \dots & \\ \\ f_1 - f_2 - \dots - f_n = \dots & \end{cases}$$

$\to \quad 2f_1 = \text{fissato}$

$\to \quad 2f_1 + 2f_2 = \text{fissato}$

Step 2: aggiungo un multiplo abbastanza grande della conf. con 0 dentro e 1 fuori

Oss: al posto del sistema ho condizioni più semplici:



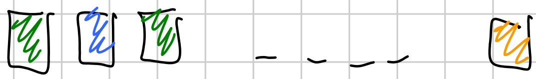
consecutive in senso orario

allora $\Sigma = \Sigma$

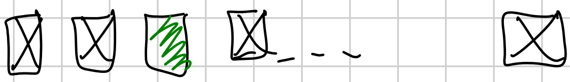
è obbligato

quindi ho un'unica scelta per f_i

C6 lo spettatore sceglie



l'assistente



il mago esclama: è arancione!

Domanda: quante carte servono al min?

Step 1: stimare le configurazioni:

$$2017^n = \underset{\text{dello spett.}}{\#\text{config}} = \underset{\text{risolvibili}}{\#\text{config}} \leq \sum_{\in \text{ conf. viste dal mago}} \# \text{ conf. di partenza t.c. l'ass. può lasciare } \in \text{ e il mago può indovinare}$$

$2017 \cdot n$

2017^{n-2}

$n \geq 2017$

Step 2 Troviamo un esempio:

il mago indica sempre l'ultima carta

se $n = 2018$

l'assistente ha 2017 possibili carte da lasciare scoperte che sono tante quanti i colori dell'ultima.

$n \leq 2018$

Step 3: Se fosse $n = 2017$, allora ⊛ è =

$\Rightarrow$ il mago vede tutte le (pos., colore) $\forall$ conf. scelta dallo spettatore

l'assist. deve avere una sola scelta (altrimenti si sovrappongono)

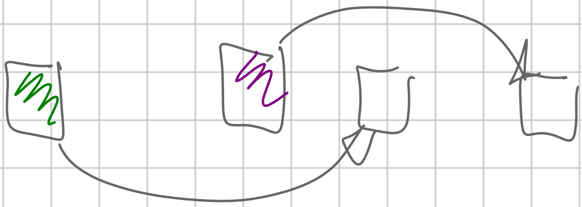
Quindi $\exists\ f$: Posizioni $\times$ Colori $\rightarrow$ Posizioni $\times$ Colori

t.c. (la posizione di $f(i, c)) \neq i$

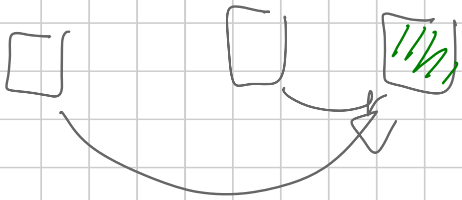
e t.c. $\forall\ i \neq j$, $\forall\ c_i, c_j$

allora le informazioni $f(i, c_i)$
$f(j, c_j)$

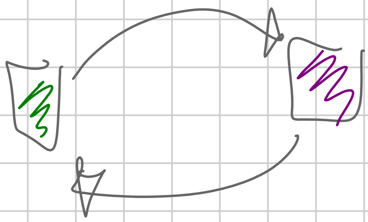
devono essere incompatibili



non può succedere



non entrambe

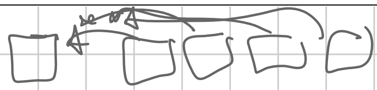


non succede

"

Step 4: fissati i colori di tutte le carte
l'insieme delle carte indicate dalle
è grande al più 2

Step 4 ½: tutte le carte (diverse dalla 1) indicano la 1

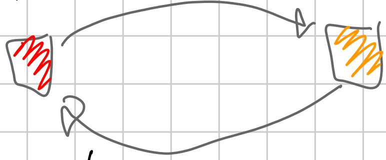


Step 5 : se cambio il colore di una carta
allora tutte indicano ancora la 1

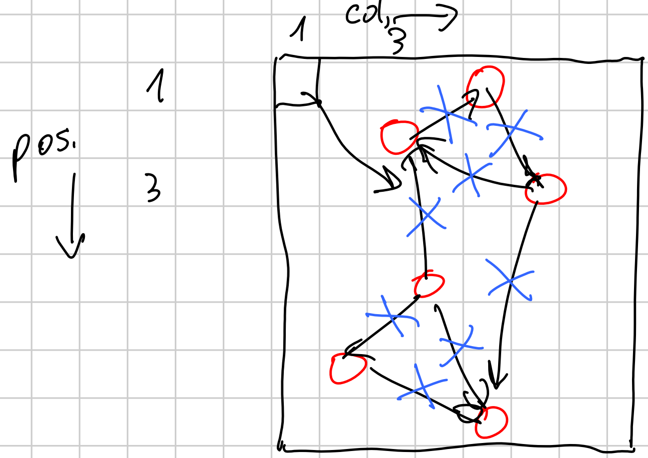
Step 6 : per ogni carta diversa dalla 1, considero
l'insieme di colori indicati sulla 1
allora questi insiemi sono 2016 sottoinsiemi
non vuoti e disgiunti dell'insieme dei colori
$\Rightarrow \exists$ una posizione che indica 1,
indipendentemente dal colore sopra di lei

Step 7

allora, prendo

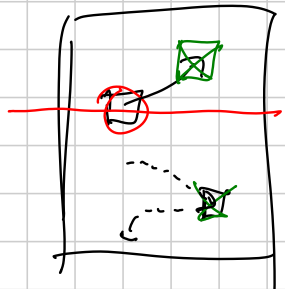


$\square$



2017^2 frecce
uscenti, e entranti
è
1 x cas.

1) $\exists$ casella in cui non arriva niente,



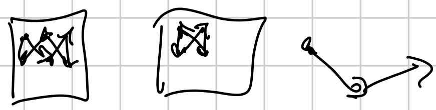
scelgo e elimino

elimino

elimino

elimino 1 casella dalle righe con ancora 2017

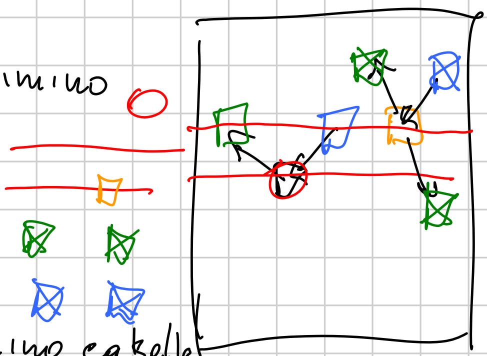
Ok per induzione fatto $n=3$



2) tutte le caselle hanno almeno 1 $\to$ entrante

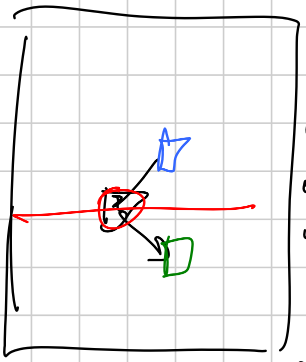
esattamente una!

elimino



elimino caselle dalle righe finché non ne hanno tutte 2015 e vado per induzione

fatti $n=3$ e $n=4$



scelgo

elimino

elimino

elimino

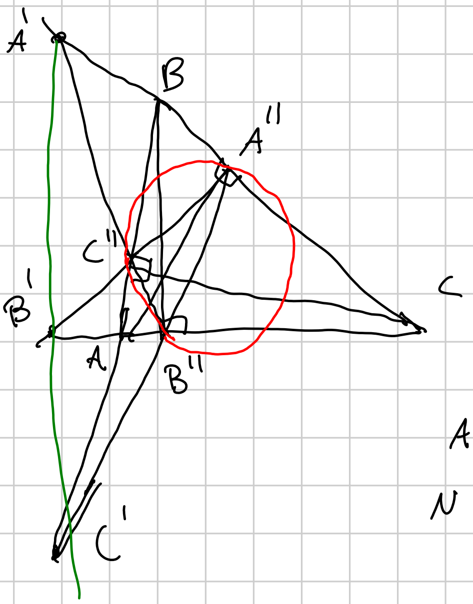
elimino 1 per riga che ne ha 2017 e induzione

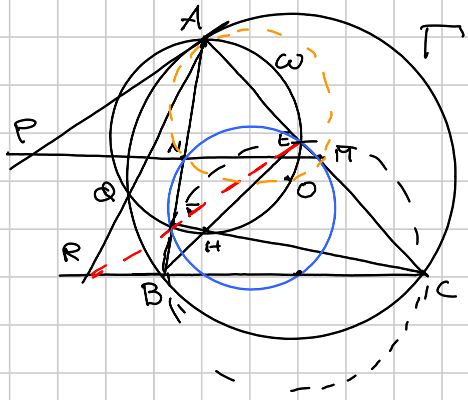
WC-2018-Geometria Sintetica

Note Title 26/01/2018

4

TS: $OH \perp PR$





$BCB''C''$ ciclici

$A'B \cdot A'C = A'C'' \cdot A'B''$

N centro di Feuerbach $NO \perp A'B'$
$\parallel$
HO

Dim:

$BFEC$ ciclico per $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = \frac{\pi}{2}$

$RQ \cdot RA = RF \cdot RE = RB \cdot RC$

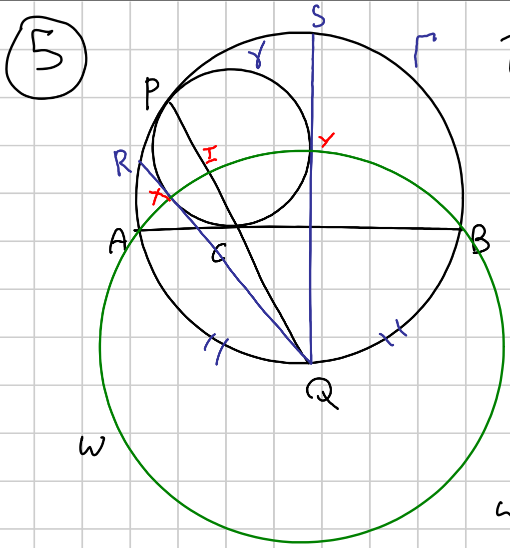
$\Rightarrow BC, EF, AQ$ concorrono perché assi rad. di Γ, ω e $\odot(BFEC)$

TS $\Leftrightarrow$ $P \in$ Asse ortico $\Leftrightarrow PA^2 = PM \cdot PN$

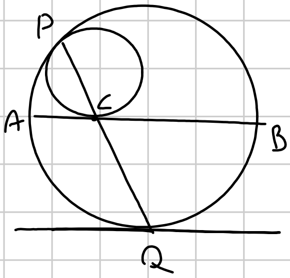
$\odot(AMN)$ tange int Γ in $A \Rightarrow$ Tesi

$\Rightarrow$ (PR è asse ortico)

5



Tesi: $\angle PXI + \angle PYI = 90^\circ$



$\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ}$

$\Downarrow$

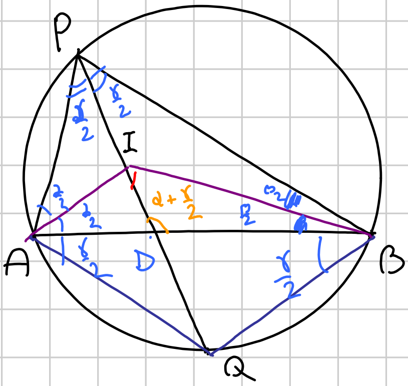
$\angle APQ = \angle QPB$

$\Downarrow$

$Q \in$ bisettrice di $\widehat{APB}$

$\Rightarrow P\,I\,Q$ allineati $\Longrightarrow$ $R\,X\,Q$ all.: $S\,Y\,Q$ all.

ω circonferenza di centro Q passante per A, B



$\angle BIQ = 180 - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$

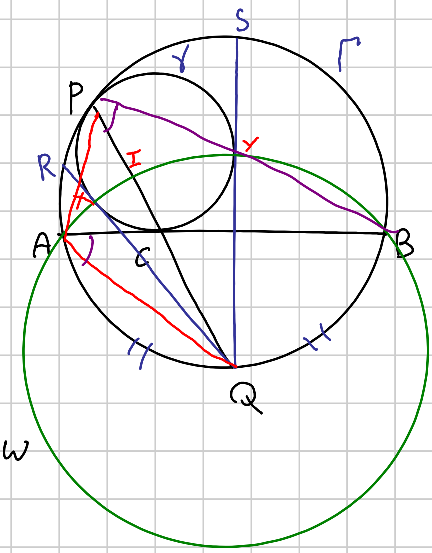
$\angle BDP = 180 - \beta - \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{\gamma}{2}$

$\angle BIQ = \angle IBQ \Rightarrow \triangle BIQ$ isoscele

$BQ = QI$
$AQ = QI$ $\Rightarrow I \in \omega$

$\Rightarrow X \in \omega,\ Y \in \omega$

A, X, I, Y, B stanno su ω



$QA = QX$

QX tang $\gamma \iff QX^2 = QC \cdot QP$

$\iff QA^2 = QC \cdot QP$

Consider $\triangle QAC$, $\triangle QAP$

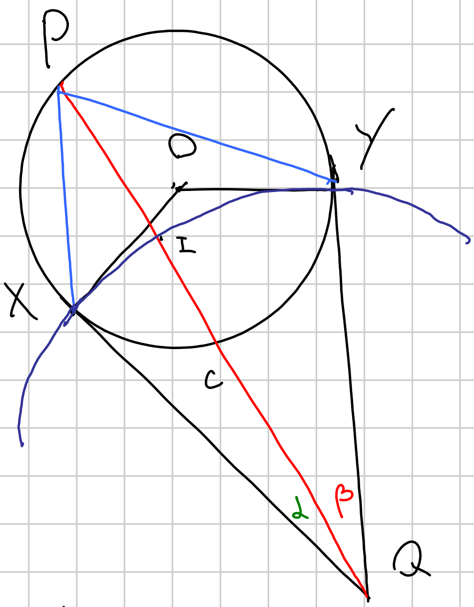
$\angle PQA = \angle CQA$

$\angle APQ = \frac{1}{2}\angle APB = \angle QPB$ (PQ bisettrice)

Ma $\angle QPB = \angle QAB \longrightarrow \angle APQ = \angle QAB$

$\triangle QAC \sim \triangle QPA \Rightarrow \frac{QA}{QC} = \frac{QP}{QA} \Rightarrow QP \cdot QC = QA^2$

Deduco che $X, Y \in \gamma$



$\angle PXI + \angle PYI = 90$

$\angle IXQ = \angle XIQ = 90 - \frac{\alpha}{2}$

$\angle IYQ = \angle YIQ = 90 - \frac{\beta}{2}$

XOYQ ha due angoli retti $OYQ = 90$, $OXQ = 90°$

$\Rightarrow XOY = 180 - \alpha - \beta$

XOY angolo al centro

$XPY = \frac{1}{2} XOY = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$

Consider PXQY

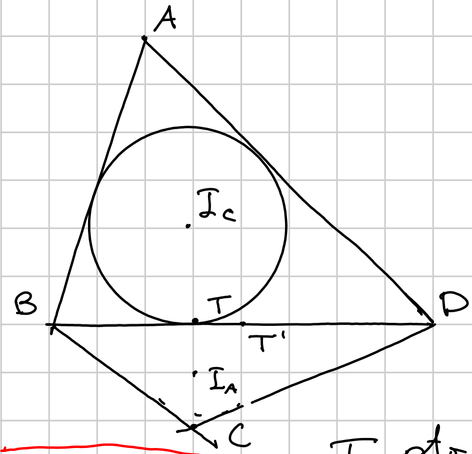
$\angle PXI + \angle IXQ + \angle XQY + \angle QYI + \angle IYP + \angle YPX = 360$

$\cancel{90 - \frac{\alpha}{2}}$ $\cancel{\alpha + \beta}$ $\cancel{90 - \frac{\beta}{2}}$ $\cancel{90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}}$

$270 + \angle PXI + \angle PYI = 360 \Rightarrow \angle PXI + \angle PYI = 90$

6

G7 – 2017

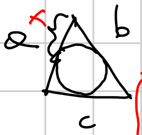


ABCD circoscrivibile

I_C incentro $\overset{\triangle}{ABD}$

I_A incentro $\overset{\triangle}{BCD}$

$\boxed{I_A I_C \perp BD}$



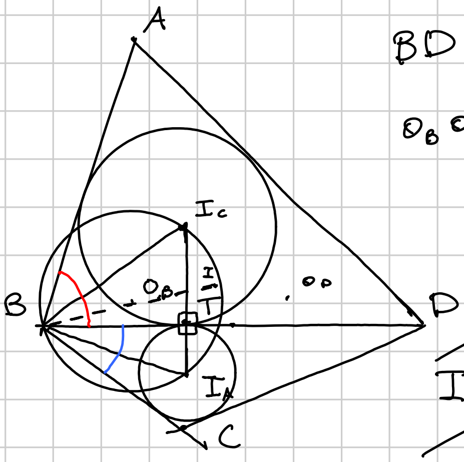
$\boxed{x = \frac{a+b-c}{2}}$

T pto di tang con BD di inc $\overset{\triangle}{ABD}$

T' // $\overset{\triangle}{BCD}$

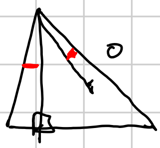
Ts $\Leftrightarrow T \equiv T' \Leftrightarrow BT = BT' \Leftrightarrow \frac{AB+BD-AD}{2} = \frac{BC+BD-CD}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{AB + CD = BC + AD}$



$BD \perp I_A I_C$ $\quad O_A$ centro di ω_A

$O_B O_D \perp I_A I_C \Rightarrow \boxed{O_B O_D \parallel BD}$



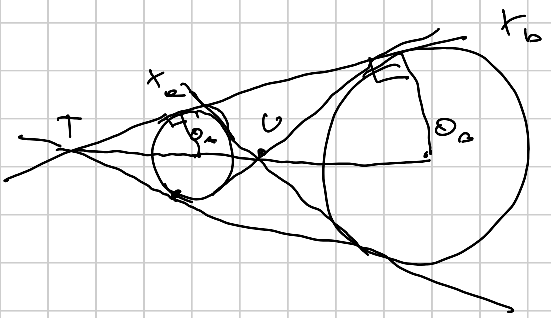
Lemma 2: $\boxed{B, O_B, I \text{ allineati}}$

$\widehat{IBA} = \widehat{O_B B A} = \widehat{O_B B I_C} + \widehat{I_C B A}$

$\widehat{O_B B I_C} = \widehat{TBI_A} = \frac{\widehat{DBC}}{2}$

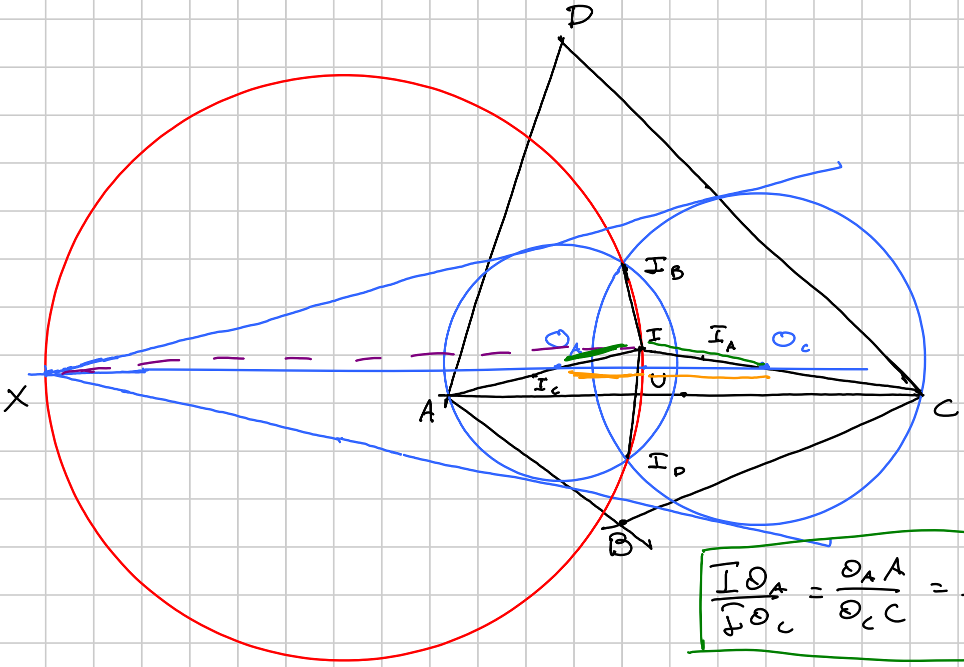
$\widehat{I_C BA} = \frac{\widehat{DBA}}{2}$

$\widehat{IBA} = \frac{\widehat{DBA}}{2} + \frac{\widehat{DBC}}{2}$



$\boxed{\frac{TO_A}{TO_B} = \frac{r_A}{r_B}}$

$\boxed{\frac{UO_A}{UO_B} = \frac{r_A}{r_B}}$



$$\boxed{\frac{IO_A}{IO_C} = \frac{O_A A}{O_C C} = \frac{r_A}{r_C}}$$

X é centro di sim. est per ω_A e ω_C

$A, B \quad \lambda \neq 0, 1, > 0$

$\frac{AP}{BP} = \lambda$

Idea: cerchio di Apollonio Ω_{O_A, O_C} $\lambda = \frac{r_A}{r_C}$

$I_B \in \Omega \iff \frac{I_B O_A}{I_B O_C} =$ $\frac{I_B O_A = r_A}{I_B O_C = r_C}$ ✓

$I_D \in \Omega$ ✓

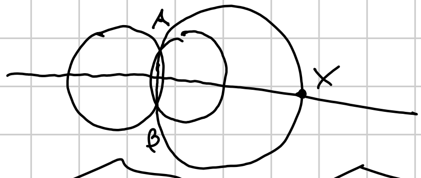
Claim: $I \in \Omega$

$I \in \Omega \iff \frac{IO_A}{IO_C} = \frac{r_A}{r_C}$ Vero per Talete

E ora? (i) IX bisettrice per $\widehat{I_B I I_D}$

(ii) IU bisettrice per $\widehat{I_A I I_C}$

i



X è pto di $\widehat{AB}$

$\widehat{I_B I X} = \widehat{I_D I X}$

ii

Per il Teorema della bisettrice

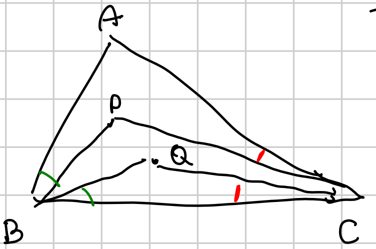
$\frac{IO_A}{IO_C} = \frac{O_A U}{U O_C} \Rightarrow IU$ bisettrice $\Rightarrow IO \equiv IY$

$\Rightarrow$ Tesi.

WC 2018 – Geometria Contorsa

Note Title 25/01/2018

G8



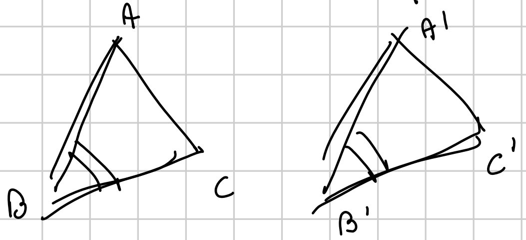
Hp. P, Q

$\measuredangle ABP = \measuredangle QBC$

$\measuredangle ACP = \measuredangle QCB$

Th. Mostrare che esiste un punto X sulla cfr. circoscritta t.c. $XPI \underset{dir.}{\sim} XIQ$

Sol. [Complessi] Com'è fatto "un" punto X che soddisfi $XPI \underset{dir.}{\sim} XIQ$ (∄ "il")



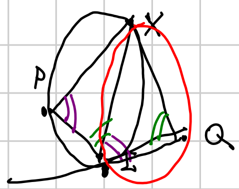
$ABC \sim A'B'C'$

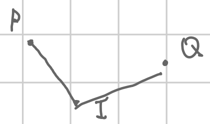
$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{a'-b'}{c'-b'}$$

$$XPI \underset{dir.}{\sim} XIQ \iff \frac{p-x}{i-x} = \frac{i-x}{q-x} \iff x^2-(p+q)x+pq = x^2-2ix+i^2$$

$$\iff x = \frac{pq-i^2}{p+q-2i} \quad \star$$

Un solo punto

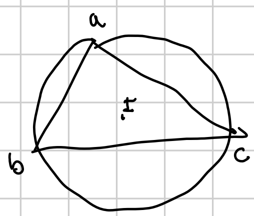




Th del problema: p e q come nel testo $\Rightarrow x\bar{x}=1$

$\odot ABC$ = cfr unitaria

Fatto (u,v,w)



Lemma: $\exists^{mo}$ u, v, w t.c.

$$\begin{cases} u^2 = a \\ v^2 = b \\ w^2 = c \\ -(uv+vw+uw) = i \end{cases}$$

Setting: $\odot ABC \equiv$ cfr. unitaria.

Tornando al prob.: Vogliamo che

$$\frac{pq-i^2}{p+q-2i} \cdot \frac{\bar{p}\bar{q}-\bar{i}^2}{\bar{p}+\bar{q}-2\bar{i}} = 1$$

Notare che $\boxed{\bar{i} = -\frac{u+v+w}{uvw}}$ perché $\bar{u} = \frac{1}{u}$ e analoghe.

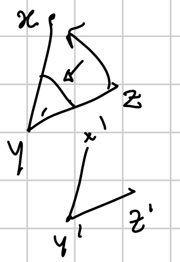
Problema: Scrivere $\boxed{\bar{p}\bar{q}}$ e $\boxed{\bar{p}+\bar{q}}$ in termini del resto

Scriviamo le ipotesi

$\measuredangle ABP = \measuredangle QBC$

$$\frac{\frac{p-b}{a-b}}{\frac{\bar p-\bar b}{\bar a-\bar b}} = \frac{\frac{c-b}{q-b}}{\frac{\bar c-\bar b}{\bar q-\bar b}}$$

$\downarrow (u,v,w)$



$$\frac{\frac{x-y}{z-y}}{\frac{\bar x-\bar y}{\bar z-\bar y}} = \frac{\frac{x'-y'}{z'-y'}}{\frac{\bar x'-\bar y'}{\bar z'-\bar y'}}$$

$$\frac{\frac{p-v^2}{u^2-v^2}}{\frac{\bar p-\frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}}} = \frac{\frac{w^2-v^2}{q-v^2}}{\frac{\frac{1}{w^2}-\frac{1}{v^2}}{\bar q-\frac{1}{v^2}}} \Rightarrow \frac{p-v^2}{u^2(1-\bar p v^2)} = \frac{w^2(1-\bar q v^2)}{(q-v^2)}$$

Com'è $\measuredangle ACP = \measuredangle QCB \Rightarrow \frac{p-w^2}{u^2(1-\bar p w^2)} = \frac{v^2(1-\bar q w^2)}{(q-w^2)}$

Quindi

$$\begin{cases} \frac{(p-v^2)(q-v^2)}{u^2w^2} - 1 = -(\bar p+\bar q)v^2 + \bar p\bar q v^4 \\ \frac{(p-w^2)(q-w^2)}{u^2v^2} - 1 = -(\bar p+\bar q)w^2 + \bar p\bar q w^4 \end{cases}$$

$$\boxed{\bar p+\bar q} = \frac{w^{\cancel{4}\,2}\left[\frac{(p-v^2)(q-v^2)-u^2w^2}{u^2\cancel{w^2}}\right] - v^{\cancel{4}\,2}\left[\frac{(p-w^2)(q-w^2)-u^2v^2}{u^2\cancel{v^2}}\right]}{w^2v^4-v^2w^4} =$$

$$= \frac{w^2pq - \cancel{v^2w^2(p+q)} + w^2v^4 - u^2w^4 - v^2pq + \cancel{v^2w^2(p+q)} - v^2w^4 + u^2v^4}{u^2w^2v^2(v^2-w^2)}$$

$$= \frac{u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2-pq}{u^2w^2v^2}$$

$$\bar p\bar q = \frac{u^2+v^2+w^2-(p+q)}{u^2w^2v^2}$$

Cos'è che dovevamo mostrare?

(II)

$$\left(pq-(uv+vw+uw)^2\right)\left(\frac{u^2+v^2+w^2-(p+q)}{u^2w^2v^2} - \frac{(u+v+w)^2}{u^2w^2v^2}\right) \overset{?}{=} (!)$$

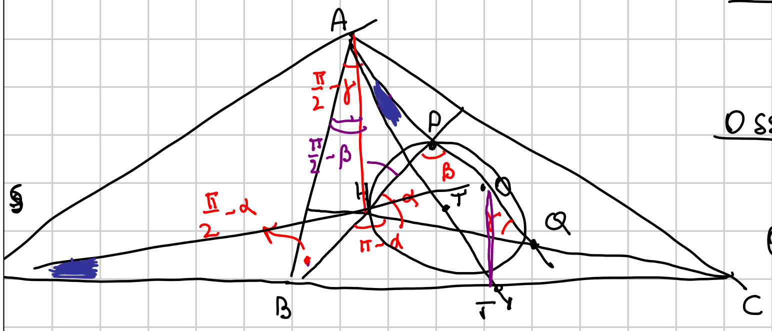
$$\left(p+q+2(uv+vw+uw)\right) - \left(\frac{u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2-pq}{u^2w^2v^2} + 2\frac{(u+v+w)uvw}{u^2v^2w^2}\right)$$

(IV)

Ok perché (II) $= \frac{-2(uv+vw+uw)-(p+q)}{u^2v^2w^2}$

(IV) $= \frac{(uv+vw+uw)^2-pq}{u^2v^2w^2}$

(G7)



Oss.1 $H\hat{P}Q \sim A\hat{B}C$

$P\hat{H}Q = \alpha$

$H\hat{P}Q = \beta$ $\rightsquigarrow H\hat{Q}P = \gamma$

Oss.2 AH tange $\odot HPQ$

Infatti $A\hat{H}P = \gamma = P\hat{Q}H$

Quindi sia $S = AA \cap BC$

sia T = Circocentro di HPQ

Per similitudine

$\measuredangle TAO = \measuredangle OSB \Rightarrow$

Sia $T' = AT \cap BC \Rightarrow AST'O$ ciclico

Ma allora $OT'S = \pi - OAS = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T'$ è il p.to medio di BC.

Soluzione Swag $\qquad S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

$PH \perp AC$

$AO: b^2 S_B z = c^2 S_C y$

$H = (S_B S_C, S_A S_C, S_A S_B)$

$BH: x S_A = z S_C$

$P = (c^2 S_C^2, b^2 S_A S_B, c^2 S_A S_C)$

$$\underset{x}{c^2 S_C^2} + \underset{y}{b^2 S_A S_B} + \underset{z}{c^2 S_A S_C} = b^2(S_A S_B + c^2 S_C) = b^2 \sum_{cyc} S_A S_B$$

$D = (S_C(b^2 S_B + c^2 S_C), b^2 a^2 S_A, S_A(b^2 S_B + c^2 S_C))$

$\infty_{AC} = (1, 0, -1)$

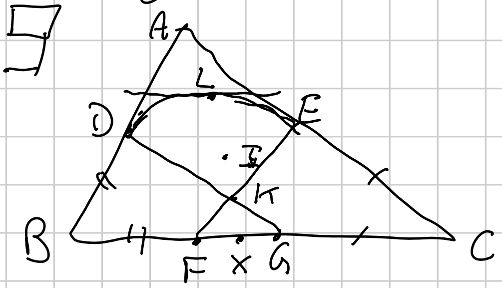
$\ell_P: -x a^2 \cancel{b^2} S_A + y \cancel{b^2}(b^2 S_B + c^2 S_C) - a^2 \cancel{b^2} S_A z = 0$

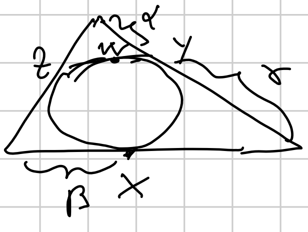
$\ell_Q: -x a^2 S_A - y a^2 S_A + z(b^2 S_B + c^2 S_C) = 0$

$AM: y - z = 0$

Se $R \in \ell_P \cap \ell_Q \Rightarrow y = z \Rightarrow R \in AM$.

Problema 5





Baricentriche su ABC

$t = XF \qquad F = (0, CF, BF) = (0, \gamma+t, \beta-t)$

$BD = \beta - t$

$AD = \alpha+\beta-(\beta-t) = \alpha+t$

$AE = \alpha+t$

$CE = \alpha+\gamma-(\alpha+t) = \gamma-t$

$CG = \gamma - t$

$XG = \gamma-(\gamma-t) = t$

$G = (0, \gamma-t, \beta+t)$

$D = (\beta-t, \alpha+t, 0)$

$E = (\gamma-t, 0, \alpha+t)$

$$DG: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ \beta-t & \alpha+t & 0 \\ 0 & \gamma-t & \beta+t \end{pmatrix} = 0$$

$\gamma+t \quad DG: x(\alpha+t)(\beta+t) - y(\beta^2-t^2) + z(\beta-t)(\gamma-t) = 0$

$\beta-t \quad EF: x(\alpha+t)(\gamma+t) + y(\beta-t)(\gamma-t) - z(\gamma^2-t^2) = 0$

$$x(\alpha+t)(\gamma+t)2\beta + y(\beta-t)\left[(\beta-t)(\gamma-t) - (\beta+t)(\gamma+t)\right] = 0$$

$$x(\alpha+t)(\gamma+t)\beta = y(\beta-t)t(\beta+\gamma)$$

$$x(\alpha+t)(\beta+t)\gamma = z(\gamma-t)t(\beta+\gamma)$$

$$K = \left(t(\beta+\gamma)(\beta-t)(\gamma-t),\ (\gamma^2-t^2)\beta(\alpha+t),\ (\beta^2-t^2)\gamma(\alpha+t)\right)$$

$$K = \left(\frac{t}{\alpha+t}(\beta+\gamma),\ \frac{\gamma+t}{\beta-t}\beta,\ \frac{\beta+t}{\gamma-t}\gamma\right)$$

$X = (0, \gamma, \beta)$

$W = 2I - X$

$L = -\frac{t}{\alpha}A + \left(1+\frac{t}{\alpha}\right)(2I - X)$

L, I, K allineati $\Leftrightarrow I, K, \dfrac{L - 2\left(1+\frac{t}{\alpha}\right)I}{-\left(1+2\frac{t}{\alpha}\right)} = P$ allineati

$$P = \frac{-\frac{t}{\alpha}A - \left(1+\frac{t}{\alpha}\right)X}{-(1+2t/\alpha)} = \left(-\frac{t}{\alpha},\ -\left(1+\frac{t}{\alpha}\right)\frac{\gamma}{\beta+\gamma},\ -\left(1+\frac{t}{\alpha}\right)\frac{\beta}{\beta+\gamma}\right)$$

$P = (t(\beta+\gamma), (\alpha+t)\gamma, (\alpha+t)\beta)$

$I = (a, b, c) = (\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta)$

$$\det\begin{pmatrix} \cancel{\beta+\gamma} & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ t\cancel{(\beta+\gamma)} & \gamma(\alpha+t) & \beta(\alpha+t) \\ \frac{t}{\alpha+t}\cancel{(\beta+\gamma)} & \frac{(\gamma+t)\beta}{\beta-t} & \frac{(\beta+t)\gamma}{\gamma-t} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ t & \gamma(\alpha+t) & \beta(\alpha+t) \\ 0 & \dfrac{\beta(\gamma+t)-\gamma(\beta-t)}{\beta-t} & \dfrac{\gamma(\beta+t)-\beta(\gamma-t)}{\gamma-t} \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ t & \gamma(\alpha+t) & \beta(\alpha+t) \\ 0 & \dfrac{t(\beta+\gamma)}{\beta-t} & \dfrac{t(\beta+\gamma)}{\gamma-t} \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ t & \gamma(\alpha+t) & \beta(\alpha+t) \\ 0 & \gamma-t & \beta-t \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ 0 & \alpha(\gamma-t) & \alpha(\beta-t) \\ 0 & \gamma-t & \beta-t \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$II = \alpha\, III \Rightarrow$ fa 0

WINTER CAMP 2018 - TdN

Titolo nota 27/01/2018

NA1

$$a_{k+1}^k \mid C^k \cdot a_1 \cdots a_k$$

al più

oss: $a_2 \mid Ca_1 \Rightarrow a_k$ ha gli stessi fattori primi di Ca_1

$p_1, \dots, p_N$ sono tutti e soli i divisori di $a_1, a_2, a_3, \dots$

idea: guardiamo $q = p_i$

$$v_q(a_{k+1}^k) \leq v_q(C^k) + \sum_{i=1}^{k} v_q(a_i)$$

$$k\, v_q(a_{k+1}) \leq k \cdot v_q(C) + \sum v_q(a_i)$$

CLAIM: $v_q(a_{k+1}) \leq v_q(C) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) + v_q(a_1)$ ✱

per induzione $\qquad = H_k$ ← fare passo iniziale

$$(k+1)\, v_q(a_{k+2}) \leq (k+1) \cdot v_q(C) + \sum_{i=1}^{k+1} v_q(a_i)$$

$$\leq (k+1)\, v_q(C) + \sum \left(v_q(C) \cdot H_{i-1} + v_q(a_1)\right)$$

$$\le \underbrace{v_q(C)\cdot\left(K+1+H_1+\dots+H_K\right)+(K+1)\,v_q(a_1)}$$

$$\overset{?}{\le} v_q(C)\cdot H_{K+1}\cdot(K+1)$$

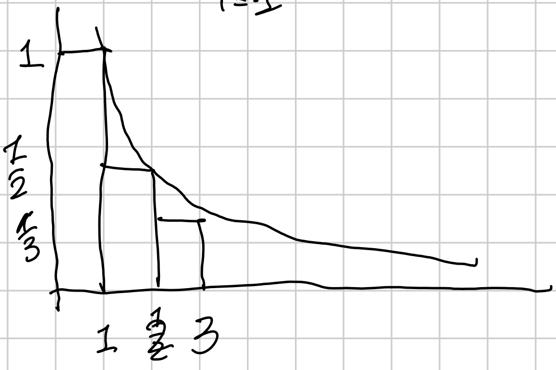
$$\sum_{i=1}^{K} H_i = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{K}\frac{1}{j}\cdot\#\{i : i\ge j,\ i\le K\}$$

$$= \sum_{j=1}^{K}\frac{1}{j}\left(K-j+1\right) = \sum_{j=1}^{K}\frac{K+1}{j} - \sum 1 = (K+1)H_K - K$$

$$K+1+\sum H_i = (K+1)H_K - K + K+1 = (K+1)H_K + 1$$

$$H_{K+1} = \frac{(K+1)H_K+1}{K+1}$$

FATTO: $\displaystyle\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{i} \le \log(K+1)+1$



$$\int \frac{1}{x} = \log x$$

$$\Rightarrow \quad v_q(a_K) \le A\cdot\log(K+1)$$

vale per tutti i p_i

$p_1 \; - - - \quad p_N$

1
2
.
.
Alog

quanti sono i possibili a_i distinti?

$(A \cdot \log K)^N$

Dato che gli a_i sono distinti

$(A \log K)^N \geq K$ ← mi serve per poter scegliere K a_i

però per K grande, è falsa

NON C'È NESSUNA SUCCESSIONE !

$\boxed{N5}$ $\{n, \ldots, n+15\}$ $A = A_n$

$A = B \cup C$ $B \cap C = \emptyset$ $\prod_{b \in B} b = \prod_{c \in C} c$

1° fatto: fra 16 numeri consecutivi ce n'è al massimo uno che è multiplo di 17

2° fatto: uno solo non va bene

Quindi nessuno $(n \equiv 1 \pmod{17})$

Stessa cosa per ogni primo > 17.

Fattori primi possibili dei numeri $n+i$.
$2, 3, 5, 7, 11, 13$

Se m è divisibile per p^2,
allora $m+p$, $m-p$ sono per p ma non per p^2

Guardo la massima potenza di 2 (2^k) che divide uno dei numeri $n+i$.

- $k \geq 4$
- $2^k \| n+i$

Nell'insieme A ci sono:

- esattamente un numero divisibile esattamente per 8
- " 2 num. " " per 4
- " 4 num. " per 2

$8 \cdot 4^2 \cdot 2^4 = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = 2^{11}$

Allora $k \leq 11$, infatti se $k > 11$
$n+i \in B$
la potenza di 2 in C non può bilanciare 2^k,
Quindi la massima potenza di 2 che può dividere $\prod (n+i)$ è 2^{22}.

Altri primi:

$p=3$ al massimo 6 fattori divisibili per 3.

Certamente $k \geq 2$

Se $k \geq 3$ 1° numero div. esattamente per 3^2

4 num. " " " 3.

$3^2 \cdot (3)^4 = 3^6 \Rightarrow k \leq 6$

⋮

$p = 13$ al max 2 numeri divisibili per 13

Almeno uno dei due div. esattamente per 13

L'altro pure (altrimenti non divide in parti uguali)

$$n^{16} \leq \prod_{i=0}^{15}(n+i) \leq 2^{22} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2$$

$$2^{22} \cdot 3^{12} = 2^{16} \cdot 2^6 \cdot 3^{12} < 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 3^{12} = (6)^{16}$$

$5^6 < 7^6 \quad 11^2 < 7^3 \quad 13^2 < 7^3$

$5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 < 7^{16}$

$n \leq 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

Visto che ci sono numeri primi grandi per $17 \leq m \leq 43$

$n \geq 2$ non va bene

$n=1$ il prodotto di tutti i numeri è $16!$

che però non è un quadrato

(basta considerare il primo 13)

Impossibile che $\prod_{b \in B} b = \prod_{c \in C} c$.

$\boxed{N6}$ Esistono infinite terne (a,b,p) t.c. $0<a\leq b<p$

e $p^5 \mid (a+b)^p - a^p - b^p$

Oss Un fattore p è gratis:

$$(a+b)^p - a^p - b^p = p \cdot \underbrace{q(a,b)}_{\text{coefficienti interi}} = p \cdot b^p \cdot r(a/b)$$

Oss. 2 $$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7\, ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)^2$$

$$= 7b^7\, x(x+1)(x^2+x+1)^2 \qquad x := a/b$$

$$r(x) = \frac{(x+1)^p - x^p - 1}{p}$$

Fatto $s(x) \in \mathbb{C}[x]$. $d(x)^2 \mid s(x) \iff$

$$d(x) \mid \left(s(x),\ s'(x)\right)$$

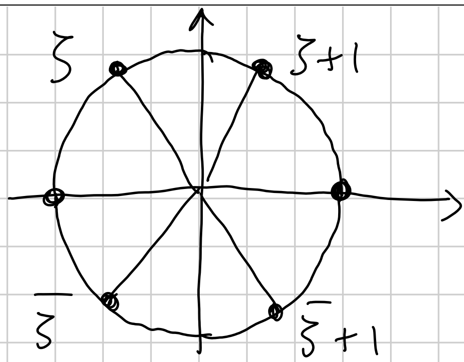
$$s(x) = d(x)^m \cdot e(x) \qquad s'(x) = m\, d(x)^{m-1} e(x) + d(x)^m e'(x)$$

Criterio della derivata

$$\left(p\,r(x), p\,r'(x)\right) = \left((x+1)^p - x^p - 1,\ \cancel{p}(x+1)^{p-1} - \cancel{p}x^{p-1}\right)$$

$$= \left((x+1)\,x^{p-1} - x^p - 1,\ (x+1)^{p-1} - x^{p-1}\right)$$

$$= \left(\underbrace{x^{p-1} - 1}_{\substack{\text{radici} = \\ \text{radici dell'unità} \\ \text{ordine} \mid p-1}},\ \underbrace{(x+1)^{p-1} - \cancel{x^{p-1}} + \cancel{x^{p-1}} - 1}_{\substack{\text{radici} = \\ \{\zeta \,:\, \zeta+1 \text{ sia radice} \\ \text{dell'unità di ordine} \\ \text{che} \mid p-1\}}}\right)$$



ζ rispetta $\zeta^3 = 1$

$(\zeta^2 + \zeta + 1 = 0)$

Radici comuni $\iff$ ζ radice di $r(x)$

$\iff$ ζ radice di $x^{p-1} - 1$

$\iff$ $3 \mid p-1$

Conclusione parziale $3 \mid p-1 \Rightarrow r(\zeta) = r(\bar{\zeta}) = 0$

$$\Longrightarrow (x-\zeta)(x-\bar{\zeta}) \mid r(x)$$

$$\Longrightarrow x^2 + x + 1 \mid r(x)$$

Non solo: per il criterio della derivata,

$$(x^2+x+1)^2 \mid r(x)$$

$$\xrightarrow[r(x)]{\text{def di}} \quad (a+b)^p - a^p - b^p = p \cdot (a^2+ab+b^2)^2 \, t(a,b)$$

Ci basterebbe quindi trovare a, b "piccoli" t.c.

$$p^2 \mid a^2+ab+b^2$$

Ambizione: cerchiamo a, b t.c. $p^2 = a^2+ab+b^2$

Passo 1: $a^2+ab+b^2 \equiv 0 \ (p)$

$p \equiv 1 \ (3) \Longrightarrow$ esiste ω mod p t.c. $\omega \not\equiv 1 \ (p)$
ma $\omega^3 \equiv 1 \ (p)$

$$a^2+ab+b^2 = (a-\omega b)(a-\omega^2 b)$$

Voglio a, b t.c. $a \equiv \omega b \pmod p$

Lemma (Thue) Dato $K \not\equiv 0\ (p)$ esistono $x, y \in \mathbb{Z}$

t.c. $y \equiv Kx \bmod p$ $\quad 0 < |x|, |y| < \sqrt{p}$

[Sketch: $y_1 - Kx_1 \equiv y_2 - Kx_2\ (p)$]

$\rightsquigarrow$ trovo a, b con $|a|, |b| < \sqrt{p}$ e t.c.

$$p \mid \underbrace{a^2+ab+b^2}_{<3p} \in \{p, \cancel{2p}\}$$

$$2p = a^2+ab+b^2 \xrightarrow{\text{mod } 2} \begin{array}{l} ab+a+b \equiv 0\ (2) \\ (a+1)(b+1) \equiv 1\ (2) \\ a, b \text{ pari} \Rightarrow 4 \mid a^2+ab+b^2 \\ \qquad\qquad \underline{\text{NO}} \end{array}$$

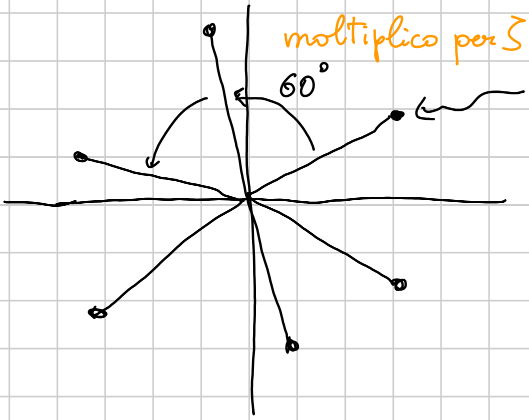
$$a^2+ab+b^2 = p \Rightarrow p^2 = (a^2+ab+b^2)^2$$
$$= c^2+cd+d^2$$
$$c = a^2-b^2, \quad d = 2ab+b^2$$

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC+BD)^2 + (AD-BC)^2$$
$$(A+Bi)(A-Bi)(C+Di)(C-Di)$$

$$a^2+ab+b^2 = (a-\zeta b)(a-\bar{\zeta} b)$$
$$(a^2+ab+b^2)^2 = (a-\zeta b)^2(a-\bar{\zeta} b)^2$$

$$= \left[a^2 - 2ab\zeta + \underbrace{\zeta^2}_{-\zeta-1} b^2 \right] \cdot \text{coniugato}$$

$$= \left[(a^2 - b^2) - \zeta (b^2 + 2ab) \right] \cdot \text{coniugato}$$



$c - d\zeta$ norma $= p^2$

Moltiplicando $a - b\zeta$ per $(-\bar{\zeta})^i$ (i opportuno) posso assumere che a, b (c, d) abbiano i segni che voglio

$p^2 = c^2 + cd + d^2$, posso assumere $c, d > 0$

$$p^2 = c^2 + cd + d^2 > \max\{c^2, d^2\} \Rightarrow \max\{c, d\} < p$$

[Bisogna controllare $cd \neq 0$: facile!]

MISCELLANEA WC18 Pol + Ludo

Note Title 27/01/2018

3. $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{in} \leq m \quad \forall m, n \quad (*)$$

Dimostra che $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} = k - 2014$ per qualche k, d.

(Erdős discrepancy problem)

1) $m=1$: $a_n + a_{2n} \leq 1$ $\leadsto$ $0, 0$; $1, 0$; $0, 1$

$x_i = 2a_i - 1$ o $a_i - \frac{1}{2}$ $\leadsto$ $\sum x_i \leq 0$

(Prendiamo invece $a = x$)

2) $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k$ probabilmente diventa piccolo a piacere

La quantità $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k$, se passo da k a $k+1$

varia di -1, 0, oppure 1:

$$\sum_{i=1}^{2(k+1)} a_{id} - (k+1) - \sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k = a_{(2k+1)d} + a_{(2k+2)d} - 1 \in \{-1, 0, 1\}$$

$\Rightarrow$ se la quantità $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k$ scende sotto 2014,

allora "dev'essere passata da 2014"

Supponiamo di negare la tesi:

$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k \geq -M \quad \text{per un qualche } M \in \mathbb{N}$$

e cerchiamo un assurdo.

Idea: $a_n + a_{2n}$ non può continuare a valere 0 infinite volte, altrimenti scenderei sotto $-M$.

$f(m) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2m} - m +$
$+ x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{4m} - m$

$f(m+1) - f(m) = x_{2m} + x_{4m} - 1 \leq 0$

$\leadsto$ f decrescente (debolmente)

Non può decrescere infinite volte, altrimenti arrei a un certo punto $f(m) = x_1 + \dots + x_{2m} - m$
$+ x_2 + \dots + x_{4m} - m$
$\leq -2M$

$\Rightarrow$ da un certo punto in poi è costante

$\Rightarrow$ da un certo punto in poi $x_m + x_{2m} = 1$

$\Rightarrow$ (moralmente) "metà uni e metà zeri"

Prendo N abbastanza grande (così $x_m + x_{2m} = 1$ per $m > N$)

$$\begin{array}{l}
x_N + x_{2N} + \dots + x_{2mN} \leq m \\
\;+ \qquad + \qquad\qquad\quad + \\
x_{2N} + x_{4N} + \dots + x_{4mN} \leq m \\
\underbrace{\;=1 \quad =1 \quad \dots \quad =1\;}_{=2m}
\end{array} \qquad \leq 2m$$

$\Rightarrow$ deve valere l'uguale, cioè $x_N + x_{2N} + \dots + x_{2mN} = m \ \forall m$, N abb. grande

Visto che sono tutte uguali ante, posso determinare univocamente la successione:

$X_N \quad X_{2N} \quad \boxed{X_{3N}} \quad X_{4N} \quad X_{5N} \quad \boxed{X_{6N}} \quad X_{7N} \quad X_{8N} \quad \boxed{X_{9N}} \quad X_{10N} \quad X_{11N} \quad \boxed{X_{12N}}$

$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$

$= 2$

$= 3$

$= 4$

$= 5$

M1) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$f(x+y) \geq f(x) + y \qquad P(x,y)$$

$$f(f(x)) \leq x \qquad Q(x)$$

1) $P(x,y)$ $\quad f(x+y) \geq f(x) + y > f(x)$

$\Rightarrow f$ è (strettamente) crescente

2) Vorremmo vedere cosa succede "vicino a 0"

$$\inf \{ f(x) : x > 0 \}$$

ES. se $g(x) = x$, $\quad$ ~~$\min \{ g(x) : x > 0 \}$~~

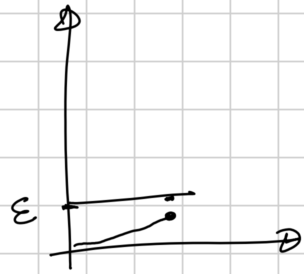
$\inf(S)$ = il più grande numero reale m tale che S contiene un numero $\leq m + \varepsilon$ per ogni ε e $m \leq x$ per ogni $x \in S$

Ogni insieme limitato inferiormente ammette un inf

$\inf\{f(x) : x>0\} = 0$, in questo caso,
perché $Q(x)$ ci dice che f assume valori positivi piccoli a piacere

Dato un certo $\varepsilon>0$, esiste un $y>0$ tale che $f(y)\le\varepsilon$ (basta prendere $y=f(\varepsilon)$, per la $Q(\varepsilon)$)

Di più: $f(x)\le\varepsilon$ per ogni $x\le y$



[illegible] $\le f(f(x)+y) \le f(f(x+y)) \overset{Q(x+y)}{\le}$ [illegible]

$\uparrow P(y,f(x))$ $\qquad$ $\uparrow P(x,y)$ + crescenza

Idea 1: "faccio tendere y a zero" Fisso $\varepsilon>0$
Prendo y molto piccolo, in modo che $y\le\varepsilon$, $f(y)\le\varepsilon$

$f(x)\le x+y-f(y)\le x+\varepsilon-0$

$\Rightarrow f(x)\le x+\varepsilon$ ~ deve valere per ogni $\varepsilon>0$

$\Rightarrow$ [illegible] $\forall x$

(bastava anche mettere $x=y$ nella gialla) c.s.

$f(z) \geq z$ Vorrei qualcosa del tipo

no devo usare il termine $f(x+y)$ nella P per ottenerla

$x+y=z$ (ε fissato)

$P(x, z-x)$: $f(z) \geq f(x) + z - x$

"faccio tendere x a 0": prendo x tale che $x \leq \varepsilon$, $f(x) \leq \varepsilon$,

quindi $f(z) \geq 0 + z - \varepsilon = z - \varepsilon$

Se deve valere per ogni $\varepsilon > 0$, allora $\forall z$

$$f(x) \geq x$$

$$\Rightarrow f(f(x)) \geq f(x) \geq x \quad \text{assurdo per } Q(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq x \quad \forall x > 0$$

$$g(x) = f(x) - x \quad \forall x > 0$$

$$-x \leq g(x) \leq 0 \quad \forall x > 0$$

$$f(x+y) \geq f(x) + y$$

$$g(x+y) + \cancel{x} + \cancel{y} \geq g(x) + \cancel{x} + \cancel{y}$$

$$0 \geq g(x+y) \geq g(x) \geq -x$$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \quad \forall x$$

$$f(x+y) \geq f(x)+y > y \quad \forall x,y$$

$$f(a) > b \quad \forall a > b$$

$\underline{f(a) \geq a}$ ok   se no $f(a) < b < a$ per un certo b

$$x \geq f(f(x)) \geq f(x) \geq x$$

$$f(x) = x \quad \forall x$$

$S = \{1, \dots, 2017\}$ $A_i \subseteq S$ $|A_i| = 3$

$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $i \neq j$ Dimostrare che si può colorare gli elementi di S di rosso e blu in modo che

1) ci siano almeno 64 blu
2) ogni A_i contenga un elemento rosso.

Che succede in una configurazione estremale?

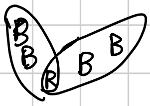
Se non posso mettere altri elementi blu, che vuol dire?

Deve esistere almeno un

$\boxed{R}$ → da colorare di blu

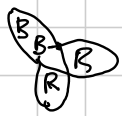
Ah! Ma allora gli altri A_j $j \neq i$?

(1)



può succedere

(2)



non può succedere

Per ogni R $\exists A_i$ che diventa tutto blu se coloro R di B

$$\{\text{rossi}\} \xrightarrow{f} \{\text{sottoins. di blu di 2 elementi}\}$$

(1) può darsi che posso scegliere

(2) f è iniettiva

$$|\{\text{rossi}\}| = R = 2017 - B$$

$$|\{\text{sottoins. 2 elementi blu}\}| = \binom{B}{2}$$

$$f \text{ iniettiva} \Rightarrow 2017 - B \leq \binom{B}{2} \qquad \binom{64}{2} = 2016$$

$$\text{o } 2017 \leq \binom{B+1}{2} \qquad \binom{63}{2} = 1953$$

$$\Rightarrow B \geq 64.$$