Combinatoria WC 2018

Titolo nota 26/01/2018

C4) $k \leq n$ $\quad \bar{X}$ è l'insieme dei k elementi minori di X

F di sott. di $\{1, \dots, n\}$

$S \in F \quad |S| = k$

$S_1, S_2 \in F \qquad \overline{S_1 \cup S_2} = S_1$ o $\overline{S_1 \cup S_2} = S_2$

$n = 7 \qquad k = 4$

	1	2	3	4	5	6	7
S_1		•	•	•	•		
S_2			•	•		•	•

OSS i massimi sono tutti distinti

dim $S_A, S_B \qquad \max S_A = \max S_B = j$

$|S_A \cup S_B| \geq k+1$

$j = \max\{S_A \cup S_B\} \notin \overline{S_A \cup S_B}$

$S_A \neq \overline{S_A \cup S_B} \qquad S_B \neq \overline{S_A \cup S_B}$

i massimi appartengono a $\{k, \dots, n\}$

Supponiamo $|F| > n-k+1$

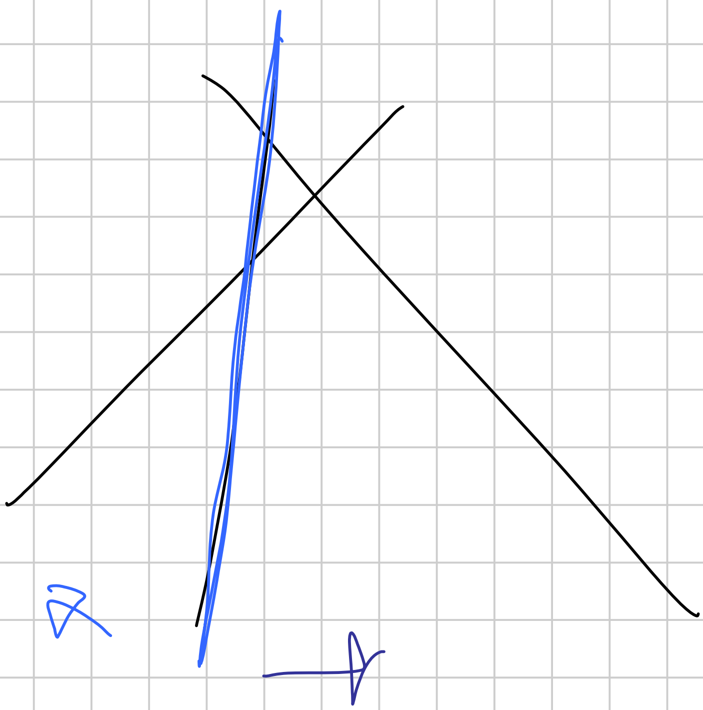
ma allora due insiemi avrebbero lo stesso massimo

$\Rightarrow |F| \leq n-k+1$

$$\{1, \dots, k\}$$
$$\{2, \dots, k+1\}$$
$$\vdots$$
$$\{n-k+1, \dots, n\}$$

Esempio di F con $n-k+1$ elementi

C5



Osservazione chiave: linearità

se, fissate le rette, ho 2 conf. funzionanti

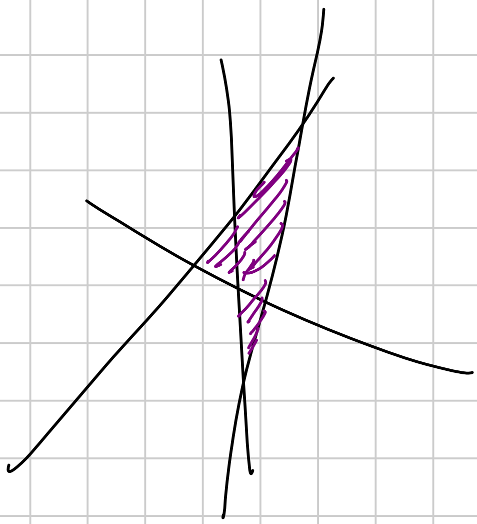
$\Rightarrow$ la somma (regione per regione) è funzionante

Def: una conf. è "bilanciata" se soddisfa la tesi a meno del > 0 (con numeri razionali)

Conseguenza 1: basta risolvere il problema per numeri razionali

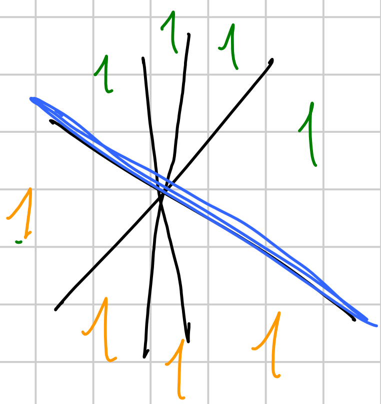
Conseguenza 2: posso cercare di risolvere il problema un po' di regioni alla volta.

Oss 2:



limitate

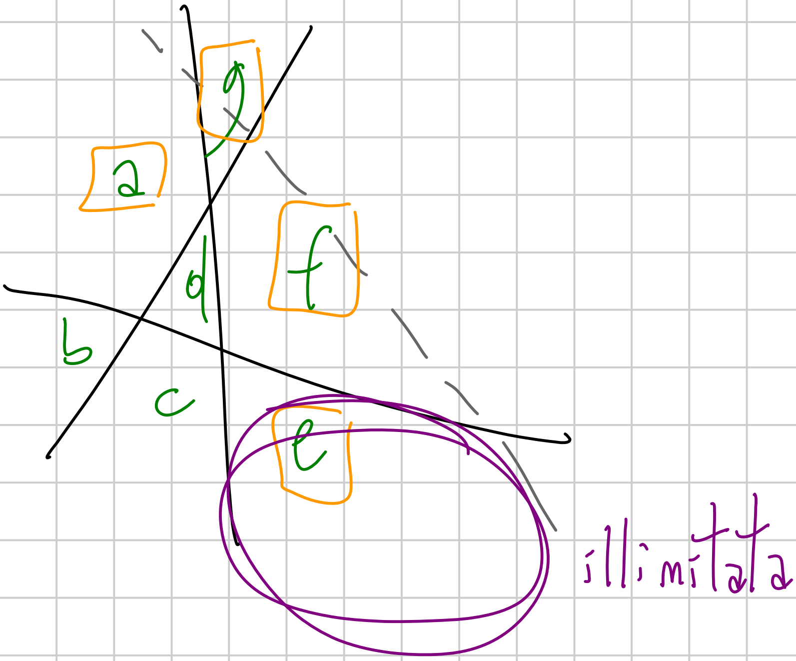
sulle illimitate metto tutti 1



(qui uso che le rette non sono parallele)

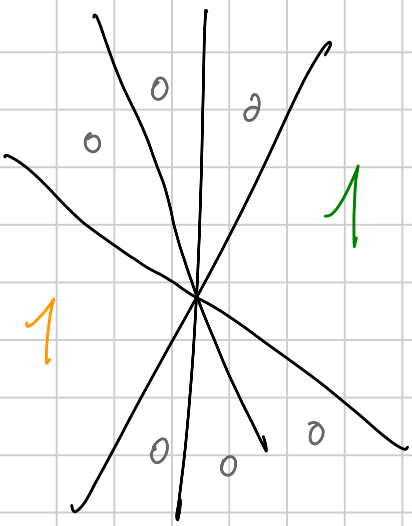
Per concludere

Poss: 1 Induzione (sul numero di rette)

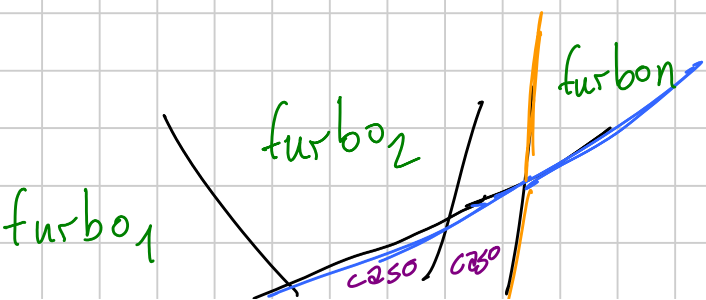


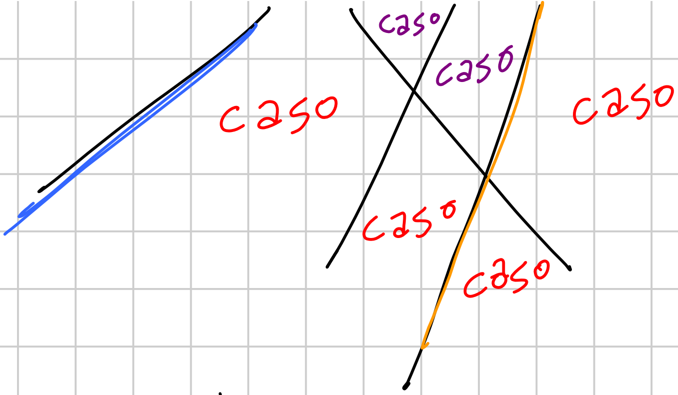
spartisco tutte le altre a caso, ma >0

per l'ultima ho un solo modo



Poss 2:





caso > 0

caso (anche < 0)

step 1 : costruisco una bilanciata in questo modo

sulle limitate metto > 0 a caso

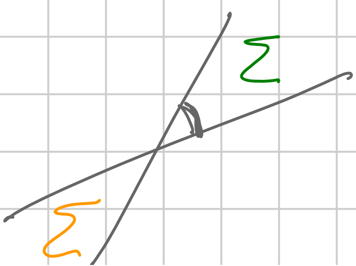
$$\begin{cases} f_1 + \dots + f_n = \text{fissata} & \text{(imponendo la azz.)} \\ f_1 + \dots + f_{n-1} - f_n = \text{fissato} & \text{(imponendo le aranc.)} \\ f_1 + \dots + f_{n-2} - f_{n-1} - f_n = \dots \\ \\ f_1 - f_2 - \dots - f_n = \dots \end{cases}$$

$\rightarrow \; 2f_1 = \text{fissato}$

$\rightarrow \; 2f_1 + 2f_2 = \text{fissato}$

Step 2: aggiungo un multiplo abbastanza grande della conf. con 0 dentro e 1 fuori

Oss: al posto del sistema ho condizioni più semplici:



consecutive in senso orario

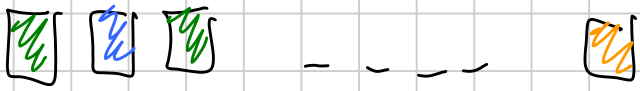
allora $\Sigma = \Sigma$

↑ è obbligato

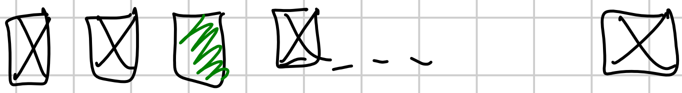
quindi ho un'unica scelta per f_i

C6

lo spettatore sceglie



l'assistente



il mago esclama: ↑ è arancione!

Domanda: quante carte servono al min?

Step 1: stimare le configurazioni:

$$2017^n = \#\underset{\text{dello spett.}}{\text{config}} = \#\underset{\text{risolvibili}}{\text{config}} \le \sum_{c \,\in\, \text{conf. viste dal mago}} \#\text{conf. di partenza t.c. l'ass. può lasciare } c \text{ e il mago può indovinare}$$

$2017 \cdot n$

2017^{n-2}

$n \geq 2017$

Step 2   Troviamo un esempio:

il mago indica sempre l'ultima carta

se $n = 2018$

l'assistente ha 2017 possibili carte da lasciare scoperte che sono tante quanti i colori dell'ultima.

$n \leq 2018$

Step 3: Se fosse $n = 2017$, allora (*) è =

$\Rightarrow$ il mago vede tutte le (pos., colore) $\forall$ conf. scelta dallo spettatore l'assist. deve avere una sola scelta (altrimenti si sovrappongono)

Quindi $\exists$ f: Posizioni X Colori $\rightarrow$ Posizioni X Colori

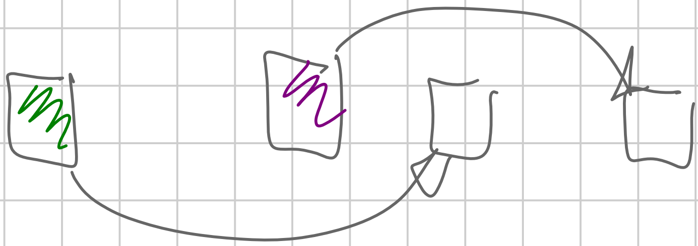
t.c. (la posizione di $f(i, c)$) $\neq i$

e t.c. $\forall$ $i \neq j$, $\forall$ c_i, c_j

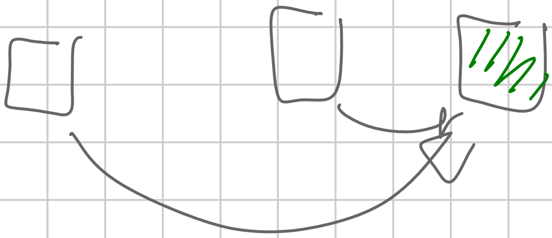
allora le informazioni: $f(i, c_i)$

$f(j, c_j)$

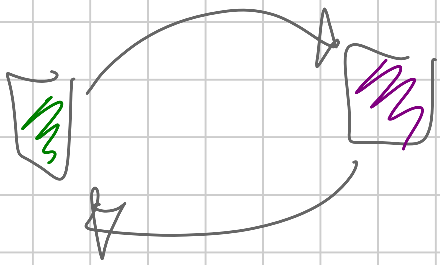
devono essere incompatibili



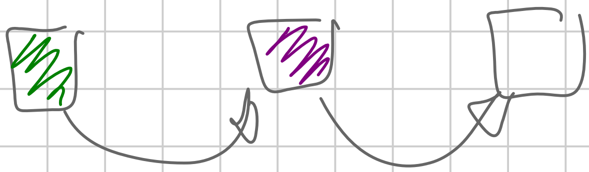
non può succedere



non entrambe



non succede

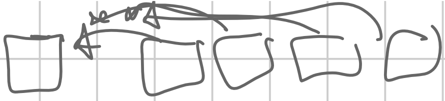


"

Step 4: fissati i colori di tutte le carte l'insieme delle carte indicate dalle →

è grande al più 2

Step 4 ½: tutte le carte (diverse dalla 1) indicano la 1



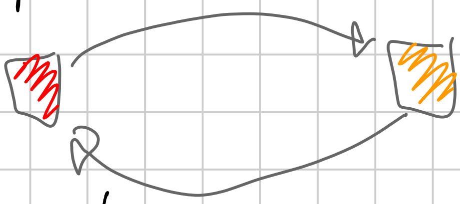
Step 5 : se cambio il colore di una carta allora tutte indicano ancora la 1

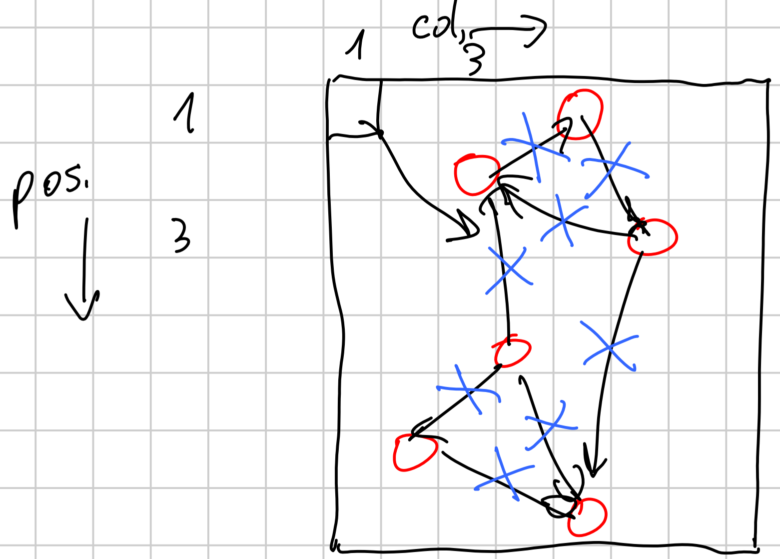
Step 6 : per ogni carta diversa dalla 1, considero l'insieme di colori indicati sulla 1
allora questi insiemi sono 2016 sottoinsiemi non vuoti e disgiunti dell'insieme dei colori

$\Rightarrow \exists$ una posizione che indica 1,
indipendentemente dal colore sopra di lei

Step 7

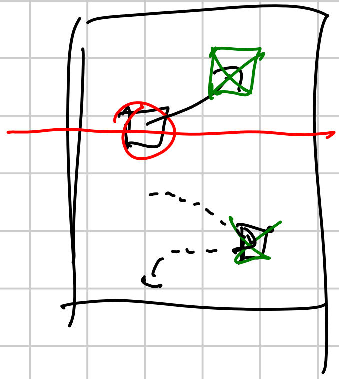
allora, prendo





2017^2 frecce uscenti, entranti
e
1 x cas.

1) ∃ casella in cui non arriva niente,



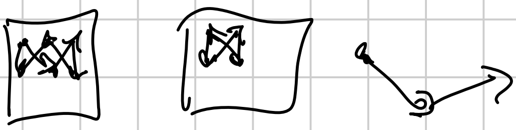
scelgo e elimino

elimino

elimino

elimino casella dalle righe con ancora 2017

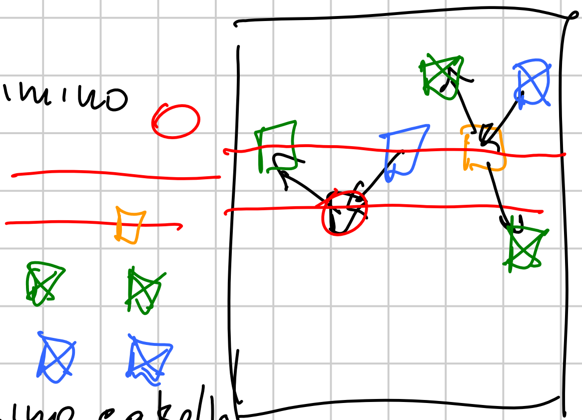
Ok per induzione fatto $n=3$



2) tutte le caselle hanno almeno 1 → entrante

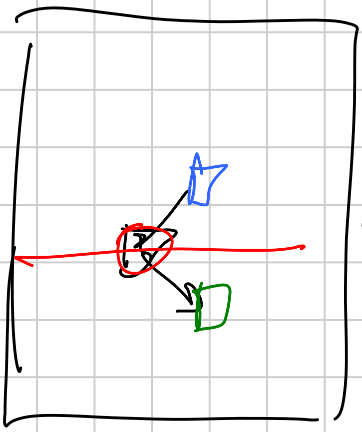
esattamente una!

elimino



elimino caselle dalle righe finché non ne hanno tutte 2015 e vado per induzione

fatti $n=3$ e $n \geq 4$



scelgo

elimino

elimino

elimino

elimino 1 per riga che ne ha 2014 e induzione

□