MISCELLANEA WC18 Pol + Ludo

Note Title 27/01/2018

3. $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{in} \leq m \quad \forall\, m, n \quad (\ast)$$

Dimostra che $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} = k - 2014$ per qualche k, d.

(Erdős discrepancy problem)

1) $m=1$: $a_n + a_{2n} \leq 1 \rightsquigarrow$ 0, 0 / 1, 0 / 0, 1

$x_i = 2a_i - 1$ o $a_i - \frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow \sum x_i \leq 0$

(Prendiamo invece $a = x$)

2) $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k$ probabilmente diventa piccolo a piacere

La quantità $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k$, se passo da k a $k+1$

varia di -1, 0, oppure 1:

$$\sum_{i=1}^{2(k+1)} a_{id} - (k+1) - \sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k = a_{(2k+1)d} + a_{(2k+2)d} - 1 \in \{-1, 0, 1\}$$

$\Rightarrow$ se la quantità $\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k$ scende sotto 2014,

allora "deve essere passata da 2014"

Supponiamo di negare la tesi:

$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} - k \geq -M \quad \text{per un qualche } M \in \mathbb{N}$$

e cerchiamo un assurdo.

Idea: $a_n + a_{2n}$ non può continuare a valere 0 infinite volte, altrimenti scenderei sotto $-M$.

$$f(m) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2m} - m +$$
$$+ x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{4m} - m$$

$$f(m+1) - f(m) = x_{2m} + x_{4m} - 1 \leq 0$$

$\rightsquigarrow$ f decrescente (debolmente)

Non può decrescere infinite volte, altrimenti avrei a un certo punto
$$f(m) = x_1 + \dots + x_{2m} - m + x_2 + \dots + x_{4m} - m \leq -2M$$

$\Rightarrow$ da un certo punto in poi è costante

$\Rightarrow$ da un certo punto in poi $x_m + x_{2m} = 1$

$\Rightarrow$ (moralmente) "metà uni e metà zeri"

Prendo N abbastanza grande (così $x_m + x_{2m} = 1$ per $m > N$)

$$\begin{array}{cccccc} x_N + & x_{2N} + & \dots & + x_{2mN} & \leq m & \\ + & + & & + & & \leq 2m \\ x_{2N} + & x_{4N} + & \dots & + x_{4mN} & \leq m & \\ = & = & & = & & \\ 1 & 1 & & 1 & & \end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{= 2m}$$

$\Rightarrow$ deve valere l'uguale, cioè $x_N + x_{2N} + \dots + x_{2mN} = m \ \forall m,$

N abb. grande

Visto che sono tutte uguali ente, posso determinare univocamente la successione:

$$\boxed{X_N} \quad X_{2N} \quad \boxed{X_{3N}} \quad X_{4N} \quad X_{5N} \quad \boxed{X_{6N}} \quad X_{7N} \quad X_{8N} \quad \boxed{X_{9N}} \quad X_{10N} \quad X_{11N} \quad \boxed{X_{12N}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{=2} \quad 0 \quad 1}_{=3} \quad 1 \quad 0}_{=4} \quad 0 \quad 1 \quad 1}_{=5} \quad 0$$

M1) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$f(x+y) \geq f(x) + y \qquad P(x,y)$$

$$f(f(x)) \leq x \qquad Q(x)$$

1) $P(x,y)$ $\quad f(x+y) \geq f(x) + y > f(x)$

$\Rightarrow f$ è (strettamente) crescente

2) Vorremmo vedere cosa succede "vicino a 0"

$$\inf\{f(x) : x > 0\}$$

Es. se $g(x) = x$, $\quad \min\{g(x) : x > 0\}$

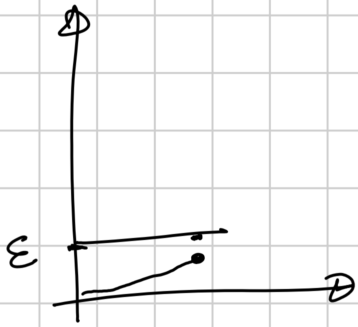
$\inf(S)$ = il più grande numero reale m tale che S contiene un numero $\leq m + \varepsilon$ per ogni ε e $m \leq x$ per ogni $x \in S$

Ogni insieme limitato inferiormente ammette un inf

$\inf \{ f(x) : x>0 \} = 0$, in questo caso,
perché $Q(x)$ ci dice che f assume valori positivi piccoli a piacere

Dato un certo $\varepsilon > 0$, esiste un $y>0$ tale che $f(y) \leq \varepsilon$ (basta prendere $y = f(\varepsilon)$, per la $Q(\varepsilon)$)

Di più: $f(x) \leq \varepsilon$ per ogni $x \leq y$



[redacted] $\underset{P(y, f(x))}{\leq} f(f(x)+y) \underset{P(x,y) \text{ + crescenza}}{\leq} f(f(x+y)) \overset{Q(x+y)}{\leq}$ [redacted]

Idea 1: "faccio tendere y a zero" Fisso $\varepsilon > 0$
Prendo y molto piccolo, in modo che $y \leq \varepsilon$, $f(y) \leq \varepsilon$

$$f(x) \leq x + y - f(y) \leq x + \varepsilon - 0$$

$\Rightarrow f(x) \leq x + \varepsilon$ — deve valere per ogni $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ [redacted] $\forall x$

(bastava anche mettere $x=y$ nella gialla) c.s.

Vorrei qualcosa del tipo $f(z)\geq z$ → devo usare il termine $f(x+y)$ nella P per ottenerla

$x+y=z$ (ε fissato)

$P(x, z-x)$: $f(z)\geq f(x)+z-x$

"faccio tendere x a 0": prendo x tale che $x\leq\varepsilon$, $f(x)\leq\varepsilon$,

quindi $f(z)\geq 0+z-\varepsilon=z-\varepsilon$

Se deve valere per ogni $\varepsilon>0$, allora [redacted] $\forall z$

$$f(x)>x$$

$$\Rightarrow f(f(x))>f(x)>x$$ assurdo per $Q(x)$

$$\Rightarrow f(x)\leq x \quad \forall x>0$$

$$g(x)=f(x)-x \quad \forall x>0$$

$$-x\leq g(x)\leq 0 \quad \forall x>0$$

$$f(x+y)\geq f(x)+y$$

$$g(x+y)+\cancel{x}+\cancel{y}\geq g(x)+\cancel{x}+\cancel{y}$$

$$0\geq g(x+y)\geq g(x)\geq -x$$

$$\Rightarrow g(x)=0 \quad \forall x$$

$$f(x+y) \geq f(x) + y \geq y \quad \forall x, y$$

$$f(a) \geq b \quad \forall a \geq b$$

$f(a) \geq a$ ok se no $f(a) < b < a$ per un certo b

$$x \geq f(f(x)) \geq f(x) \geq x$$

$$f(x) = x \quad \forall x$$

$S = \{1, \dots, 2017\}$ $A_i \subseteq S$ $|A_i| = 3$

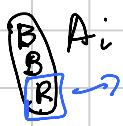
$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $i \neq j$ Dimostrare che si può colorare gli elementi di S di rosso e blu in modo che

1) ci siano almeno 64 blu
2) ogni A_i contenga un elemento rosso.

Che succede in una configurazione estremale?

Se non posso mettere altri elementi blu, che vuol dire?

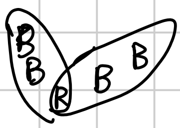
Deve esistere almeno un



da colorare di blu

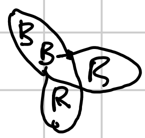
Ah! Ma allora gli altri A_j $j \neq i$?

1



può succedere

2



non può succedere

Per ogni R $\exists A_i$ che diventa tutto blu se coloro R di B

$$\{\text{rossi}\} \xrightarrow{f} \{\text{sottoins. di blu di 2 elementi}\}$$

1 può darsi che posso scegliere

2 f è iniettiva

$$\left|\{\text{rossi}\}\right| = R = 2017 - B$$

$$\left|\{\text{sottoins. 2 elementi blu}\}\right| = \binom{B}{2}$$

$$f \text{ iniettiva} \Rightarrow 2017 - B \leq \binom{B}{2} \qquad \binom{64}{2} = 2016$$

$$\text{o } 2017 \leq \binom{B+1}{2} \qquad \binom{63}{2} = 1953$$

$$\Rightarrow B \geq 64.$$