WC19 Algebra

Note Title 1/27/2019

A6 $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(g(x)+y) = g(f(y)+x)$$

Tesi: f limitata $\Rightarrow$ g periodica

$\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im} g$ Analogo $\operatorname{Im} g \supseteq \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ e ha cardinalità finita.

Oss. Se $g(x) = g(x')$ allora $f(g(x)+y) = g(f(y)+x)$

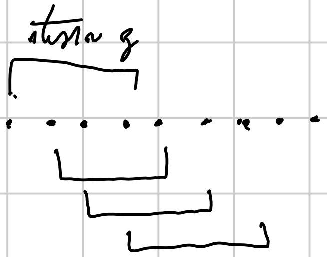
$$f(g(x')+y) = g(f(y)+x')$$

ovvero $g(x+f(y)) = g(x'+f(y))$

Suppongo che $1 \in \operatorname{Im} f$ . .

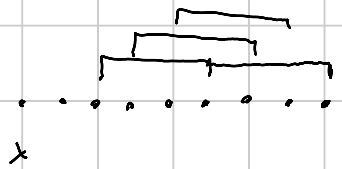
$$g(x) = g(x') \Rightarrow g(x+1) = g(x'+1)$$

$$\Rightarrow g(x+M) = g(x'+M)$$



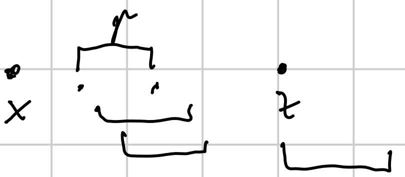
Fisso x qualsiasi. Prendo $x, x+1, \dots, x+|\operatorname{Im} g|$

Allora ci sono i, j con $g(x+i) = g(x+j)$



$\Rightarrow$ per ogni z abbastanza grande (poco dopo x)
vale che z ha periodo p in avanti.
Dove p dipende da x ma $p \leq |\mathrm{Im}\, g|$

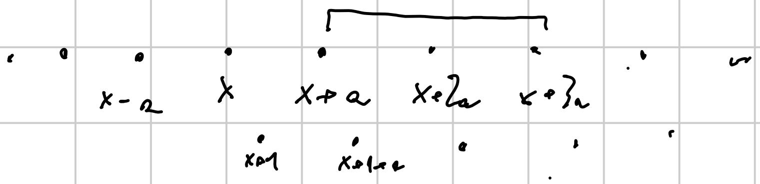
Ripeto il ragionamento prendendo degli x sempre più indietro
$\Rightarrow$ ci deve essere un p che si ripete infinite volte.



$$f(z) = f(z+p)$$

$\Rightarrow f$ periodica.

Prendo $a \in \mathrm{Im}\, f$ suppongo $a > 0$



$$g(x) = g(x+na)$$

AS. Trova polinomi reali t.c.

$$p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2 = p(a+b+c)^2$$

$\forall\ a, b, c$ reali t.c. $ab + bc + ca = 1$

Idee:

1) $p(x) = \alpha x^d + \beta x^{d-1} + \dots$

2) suppongo p.es. $a+b+c = \lambda$, λ radice

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

$a+b+c$ non troppo piccolo..

3) funzioni simmetriche elementari

$S = a+b+c$
$Q = ab+bc+ca = 1$
$P = abc$

$$\underbrace{p(a)^2+p(b)^2+p(c)^2}_{g(S,Q,P)} = \underbrace{p(a+b+c)^2}_{f(S)}$$

polinomi

$g(S,1,P)$ deve dipendere solo da S ?!

$g(S,1,P)$ e $f(S)$ devono proprio essere uguali come polinomi in $\mathbb{R}[S,P]$

⚠ non basta che siano uguali in ∞ punti, per esempio $f(x,y) = y-x^2$ e $g(x,y)=0$ coincidono

⌊ su tutti i pti della forma (k, k^2) per $k \in \mathbb{N}$ ⌋

però, proprietà più forte: fissato ad es. S, esistono infiniti P per cui vale l'uguaglianza, e da questo si dimostra che sono davvero uguali

$$f(x,y) = f_0(x) + f_1(x)\, y + f_2(x)\, y^2 + \dots$$
$$g(x,y) = g_0(x) + g_1(x)\, y + \dots$$

Fissato $x = x_0$, i polinomi in y
$f(x_0, y)$ e $g(x_0, y)$ coincidono per ∞ scelte di y $\Rightarrow$ $f_i(x_0) = g_i(x_0)$ $\forall i$

Ma questo ragionamento vale per ∞ valori $x_0, x_1, x_2, \dots$, quindi $f_i(x) = g_i(x)$ come polinomi in x $\forall x$

$$P(x)^2 =: q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

$$LHS = q_0 \cdot \underbrace{3} + q_1 \cdot \underbrace{(a+b+c)} + q_2 \underbrace{(a^2+b^2+c^2)} + \dots$$

$$\Pi_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 3$$
$$\Pi_1 = a^1 + b^1 + c^1 = S$$
$$\Pi_2 = a^2 + b^2 + c^2 = S^2 - 2Q$$
$$\Pi_3 = a^3 + b^3 + c^3 = S^3 - 3SQ + 3P$$
$$\Pi_4 = a^4 + b^4 + c^4 = S^4 - 4S^2Q + 4PS + 2Q^2$$

$\Pi_5 = Q^5 + S^5 + r^5 = \underbrace{S^5} - \underbrace{5 S^3 Q} + \ldots$

$\Pi_6 \quad \ldots + P^3 + \ldots P S^3 \ldots$

$LHS = q_0 \Pi_0 + q_1 \Pi_1 + \ldots$

$= q_0 \cdot 3$
$+ q_1 \cdot \cancel{S}$
$+ q_2 \cdot (\cancel{S^2} - 2Q)$ with $Q = 1$
$+ q_3 \cdot (\cancel{S^3} - 3 S Q + 3P)$
$+ q_4 \cdot (\cancel{S^4} - 4 S^2 Q + \boxed{4PS} + 2Q^2)$ with $Q = 1$

$RHS = q_0 + q_1 S + q_2 S^2 + \ldots$

$q_0 \cdot 1$
$+ \cancel{q_1 \cdot S}$
$+ \cancel{q_2 \cdot S^2}$
$+ \cancel{q_3 \cdot S^3}$
$+ q_4 \cancel{S^4}$

per es. se vogliamo soluzioni con $p(x)$ di grado 1
$q(x) = p(x)^2$ di grado 2, deve succedere

$$q_0 \cdot 3 + q_2 \cdot (-2) = q_0 \quad \Rightarrow \boxed{q_0 = q_2}$$

$$q(x) = \alpha^2 (x \pm 1)^2 \qquad p(x) = \alpha (x \pm 1) \qquad \text{soluzioni!}$$

Con $\deg q = 4$, LHS e RHS mai uguali come polinomi per colpa di PS

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni con $\deg q = 4$

Con $\deg q = 6$?

Claim: per $k > 2$, Π_k contiene un termine del tipo $P^\alpha S^\beta$, senza Q, che non si potrà semplificare nel conto sopra, e quindi ho finito.

C'è una relaz. ricorsiva tra i Π_k

$$\Pi_{k+1} = S\Pi_k - Q\Pi_{k-1} + P\Pi_{k-2}$$

$$a^{k-2}(a^3 - Sa^2 + Qa - P) = 0$$ (Newton identities)
$$+\, b^{k-2}(b^3 - \dots\quad) = 0$$
$$+\, c^{k-2}(c^3 - \dots\quad) = 0$$

(non so se si finisce)

Prendiamo una scelta particolare di a, b, c / P, Q, S

tale che $Q = ab + bc + ca = 0$.

Allora, se non c'è nessuno ~~qualcosa~~ dei termini "proibiti" succede che

$$\Pi^k = S^k + (\text{roba che contiene } Q)$$

e quindi, per una scelta di a, b, c con $Q = 0$,

$$(a^k + b^k + c^k) = (a+b+c)^k$$

Per esempio, prendo $a = -2 \quad b = 3 \quad c = 6$

dovrebbe succedere che $(-2)^k + 3^k + 6^k = 7^k$

falsa per $k \geq 3$

$\Rightarrow$ per $k \geq 3$ c'è un termine "senza Q" oltre a S^k

$\Rightarrow$ non si semplifica

$\Rightarrow$

$$p(a) + p(b) + p(c) = p(a+b+c)$$

non ha sol. per deg $p > 2$

Sol. Mathlinks:

$a = -2x + 1$

$b = 3x + \left(\frac{i-3}{2}\right)$

$c = 6x - (3+2i)$

deve valere $\quad p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2 = p(a+b+c)^2$

Confrontando termini di grado più alto in x,

$$(-2)^k + 3^k + 6^k = 7^k \text{ , imp. per } k > 2$$

A6 Trovare terne $a, b, c \geq 0$ t.c.

- $a+b+c=3$
- $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}} \geq \sum_{cyc} \dfrac{ab}{\sqrt{b+c}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

In realtà:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}} \leq \sum_{cyc} \frac{ab}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

+ casi di uguaglianza $\quad (1,1,1), (1,2,0) +$ ⚠

$$a+b \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

CASA

$$\sum_i \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$$

IMO '01

CS SU

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)\left(a_i\sqrt{a^2+8bc}\right) = a^2$$

$$\sum \frac{ab}{\sqrt{b+c}}$$

$$\underbrace{\frac{ab}{\sqrt{b+c}}}\cdot\underbrace{\frac{ab}{\sqrt{b+c}}}\cdot\underbrace{ab(b+c)} = (ab)^3$$

$$\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{\sqrt{b+c}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{\sqrt{b+c}}\right)\cdot\left(\sum_{cyc}ab(b+c)\right) \geq \left(\sum_{cyc}ab\right)^3$$

Hölder

$$\left(\sum_i p_i^3\right)\left(\sum_i q_i^3\right)\left(\sum_i r_i^3\right) \geq \left(\sum_i p_i q_i r_i\right)^3$$

$Q = ab+bc+ca$ $\qquad P = abc$

$$\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{\sqrt{b+c}}\right) \geq \sqrt{\frac{Q^3}{\sum_{cyc}(ab^2+abc)}} \geq \sqrt{\frac{Q^3}{4+2P}}$$

$$\boxed{ab^2+bc^2+ca^2+abc \leq 4 \quad \text{per} \quad a+b+c=3}$$

$$RHS \geq \sqrt{\frac{Q^3}{4+2P}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{\text{HOPE}}{\geq} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = \sum_{sym} a^2b + 2abc$$

$$Q \cdot 3 = (ab+bc+ca)(a+b+c) = \sum_{sym} a^2b + 3abc$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 3Q-P$$

$$\sqrt{\frac{Q^3}{\cancel{4+2P}\;\,2+P}} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \geq \frac{3Q-P}{2\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{Q\,Q^3}{Q(2+P)}} + 1 = \frac{Q^2}{\sqrt{Q(2+P)}} + 1 \geq \frac{2Q^2}{2+P+Q} + 1$$

$$\frac{2Q^2}{2+P+Q} + 1 \overset{\text{HOPE}}{\geq} \frac{3Q-P}{2} \qquad \sqrt[3]{P} \leq \sqrt[2]{Q} \leq \frac{a+b+c}{3} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4Q^2}{2+P+Q} + Q+P+2 \geq 4Q$$

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \overset{?}{\leq} 4 \qquad a+b+c = 3$$

$$27\left(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc\right) \overset{?}{\leq} 4\,(a+b+c)^3$$

$$\left[\begin{array}{lcl} 15\sum ab^2 & \leq & 4\sum a^3 \\ \quad 3abc & \overset{?}{} & 12\sum a^2b \end{array}\right]$$

SOS (Sum Of Squares) : $\sum X\,(b-c)^2 \geq 0$

Schur - Vornicu : $\sum A\,(a-b)(a-c) \geq 0$

Trick: $\sum X\,(b-c)^2 = \sum (Y+Z)\,(a-b)(a-c)$

$$\sum A\,(a-b)(a-c) = \sum \left(\frac{B+C-A}{2}\right)(b-c)^2$$

$$3a^3 + 3b^3 + 3c^3 - 3ab^2 - 3bc^2 - 3ca^2 \geq 0$$

$$a^3 + 2b^3 - 3ab^2 \;\boxed{\cancel{\geq 0}}\; = (a+2b)(a-b)^2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \;\boxed{\cancel{\geq 0}}\; = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{2}\sum (b-c)^2\right) =$$

$$= \sum \left(\frac{a+b+c}{2}\right)(b-c)^2$$

$$12\sum a^2b - 12\sum ab^2 = 12\,(b-c)(a-b)(a-c)$$

$$= 4\sum (b-c)\,(a-b)(a-c)$$

$$\begin{cases} \sum (b+2c)(b-c)^2 + \sum \left(\frac{a+b+c}{2}\right)(b-c)^2 \\ + \sum (4b-4c)\cdot(a-b)(a-c) \end{cases} \geq 0$$

Forma Schur: $\sum (c+2a+a+2b+a+b+c+4b-4c)(a-b)(a-c) \geq 0$

$$\sum (4a+6b-2c)(a-b)(a-c) \geq 0$$

SE $a \geq b \geq c$

$$\begin{aligned} &+ + (4a+6b-2c)(a-b)(a-c) \\ &? - (4b+6c-2a)(b-c)(b-a) \quad \geq 0 \\ &+ + (4c+6a-2b)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

$$|(a-b)(a-c)| \geq |(b-c)(b-a)|$$
$$|(c-a)(c-b)| \geq |(b-c)(b-a)|$$

Quindi ci basta mostrare che

$$(4a+6b-2c)+(4c+6a-2b) \geq (4b+6c-2a)$$

OK

Forma SOS:
Caso $a \leq b \leq c$

$$\sum \left(b+2c+\frac{a+b+c}{2}+\frac{4c-4a+4a-4b-(4b-4c)}{2}\right)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\sum \left(\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}c+\frac{9}{2}a\right)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} ?\ &\left(\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}c+\frac{9}{2}a\right)(b-c)^2 \\ + &\left(\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}a+\frac{9}{2}b\right)\cdot(c-a)^2 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{9}{2}c \right)(a-b)^2$$

$$(b-c)^2 \leq (c-a)^2$$

ci basta $\frac{3}{2}c - \frac{3}{2}a + \frac{9}{2}b \geq \frac{3}{2}b - \frac{3}{2}c + \frac{9}{2}a$

OK